CÁC SỐ CÓ DẠNG ĐẶC BIỆT TRONG HỆ THẬP PHÂN

Nguyễn Việt Hải (_Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ_)

Giá trị của một số viết trong hệ thập phân có mối liên hệ với giá trị của chữ số và cơ số 10. Người ta thường xét xem một số viết trong hệ thập phân có là số nguyên tố không, hay là hợp số (có ước là số nào) ? , có là số chính phương hay là số lũy thừa ? và lúc đó mối liên hệ của số đó với các chữ số của nó và cơ số 10 như thế nào ?

Nhận xét sơ bộ :

- Một số nguyên tố (khác 2, 5) viết trong hệ thập phân chỉ có thể tận cùng bởi một trong các chữ số 1, 3, 7, 9 (nếu trái lại thì số đó là bội của 2 hoặc 5). .
- Tổng các chữ số của một số nguyên tố lớn hơn 3 không thể là bội của 3 (nếu trái lại thì số đó là bội của 3).

Do khó tìm ra mối liên hệ tổng quát giữa số nguyên tố với các chữ số của nó trong hệ thập phân nên người ta đi xét những trường hợp riêng.

A. Số được viết bởi cùng một chữ số. Số repdigit và số repunit

Định nghĩa. Số viết trong hệ TP gồm toàn chữ số 1 được gọi là số *repunit* .

Số được viết trong hệ TP bởi cùng một chữ số gọi là số *repdigit*. Số *repdigit* viết trong hệ TP bởi n chữ số a được kí hiệu là $R(a, n)$. Như vậy số *repunit* được kí hiệu là $R_n = R(1, n)$.

Repdigit được ghép bởi hai từ: *repeated* (được lặp lại) và *digit* (chữ số). *Repunit* được ghép bởi hai từ: *repeated* (được lặp lại) và *unit* (đơn vị).

Nhà toán học *A.H.Beiler* là người đầu tiên đặt tên và nghiên cứu *số nguyên tố repunit*.

✪ **Bài toán 1.** *Chứng minh rằng một số nguyên tố được viết bởi chỉ các chữ số 1 trong hệ thập phân thì số các chữ số của nó phải là số nguyên tố.*

LG. Giả sử số nguyên tố p viết trong hệ TP gồm s chữ số 1 thì $9p = 10^s – 1$. Nếu $s = m.n$ là hợp số với $2 \le m \le n < s$ thì ta có $9p = 10^s – 1 = (10^m)^n – 1 =$
$(10^m – 1)(10^{mn-m} +…+ 10^m + 1)$. Vì số $10^m – 1 = 9k$ với $k > 1$ thì số
$p = k(10^{mn-m} +…+ 10^m + 1)$ là hợp số, trái giả thiết. Vậy số s phải là số NT.❒

✪ **Bài toán 2.** *Cho số nguyên tố p lớn hơn 5. Chứng minh rằng* :

a) *Số m được viết bởi p chữ số 1 trong hệ thập phân thì m không chia hết cho p, hay là R_p không chia hết cho p .*

b) *Số n được viết bởi $p – 1$ chữ số 1 trong hệ thập phân thì n chia hết cho p, hay là R_{p-1} chia hết cho p .*

LG. Từ giả thiết với $(p, 10) = 1$ thì p là ước của $10(10^{p-1} – 1) = 10^p – 10$.

a) Theo giả thiết $9m = 10^p – 1 = 10^p – 10 + 9$. Từ đó nếu p là ước của m thì p là ước của 9, trái với điều kiện $p > 5$. Khi $p = 3$ thì $R_3 = 111 = 3.37$.

b) Do $(p, 9) = 1$ thì $9p$ là ước của $10^{p-1} – 1$ nên p là ước của số viết bởi $p – 1$ chữ số 1.❒

✪ **Bài toán 3.** *Chứng minh rằng các số repunit có những tính chất sau* **:**

a) R_{2n} *chia hết cho* 11, R_{3n} *chia hết cho* 3.37 = 111, R_{4n} *chia hết cho* 101, R_{5n} *chia hết cho* 41.271, R_{6n} *chia hết cho* 7.13 = 91, R_{7n} *chia hết cho* 239.4649 , R_{8n} *chia hết cho* 73.137 ,….

b) $9R_n + 1 = 10^n$.

c) $R_{n+1} = 10R_n + 1 = 11R_n – 10R_{n-1} = R_n + 10^n$.

d) $(R_n , R_{n+1}) = 1$.

e) $R_{n+m} = 10^m R_n + R_m$, *hay là* $R_k = 10^{k-n} R_n + R_{k-n}$ *với* $k \ge n + 1$.

