PHƯƠNG PHÁP PHẢN CHỨNG TRONG ÁP DỤNG

Bùi Thị Thu Dung
Giáo viên Trường THCS Văn Lang - Phú Thọ

1 Mở đầu

Định nghĩa 1.1. Giả sử $S_1,\ S_2,\ldots,S_n,\ T$ là một dãy hữu hạn các công thức của cùng các biến $p,\ q,\ldots,\ r$. Nếu tất các các bộ giá trị của $p,\ q,\ldots,\ r$ làm cho $S_1,\ S_2,\ ,\ldots,\ S_n$ nhận giá trị 1 cũng đồng thời làm cho T nhận giá trị 1 thì ta nói rằng có một quy tắc suy luận từ các tiền đề $S_1,\ S_2,\ ,\ldots,\ S_n$ tới T. Quy tắc suy luận đó được kí hiệu bởi

$$\frac{S_1,\ S_2,\ldots,\ S_n}{T}.$$

Tính chất 1.1 (Các quy tắc suy luận thường gặp)**.**
+ Quy tắc kết luận: $\dfrac{p,\ p\Rightarrow q}{q}$.
+ Quy tắc bắc cầu: $\dfrac{p\Rightarrow q,\ q\Rightarrow r}{p\Rightarrow r}$.
+ Quy tắc suy luận phản chứng: $\dfrac{\overline{p}\Rightarrow (q\wedge\overline{q})}{p}$ (1); $\dfrac{q,\overline{p}\Rightarrow\overline{q}}{p}$ (2).

Nhận xét 1.1. Quy tắc (1) chỉ ra: "*Nếu từ phủ định mệnh đề p suy ra được hai mệnh đề phủ định nhau q và $\overline{q}$ thì ta có p là mệnh đề đúng*".

Nhận xét 1.2. Quy tắc (2) nói rằng: "*Giả sử mệnh đề q là một mệnh đề đúng, nếu từ phủ định của mệnh đề p suy ra được mệnh đề phủ định của q thì mệnh đề p đúng*".

2 Phương pháp chứng minh phản chứng

Phương pháp chứng minh phản chứng là phương pháp chứng minh gián tiếp, cơ sở của phương pháp này là quy tắc suy luận phản chứng. Muốn chứng minh mệnh đề p, ta giả sử p sai, nghĩa là giả sử $\overline{p}$ đúng. Xuất phát từ giả thiết $\overline{p}$ đúng, áp dụng các quy tắc suy luận ta được hai mệnh đề mâu thuẫn nhau $(q\wedge\overline{q}=0)$ hoặc mâu thuẫn với giả thiết. Điều đó chứng tỏ giả thiết $\overline{p}$ đúng là sai, nghĩa là mệnh đề p phải đúng.

3 Một số áp dụng

Bài viết trình bày một số bài toán về số nguyên tố, số chính phương, quan hệ chia hết, chứng minh bất đẳng thức có sử dụng phương pháp chứng minh phản chứng.

Bài toán 3.1. Chứng minh rằng tập các số nguyên tố P là tập vô hạn.

Lời giải. Giả sử P là tập hữu hạn, $P = \{p_1,\ p_2, \ldots,\ p_n\}$ trong đó $p_i\ (i = \overline{1;\ n})$ là các số nguyên tố và p_n là số nguyên tố lớn nhất.

Xét $p = p_1p_2 \ldots p_n + 1$. Do $p_1p_2 \ldots p_n \vdots p_i\ (i = \overline{1;\ n})$ mà 1 không chia hết cho bất kì $p_i\ (i = \overline{1;\ n})$ nào nên p không chia hết cho bất kì $p_i,\ (i = \overline{1;\ n})$ nào. Vì p không chia hết cho bất kì số nguyên tố nào nhỏ hơn nó do đó p là số nguyên tố, mà $p > p_n$ (mâu thuẫn với p_n là số nguyên tố lớn nhất).

