# Hãy bắt đầu từ bài toán đơn giản

Nguyễn Bá Đang
Hội Toán học Hà Nội

## 1 Mở đầu

Tôi còn nhớ GS Nguyễn Văn Mậu day chúng tôi cách đây hơn hai mươi năm "Hãy bắt đầu từ bài toán đơn giản":

Ai cũng biết $x^2 \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ dấu bằng xảy ra khi $x = 0$;

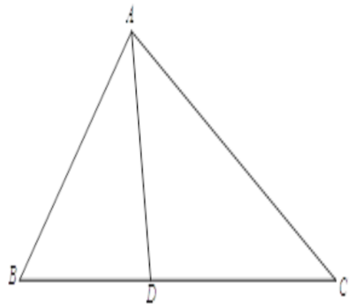
Thay $x$ bằng $(a-b)$, ta có $(a-b)^2 \geq 0$ nên $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

Từ những điều đơn giản này chúng ta sẽ mở rộng bài toán mà nhiều người không ngờ tới.

Tôi muốn trao đổi với các bạn một số bài hình học cũng từ ý tưởng như vậy.

## 2 Ví dụ minh họa

**Bài toán 2.1.** Chứng minh rằng trong mọi tam giác $\angle A = 2\angle B$ khi và chỉ khi $a^2 = b^2 + bc$.




***Chứng minh.*** Ngay từ khâu vẽ hình không đơn giản vẽ được $\angle A = 2\angle B$.

Kẻ phân giác AD suy ra $\angle BAD = \angle DAC$ suy ra $\angle ABC = \angle BAD$ suy ra $\angle ADC = 2\angle ABC$ suy ra tam giác ABC và tam giác DAC đồng dạng (g.g) suy ra $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BC}{AC}$ suy ra $AB.AC = BC.AD$ mặt khác $AD = BD$ suy ra

$AB.AC = BC.BD$ (1)

AD phân giác góc $\angle A$ theo tính chất đường phân giác suy ra $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$ suy ra $\dfrac{BD}{BD+DC} = \dfrac{AB}{AB+BC}$ suy ra $BD = \dfrac{AB}{AB+BC}$ thay vào đẳng thức (1) suy ra $a^2 = b^2 + bc$ .

**Bài toán 2.2** (Dự tuyển IMO 1961)**.** Cho tam giác ABC thỏa mãn $\angle A = 2\angle B = 4\angle C$ . Chứng minh $\dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{a}$ .

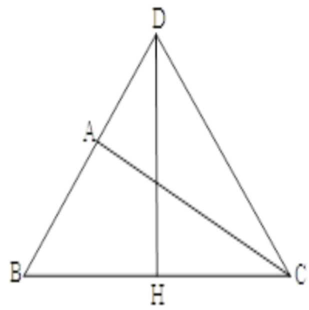
***Lời giải.***

Cách 1. Từ bài toán trong tam giác ABC. Chứng minh $\angle A = 2\angle B$ khi và chỉ khi $a^2 = b^2 + bc$ (Bạn đọc tự chứng minh) suy ra

Từ giả thiết $\angle A = 2\angle B = 4\angle C$ suy ra $\angle A = 2\angle B$ và $\angle B = 2\angle C$ từ đó ta có: $a^2 = b^2 + bc$ (1) và $b^2 = c^2 + ca$ (2), tam giác ABC không cân suy ra $b - c \neq 0$

Nhân hai vế (1) với $b - c$ suy ra $a^2(b-c) = (b^2+bc)(b-c) = b(b^2-c^2)$ (3) từ (2) suy ra $b^2 - c^2 = ca$ thay vào (3) suy ra $a^2(b-c) = bca$ suy ra $a(b-c) = bc$ chia hai vế cho abc suy ra $\dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{a}$ .

Cách 2. Gọi H là trung điểm của BC, qua H dựng đường thẳng vuông góc với BC cắt AB kéo dài tại D suy ra $\Delta DBC$ là tam giác cân suy ra $\widehat{B} = \widehat{BCD}$



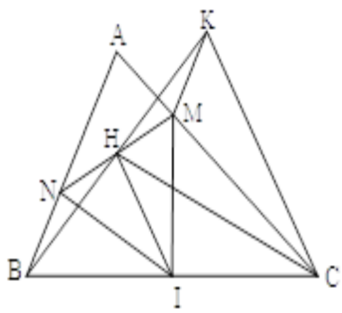

Theo giả thiết $\widehat{A} = 2\widehat{B} = 4\widehat{C}$suy ra $7\widehat{C} = 180^0$

Đặt $\alpha = \dfrac{180^0}{7}$ suy ra $\widehat{C} = \alpha,\ \widehat{B} = 2\alpha,\ \widehat{A} = 4\alpha\ \widehat{DAC} = \widehat{B} + \widehat{C} = 3\alpha$suy ra $\widehat{ACD} = \alpha$suy ra $\widehat{BDC} = 3\alpha$ suy ra $CA = CD = BD$suy ra $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AB}{BD}$ (1) CA là phân giác góc $\widehat{BCD}$ suy ra $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{CD}$(2), cộng (1) với (2) suy ra $\dfrac{AB}{AC} + \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AB}{BD} + \dfrac{AD}{CD} = \dfrac{AB+AD}{BD} = 1$ suy ra $\dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{BC} = \dfrac{1}{AB}$ suy ra $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c}$.