Nói riêng, $R_{2n} = 10^n R_n + R_n = R_n(10^n + 1)$.

Tổng quát có $R_{mn} = R_n(1 + 10^n + 10^{2n} +…+ 10^{(m-1)n})$, *suy ra* R_{mn} *chia hết cho* R_n .

g) *Nếu số m không là bội của 2, của 5 thì tồn tại số repunit R_n chia hết cho m.*
h) *Mỗi số nguyên dương a biểu diễn được trong dạng $a = c_1R_1 + c_2R_2 + c_3R_3 + \ldots + c_nR_n$*,
trong đó $0 \le c_i \le 9$, hay là $a = R(c_1,1) + R(c_2,2) + \ldots + R(c_n,n)$.
CM. a) Sử dụng tiêu chuẩn chia hết trong hệ TP.
b) Do $9R_n = 10^n - 1$.
c) Có $R_{n+1} = 10R_n + 1 = 11R_n - R_n + 1 = 11R_n - 10R_{n-1}$ và $10R_n + 1 = R_n + 9R_n + 1 = R_n + 10^n - 1 + 1 = R_n + 10^n$.
d) Ta có $(R_n, R_{n+1}) = (R_n, 10R_n + 1) = (R_n, 1) = 1$.
e) $R_{n+m} = 10^mR_n + R_m$.
Ta có $R_{mn} = R_n + 10^nR_n + 10^{2n}R_n + \ldots + 10^{(m-1)n}R_n = R_n(1 + 10^n + 10^{2n} + \ldots + 10^{(m-1)n})$
g) Xét dãy $R_1 = 1$, $R_2 = 11$, $R_3, \ldots, R_{m+1}$. Nếu trong dãy này có R_n chia hết cho m thì CM xong. Nếu trong dãy này bất kì R_n chia hết cho m đều có dư khác 0 thì tồn tại ít nhất hai số có cùng số dư, chẳng hạn là R_n và R_k với $1 \le n < k \le n + 1$ theo nguyên lí *Dirichlet*, lúc đó hiệu $R_n - R_k = 10^{k-n}R_{k-n}$ chia hết cho m, mà $(m, 10) = 1$ nên R_{k-n} chia hết cho m.
h) Với mỗi số nguyên dương $a = \overline{a_na_{n-1}\ldots a_2a_1}$ với $a_n > 0$, có n chữ số ta chọn số a_nR_n lớn nhất sao cho $a_nR_n \le a$. Cụ thể như sau. Nếu $a = a_nR_n$ thì CM xong. Nếu $a_n < a_{n-1}$ hoặc $a_n = a_{n-1} = \ldots = a_j < a_{j-1}$ thì chọn $c_n = a_n$, nếu $a_n > a_{n-1}$ hoặc $a_n = a_{n-1} = \ldots = a_j > a_{j-1}$ thì chọn $c_n = a_n - 1$ với $a_n \ge 1$. Sau khi chọn c_n như trên ta chuyển về chọn c_{n-1} của số $a - a_nR_n > 0$ mà $a - a_nR_n$ có ít hơn n chữ số, tiếp tục như thế đến khi chọn c_1.❒
✪ **Bài toán 4.** *Chứng minh rằng các số repunit có những tính chất sau* **:**
a) $R_{n+1}R_m = R_{n+m} + 10R_nR_{m-1}$ **;**
b) $R_{n+1}R_{n+m} - R_nR_{n+m+1} = 10^nR_m$;
c) $R_{n+m}^2 = 10^mR_n^2 + R_{2n+m}R_m$, *hay là* $R_k^2 = 10^{k-n}R_n^2 + R_{k+n}R_{k-n}$ *với* $m + n = k$;
d) $R_{n+1}^2 = 10^n + R_{n+2}R_n = 10R_n^2 + R_{2n+1} = 100R_{n-1}^2 + 11R_{2n}$;
e) $R_{n+1}^2 = R_{2n+1} + 10R_{2n-1} + 10^2R_{2n-3} + 10^3R_{2n-5} + \ldots + 10^{n-1}R_3 + 10^n$;