Bài toán 3.2. Chứng minh rằng: nếu n là số tự nhiên lớn hơn 1, a là ước nhỏ nhất khác 1 của n thì a là số nguyên tố.

Lời giải. Giả sử a không là số nguyên tố, theo định nghĩa số nguyên tố và vì a không là số nguyên tố, $a \neq 1$ nên a phải có ít nhất một ước b khác 1 và khác a, hay $1 < b < a$. Mặt khác a là ước của n nên b cũng là ước của n. Do đó, a không phải là ước nhỏ nhất của n. (mâu thuẫn giả thiết). Vậy điều giả sử là sai hay a là số nguyên tố.

Bài toán 3.3. Cho số nguyên dương $n > 1$ thỏa mãn điều kiện $2^n + 1$ là số nguyên tố. Chứng minh rằng $n = 2^k$, với k là số nguyên dương.

Lời giải. Giả sử n không phải là lũy thừa của cơ số 2. Khi phân tích n ra thừa số nguyên tố, ta có thể viết $n = 2^k p$ với p là số nguyên dương lẻ lớn hơn 1.

Ta có $2^n + 1 = 2^{2^k p} + 1 = \left(2^{2^k}\right)^p + 1$. Đặt $a = 2^{2^k} \Rightarrow\ 2^n + 1 = a^p + 1$.

Vì p là số nguyên dương lẻ nên $a^p + 1$ chia hết cho $a + 1$, mà $1 < a + 1 < a^p + 1$ nên $a^p + 1$ là hợp số, mâu thuẫn giả thiết. Vậy n là lũy thừa của 2 hay $n = 2^k$ với k là số nguyên dương.

Nhận xét 3.1. Các số $F_n = 2^{2^n} + 1,\ n \in \mathbb{N}$ được gọi là số Fermat. Từ chứng minh trên chỉ ra rằng nếu n là số nguyên dương thì điều kiện cần để số $2^n + 1$ là số nguyên tố là n phải có dạng 2^k. Tuy nhiên điều ngược lại không đúng, Euler đã chỉ ra $F_5 = 2^{2^5} + 1$ có ước nguyên tố là 641. Euler cũng chứng minh được ước nguyên tố của $F_n = 2^{2^n} + 1$ phải có dạng $t.2^{n+2} + 1,\ t \in \mathbb{N}^*$.

Bài toán 3.4. Cho các số nguyên $a,\ b,\ c$ thỏa mãn $a^2 + b^2 = c^2$. Chứng minh rằng abc chia hết cho 6.

Lời giải.

+ Ta sẽ chứng minh abc chia hết cho 2. Giả sử abc không chia hết cho 2, thế thì ba số $a,\ b,\ c$ đều là số lẻ. Khi đó a^2+b^2 là số chẵn, mà c^2 là số lẻ, suy ra $a^2+b^2 \neq c^2$, mâu thuẫn giả thiết. Vậy điều giả sử trên là sai, vậy abc chia hết cho 2.
+ Ta sẽ chứng minh abc chia hết cho 3. Giả sử abc không chia hết cho 3, suy ra cả ba số $a,\ b,\ c$ đều không chia hết cho 3, khi đó $a,\ b,\ c$ chỉ nhận một trong hai dạng là $3k-1,\ 3k+1$ $(k \in \mathbb{N})$. Lại vì $(3k-1)^2$ và $(3k+1)^2$ đều chia 3 dư 1, nên a^2+b^2 chia 3 dư 2, còn c^2 chia 3 dư 1, suy ra $a^2+b^2 \neq c^2$, mâu thuẫn giả thiết. Vậy abc chia hết cho 3.
Vì ƯCLN$(2;\ 3)=1$, nên ta có abc chia hết cho 6.