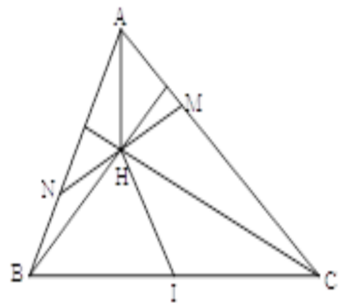
**Bài toán 2.3** (TST Ba Lan)**.** Cho tam giác nhọn ABC, H là trực tâm, gọi I là trung điểm cạnh BC, đường thẳng qua H và vuông góc với HI cắt AC tại M và cắt AB tại N. Chứng minh H là trung điểm MN.

***Lời giải.***

Cách 1. Kéo dài BH lấy điểm K sao cho HK = HB, I là trung điểm suy ra HI là đường trung bình của tam giác BCK suy ra HI song song với CK, giả thiết HI vuông góc với MN suy ra HM vuông góc với CK, giả thiết H là trực tâm tam giác ABC suy ra BH vuông góc AC hay CM vuông góc HK suy ra M là trực tâm tam giác HKC suy ra KM vuông góc với HC, CH vuông góc AC suy ra KM song song với AB suy ra $\angle HKM = \angle HBN$ suy ra tam giác HKM và tam giác HBN bằng nhau (g.c.g) suy ra HM = HN.

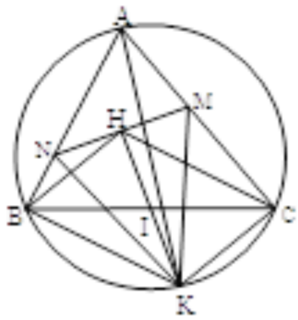



Cách 2. Theo giả thiết H là trực tâm tam giác suy ra AH vuông góc BC và CH vuông góc AB suy ra $\angle BAH = \angle BCH$ , cũng theo giả thiết HI vuông góc MN suy ra $\angle IHC = \angle HNA$ suy ra

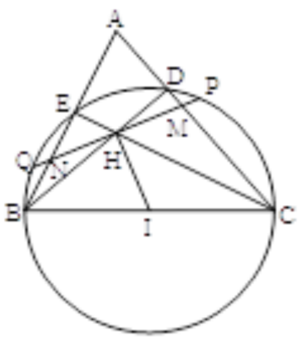



Tam giác AHN và tam giác CIH đồng dạng (g.g)suy ra $\dfrac{AH}{CI} = \dfrac{HN}{IH}$ (1), tương tự tam giác AHM và tam giác BIH đồng dạng suy ra $\dfrac{AH}{BI} = \dfrac{HM}{IH}$ (2), từ (1) và (2) và IB = IC suy ra $\dfrac{HN}{HI} = \dfrac{HM}{HI}$ suy ra HM = HN.

Cách 3. Đường kính qua A cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại Ksuy ra $\angle ABK = \angle ACK = 90^0$ suy ra KB song song với CH và KC song song với BH suy ra tứ giác BHCK là hình bình hành suy ra H, I, K thẳng hàng. KH vuông góc với MN suy ra tứ giác BNHK nội tiếp suy ra $\angle NKH = \angle NBH$ , tương tự $\angle HKM = \angle HCM$ , mặt khác BH, CH là các đường cao suy ra $\angle NBH = \angle HCM$ suy ra $\angle NKH = \angle MKH$ suy ra tam giác KMN cân suy ra $HM = HN$ .




Cách 4. Dựng đường tròn tâm I đường kính BC cắt cạnh AC tại D và AB tại E suy ra BD vuông góc với AC và CE vuông góc với AB suy ra BD và CE là đường cao của tam giác ABCsuy ra BD và CE giao nhau tại H đó là trực tâm tam giác;




Theo giả thiết đường thẳng qua H vuông góc với IH cắt đường tròn tâm I tại P và Q suy ra HP = HQ, cát tuyến CD và EB cắt PQ tại M và N suy ra theo bài toán "Con bướm" suy ra HM = HN.

Hà Nội, tháng 2-2018