LG. Sử dụng **BT 3.** a) Ta có $R_{n+1}R_m - R_{n+m} = R_{n+1}R_m - (10^mR_n + R_m) = R_m(R_{n+1} - 1) - 10^mR_n = 10R_nR_m - 10^mR_n = 10R_n(R_m - 10^{m-1}) = 10R_nR_{m-1}$.
b) $R_{n+1}R_{n+m} - R_nR_{n+m+1} = R_{n+1}(10^mR_n + R_m) - R_n(10^mR_{n+1} + R_m) = R_m(R_{n+1} - R_n) = 10^nR_m$.
c) $R_{n+m}^2 = (10^nR_m + R_n)^2 = 10^{2n}R_m^2 + 2.10^nR_mR_n + R_n^2 = 10^nR_m^2 + 10^n(10^n - 1)R_m^2 + 2.10^nR_mR_n + R_n^2 = 10^nR_m^2 + 10^n.9R_nR_m^2 + 2.10^nR_mR_n + R_n^2$ (*).
Biến đổi tiếp: $10^n.9R_nR_m^2 + 2.10^nR_mR_n + R_n^2 = 10^nR_mR_n(9R_m + 2) + R_n^2 = 10^nR_mR_n(10^m + 1) + R_n^2 = 10^nR_n(10^mR_m + R_m) + R_n^2 = 10^nR_nR_{2m} + R_n^2 = R_n(10^nR_{2m} + R_n) = R_nR_{n+2m}$ theo **BT 3.c**. Thay vào (*) được $R_{n+m}^2 = 10^nR_m^2 + R_nR_{n+2m} = 10^{k-m}R_m^2 + R_{k+m}R_{k-m}$.
d) Trong c) cho $m = 1$ được $R_{n+1}^2 = 10R_n^2 + R_{2n+1} = 10(10R_{n-1}^2 + R_{2n-1}R_1) + 11R_{2n} - 10R_{2n-1} = 100R_{n-1}^2 + 11R_{2n}$.
e) Trong c) cho $m = 1$ được $R_{n+1}^2 = 10R_n^2 + R_{2n+1} = R_{2n+1} + 10(10R_{n-1}^2 + R_{2n-1}) = R_{2n+1} + 10R_{2n-1} + 10^2R_{n-1}^2 = \ldots = R_{2n+1} + 10R_{2n-1} + 10^2R_{2n-3} + \ldots + 10^{n-1}R_3 + 10^n$.❒
Chú ý. Từ công thức $R_{n+1} = 11R_n - 10R_{n-1}$ với bất kì số $n \ge 2$, trong đó $R_1 = 1$, $R_2 = 11$, ta thấy dãy số R_n là trường hợp riêng của dãy số $U_{n+1} = aR_n - bR_{n-1}$ với bất kì số $n \ge 2$, trong đó U_1 và U_2 cho trước, nên có thể rút ra nhiều hệ thức của R_n từ các hệ thức của U_n có trong Chuyên đề 2**: §1**. **Dãy số với số hạng là tổng các số nguyên**.
❖ **Thí dụ.** 1) 3578 = 3.1111 + 245 = 3.1111 + 2.111 + 23 = 3.1111 + 2.111 + 2.11 + 1 = 3333 + 222 + 22 + 1.
2) 78532 = 7.11111 + 755 = 7.11111 + 6.111 + 89 = 7.11111 + 6.111 + 8.11 + 9 = 77777 + 666 + 88 + 9.
3) $10^3R_2^2 + R_7R_3 = 11^2.1000 + 111.1111111 = 121000 + 123333321 = 123454321 = R_5^2 = 11111^2$.

4) $R_4^2 = R_7 + 10R_5 + 100R_3 + 1000 = 1111111 + 111110 + 11100 + 1000 = 1234321 = 1111^2$.

❄ ***Ghi chú.***

⊗ Đặt R_p là số được viết trong hệ TP gồm p chữ số 1 với p là số NT thì R_p có thể là số NT hoặc là hợp số. Chẳng hạn, số 11 là số NT, số $R_3 = 111 = 3.37$ là hợp số, số R_p là số được gồm 641 chữ số 1 có ước số là 1283.