Bài toán 3.5 (Đề thi TS chuyên Đại học Sư phạm năm 2013)**.** Với mỗi số nguyên dương n, kí hiệu S_n là tổng của n số nguyên tố đầu tiên $(S_1=2,\ S_2=2+3,\ S_3=2+3+5,\dots)$. Chứng minh rằng trong dãy số $S_1,\ S_2,\ \dots$ không tồn tại hai số hạng liên tiếp đều là các số chính phương.

Lời giải. Kí hiệu p_n là số nguyên tố thứ n.
Giả sử tồn tại $m \in \mathbb{N}^*$ mà $S_{m-1}=b^2,\ S_m=a^2,\ a,b \in \mathbb{N}^*$.
Vì $S_2=5,\ S_3=10,\ S_4=17$ nên $m>4,\ p_m$ là số lẻ.
Ta có $p_m=S_m-S_{m-1}=(a-b)(a+b),\ a+b>1$.
Suy ra $\begin{cases} a-b=1 \\ a+b=p_m. \end{cases}$

Do đó $p_m=2a-1=2\sqrt{S_m}-1 \Rightarrow S_m=\left(\dfrac{p_m+1}{2}\right)^2 \quad (*)$
Do $m>4$ nên

$$\begin{aligned} S_m &= 2+3+5+7+\dots+p_m \le 1+3+5+7+9+\dots+p_m+2-1-9 \\ &= (1+3+5+7+\dots+p_m)-8 \\ &= (1^2-0^2)+(2^2-1^2)+(3^2-2^2)+\dots+\left[\left(\frac{p_m+1}{2}\right)^2-\left(\frac{p_m-1}{2}\right)^2\right]-8 \\ &= \left(\frac{p_m+1}{2}\right)^2-8<\left(\frac{p_m+1}{2}\right)^2, \text{ (mâu thuẫn (*))}. \end{aligned}$$

Vậy suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 3.6 (Đề thi TS chuyên Đại học Sư phạm năm 2013)**.** Độ dài ba cạnh của tam giác ABC là ba số nguyên tố. Chứng minh rằng diện tích của tam giác ABC không thể là số nguyên.

Lời giải. Giả sử $a,\ b,\ c$ là ba số nguyên tố và là độ dài ba cạnh của tam giác ABC. Đặt $P,\ S$ thứ tự là chu vi, diện tích của tam giác ABC. Áp dụng công thức Hêrông ta có

$$16S^2=P(P-2a)(P-2b)(P-2c).\ (*)$$

Giả sử S là số tự nhiên, từ (*) suy ra $P=a+b+c$ phải là số chẵn.
+ Nếu $a,\ b,\ c$ cùng chẵn và vì $a,\ b,\ c$ nguyên tố nên $a=b=c=2$, suy ra $S=\sqrt{3}$ (loại).
+ Nếu $a,\ b,\ c$ có một số chẵn và hai số lẻ, giả sử $b,\ c$ lẻ và a chẵn thì $a=2$.

Nếu $b \neq c$ thì $|b-c| \geq 2 = a$, vô lí.

Nếu $b = c$ thì $S^2 = b^2 - 1 \Rightarrow (b-S)(b+S) = 1$, đẳng thức này không xảy ra vì S, b là các số tự nhiên.

Vậy suy ra không tồn tại tam giác thỏa điều kiện trên.

Bài toán 3.7 (IMO 1983)**.** Cho các số $a,\ b,\ c \in \mathbb{N}^*$, đôi một nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng phương trình $xbc + yca + zab = 2abc - ab - bc - ca$ không có nghiệm tự nhiên.