Với $p < 10000$ thì đến năm 2010 ta mới biết 9 số *nguyên tố repunit* R_p khi p bằng 2, 19, 23, 317, 1031, 49081, 86453, 109297, 270343.

Các *số nguyên tố repunit* được tìm ra gần đây tương ứng với các số nguyên tố (Wikipedia. *repunit*) $p = 1031$ (1985 bởi *H.C. Williams* và *H.Dubner*), $p = 49081$ (năm 1999 bởi *H.Dubner*), $p = 86453$ (năm 2000 bởi *Lew Baxter*), $p = 109297$ (năm 2007 bởi *H.Dubner và Paul Bourdelais*), $p = 270343$ (tháng 12 năm 2010 bởi *H.Dubner và Robert Price*).

⊗ Đã biết rằng khi p là số nguyên tố khác 19, 23, 317, 1031 thì các số R_p là các hợp số với $2 < p < 20000$. Chẳng hạn:

$R_3 = 3.37$, $R_5 = 41.271$, $R_7 = 239.4649$, $R_{11} = 21649.513239$, $R_{13} = 53.79.265371653$, $R_{17} = 2071723.5363222357$, $R_{29} = 3191.16763.43037.\ 62003.77843839397$.

Nếu R_p có ước số nhỏ nhất là d, ta kí hiệu là $R_p((d))$ với $29 < p < 100$:

$R_{31}((2791))$, $R_{37}((2028119))$, $R_{41}((83))$, $R_{43}((173))$, $R_{47}((35121409))$, $R_{53}((107))$, $R_{59}((2559647034361))$, $R_{61}((733.4637))$, $R_{67}((493121))$, R_{71} có ước số gồm 30 chữ số thập phân, $R_{73}((12171337159))$, $R_{79}((317))$, $R_{83}((3367147378267))$, $R_{89}((497867))$, $R_{97}((12004721))$.

⊗ Ta biết $R(6, n)^2 = R(4, n).\ R(9, n)$ và $R(3, n)^3 + R(4, n)^3 + R(5, n)^3 = R(6, n)^3$.

⟡ Ta không biết có vô hạn chăng các số nguyên tố trong dãy số R_p được viết bởi chỉ các chữ số 1: 11; 111; 1111; 11111;… ([2] tr.117).

B. Số palindrome

Định nghĩa. Cho số ND $a = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ với $a_n > 0$ (có thể $a_0 = 0$), ta gọi số viết ngược của số a là số $b = \overline{a_0 a_1 \ldots a_{n-1} a_n}$, tức là khi viết các chữ số của số a theo thứ tự ngược lại thì được số b. Số ND a được gọi là số *palindrome* (*palindromic number*, số xuôi ngược, số đối xứng) nếu số $a = b$ với b là số viết ngược của số a, tức là số *palindrome* có dạng

$a = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ với $a_0 = a_n > 0$, $a_s = a_{n-s}$ với s bằng $0, 1, \ldots, n$.

Chẳng hạn, các số sau là số *palindrome* : 0; 3; 22; 121; 34543; 345543;…

Số repunit và repdigit là các số *palindrome* đặc biệt.

Người ta cũng sử dụng *palindrome* để chỉ một chữ viết xuôi hoặc viết ngược đều như nhau, chẳng hạn như chữ MOM, NON, TIT, CAC, CÔC, PEP,… Chữ *palindrome* lần đầu tiên được nhà biên kịch *Ben Jonson* dùng vào thế kỉ XVII khi ghép hai từ gốc Hy Lạp là *palin* (ngược lại) và *dromos* (di chuyển, chạy, chảy).