Lời giải. Giả sử phương trình có nghiệm tự nhiên $(x;\ y;\ z)$. Từ điều kiện của bài toán suy ra

$$xbc + yca + zab + ab = 2abc - bc - ca \Rightarrow (z+1)ab \,\vdots\, c.$$

Mà $(a;\ c) = (b;\ c) = 1 \Rightarrow (z+1) \,\vdots\, c$ mà $z+1 > 0 \Rightarrow z+1 \geq c \Rightarrow z \geq c-1$. Chứng minh tương tự ta có $x \geq a-1$, $y \geq b-1$. Từ đó ta có

$$\begin{aligned} xbc + yca + zab &\geq (a-1)bc + (b-1)ca + (c-1)ab = 3abc - ab - bc - ca \\ &> 2abc - ab - bc - ca \text{ (mâu thuẫn)}. \end{aligned}$$

Vậy suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 3.8 (Đề thi TS chuyên Khoa học Tự nhiên năm 2011)**.** Chứng minh rằng không tồn tại các bộ ba số nguyên $(x;\ y;\ z)$ thỏa mãn $x^4 + y^4 = 7z^4 + 5$.

Lời giải. Giả sử tồn tại các số nguyên $x,\ y,\ z$ thỏa mãn $x^4 + y^4 = 7z^4 + 5$.
Suy ra $x^4 + y^4 + z^4 = 8z^4 + 5$.
Vì a^4 chia cho 8 chỉ có thể dư 0 hoặc 1 nên $x^4 + y^4 + z^4$ chia cho 8 chỉ có thể dư 0; 1; 2 hoặc 3.
Mà $8z^4 + 5$ chia cho 8 dư 5 (mâu thuẫn).
Vậy không tồn tại bộ ba số nguyên $(x;\ y;\ z)$ thỏa mãn điều kiện trên.

Bài toán 3.9 (Đề thi TS chuyên Đại học Sư phạm năm 2013)**.** Giả sử $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_{11}$ là các số nguyên dương lớn hơn hay bằng 2, đôi một khác nhau và thỏa mãn $a_1 + a_2 + \cdots + a_{11} = 407$. Tồn tại hay không số nguyên dương n sao cho tổng các số dư của các phép chia n cho 22 số $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_{11},\ 4a_1,\ 4a_2, \ldots,\ 4a_{11}$ bằng 2012.

Lời giải. Giả sử tồn tại số nguyên dương n thỏa mãn điều kiện bài toán, gọi $r_1,\ r_2, \ldots,\ r_{11}$ tương ứng là các số dư của n khi chia cho $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_{11}$. Ta có $0 \leq r_i \leq a_i - 1$, $i = \overline{1;\ 11}$.
Suy ra $0 \leq r_1 + r_2 + \cdots + r_{11} \leq (407 - 11)$, hay $0 \leq r_1 + r_2 + \cdots + r_{11} \leq 396$. Tương tự như vậy khi chia n cho các số $4a_1,\ 4a_2, \ldots,\ 4a_{11}$ thì tổng số dư không vượt quá $4.407 - 11 = 1617$. Do đó tổng các số dư trong phép chia n cho các số $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_{11},\ 4a_1,\ 4a_2, \ldots,\ 4a_{11}$ không thể vượt quá 396+1617=2013. Kết hợp với giả thiết tổng các số dư bằng 2012, suy ra khi chia n cho 22 số trên thì có 21 phép chia có số dư lớn nhất và một phép chia có số dư nhỏ hơn số chia 2 đơn vị. Do đó tồn tại k sao cho a_k, $4a_k$ thỏa mãn điều kiện trên. Khi đó một trong hai số $n+1$ hoặc $n+2$ chia hết cho a_k và số còn lại chia hết cho $4a_k$. Suy ra ƯCLN$(n+1;\ n+2) \geq a_k \geq 2$, điều này không đúng. Vậy không tồn tại số nguyên dương n thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài toán 3.10. Có thể tìm được hay không 5 số nguyên sao cho các tổng của hai trong 5 số đó lập thành 10 số nguyên liên tiếp.

Lời giải. Giả sử tìm được 5 số nguyên $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Gọi S là tổng của 5 số trên và n là giá trị nhỏ nhất của tổng các cặp hai số trong 5 số trên, khi đó 10 số nguyên liên tiếp là

$$n,\ n+1,\ n+2, \ldots,\ n+9.$$

Và $S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$.
Ta tính tổng M của 10 số này theo hai cách khác nhau.
Ta có $M = n + (n+1) + (n+2) + \cdots + (n+9) = 10n + 45$.

Mặt khác trong tổng M mỗi số xuất hiện 4 lần nên $M = 4S$.
Do đó $10n + 45 = 4S$ (Vô lí). Vậy không tìm được 5 số nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài toán 3.11. Có thể chia các số tự nhiên từ 1 đến 2017 thành các nhóm đôi một rời nhau sao cho trong mỗi nhóm số lớn nhất bằng tổng các số còn lại hay không?

Lời giải. Giả sử ta có thể chia được các số tự nhiên từ 1 đến 2017 thỏa mãn yêu cầu bài toán. Khi đó tổng các số ở mỗi nhóm đều là 1 số chẵn (Vì tổng này bằng 2 lần số lớn nhất).
Vậy tổng của 2017 số đã cho là một số chẵn (Vì các nhóm đôi một rời nhau và tổng của các số chẵn là một số chẵn).
Nhưng tổng của 2017 số từ 1 đến 2017 là một số lẻ (mâu thuẫn).
Vậy không thể chia được các nhóm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài toán 3.12. Cho $a,\ b,\ c$ là các số thực sao cho $a+b+c > 0$; $ab+bc+ca > 0$; $abc > 0$. Chứng minh rằng $a,\ b,\ c > 0$.

Lời giải. Giả sử một trong các số $a,\ b, c$ nhỏ hơn 0. Vì $abc > 0$ nên trong ba số này phải có hai số âm và một số dương. Không mất tính tổng quát giả sử $a < 0,\ b < 0,\ c > 0 \Rightarrow bc < 0$. Khi đó $ab + bc + ca = a(a+b+c) - a^2 + bc < 0$ (mâu thuẫn giả thiết). Vậy suy ra $a,\ b,\ c > 0$.

Bài toán 3.13. Với $0 < a,\ b,\ c < 1$, chứng minh trong ba bất đẳng thức
$a(1-b) > \dfrac{1}{4},\ b(1-c) > \dfrac{1}{4},\ c(1-a) > \dfrac{1}{4}$ có ít nhất một bất đẳng thức sai.

Lời giải. Giả sử cả ba bất đẳng thức đều đúng.
Suy ra $abc(1-a)(1-b)(1-c) > \dfrac{1}{64}\ \ (*)$
Mặt khác ta có $a(1-a) \le \dfrac{1}{4},\ b(1-b) \le \dfrac{1}{4},\ c(1-c) \le \dfrac{1}{4}$, nhân vế với vế các bất đẳng thức trên ta thu được

$$abc(1-a)(1-b)(1-c) \le \frac{1}{64}\ \ (**)$$

Từ (*) và (**) suy ra mâu thuẫn, bài toán được chứng minh.

Bài toán 3.14. Với $0 < a,\ b,\ c < \dfrac{1}{2}$, chứng minh rằng trong ba bất đẳng thức sau $a^2(1-2b) > \dfrac{1}{27}$, $b^2(1-2c) > \dfrac{1}{27}$, $c^2(1-2a) > \dfrac{1}{27}$, có ít nhất một bất đẳng thức sai.

Lời giải. Giả sử cả ba bất đẳng thức trên đều đúng, suy ra

$$a^2b^2c^2(1-2a)(1-2b)(1-2c) > \left(\frac{1}{27}\right)^3.$$

Mặt khác, với điều kiện $0 < a,\ b,\ c < \dfrac{1}{2}$.
Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta lại có

$$a^2b^2c^2(1-2a)(1-2b)(1-2c) \leq \left(\frac{1}{27}\right)^3,$$

điều này suy ra mâu thuẫn. Vậy suy ra điều phải chứng minh.