✪ **Bài toán 5.** *Chứng minh rằng các số palindrome có những tính chất sau* **:**

a) *Mỗi số palindrome gồm số chẵn chữ số thì chia hết cho 11 nên nó là hợp số.*

b) *Số* $(10^n + 1)^2 = 10\ldots020\ldots01$ *và số* $(2.10^n + 2)^2 = 40\ldots080\ldots04$ *đều là số palindrome chính phương có* $2n + 1$ *chữ số, suy ra tồn tại vô hạn số palindrome chính phương gồm một số lẻ chữ số. Số* $(10^{2n} + 10^n + 1)^2 = 10\ldots020\ldots030\ldots20\ldots01$ *là số palindrome chính phương có* $4n + 1$ *chữ số.*

c) *Với* $a + b \le 9$ *thì tổng* $R(a, n) + R(b, n) = R(a + b, n)$ *là số palindrome .*

d) *Với* $n \le m$ *và* $n \le 9$ *thì tích* $R_m R_n$ *là số palindrome gồm* $m + n - 1$ *chữ số dạng* $\overline{123\ldots(n-1)n\ldots n(n-1)\ldots321}$*, trong đó số các chữ số* n *ở giữa là* $m - n + 1$ *chữ số.*

Nói riêng, với $n \le 9$ *thì* $R_n^2 = \overline{123\ldots(n-1)n(n-1)\ldots321}$ *là số palindrome chính phương.*

$R_{10}^2 = 1234567890109876543 21$ *là số palindrome chính phương.*

LG. a) Với số palindrome $A = \overline{a_{2n}a_{2n-1}...a_2a_1}$ ta thấy $B = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{s+1}a_s + \ldots + a_{2s-1} - a_{2n} = 0$ vì $a_{s+1} = a_{n-s}$ với s bằng $0, 1, \ldots, n-1$, do đó số B chia hết cho 11 nên số A chia hết cho 11**.**
b) Số $(10^n + 1)^2 = 10^{2n} + 2.10^n + 1 = 10\ldots020\ldots01$ và số $(2.10^n + 2)^2 = 4.10^{2n} + 8.10^n + 4 = 40\ldots080\ldots04$ đều là số palindrome chính phương, trong đó có $n-1$ chữ số 0 ở giữa chữ số 1 và chữ số 2, ở giữa chữ số 4 và chữ số 8.
Số $(10^{2n} + 10^n + 1)^2 = 10^{4n} + 2.10^{3n} + 3.10^{2n} + 2.10^n + 1 = 10\ldots020\ldots030\ldots20\ldots01$ là số palindrome chính phương có $4n+1$ chữ số, trong đó có $n-1$ chữ số 0 ở giữa chữ số 1 và chữ số 2, ở giữa chữ số 2 và chữ số 3.
c) Ta viết tích $R_7R_3 = 123333321$ trong dạng phép tính nhân như sau.

```
         1 1 1 1 1 1 1                  Rm
     X           1 1 1            X     Rn
       -----------------             ----------
          1 1 1 1 1 1 1                 Rm
 +      1 1 1 1 1 1 1 0          +    .......
      1 1 1 1 1 1 1 0 0               Rm .10^(n-1)
     ------------------        ---------------------------------
      1 2 3 3 3 3 3 2 1        123…(n-1) n…n (n-1)…321
```

Khi viết tích $R_m R_n$ trong dạng như trên ta thấy phép cộng có n dòng và do $n \le 9$ nên ở dòng cuối cùng, tức là kết quả của phép cộng này, có $m + n - 1$ chữ số, các chữ số từ đầu phải sang trái tăng dần từ 1, 2,… đến n, còn các chữ số từ đầu trái sang phải tăng dần từ 1, 2,… đến n, số các chữ số n ở giữa là $m + n - 1 - (2n - 2) = m - n + 1$ chữ số.❒

✪ **Bài toán 6.** *Chứng minh rằng*:
Số các số palindrome không lớn hơn 10^{2n} *bằng* $2.10^n - 1$;
Số các số palindrome không lớn hơn 10^{2n-1} *bằng* $10^n + 10^{n-1} - 1$.
LG. Các số palindrome gồm một, hai, ba, bốn, năm, sáu chữ số tương ứng có dạng b, $\overline{aa}$, $\overline{aba}$, $\overline{abba}$, $\overline{abcba}$, $\overline{abccba}$ với $1 \le a \le 9$, $0 \le b \le 9$, $0 \le c \le 9$.
Do chữ số a ở đầu bên phải và ở đầu bên trái lấy 9 giá trị, các số nằm giữa lấy 10 giá trị nên số các số palindrome gồm $2n$ chữ số bằng $9.\ 10^{n-1}$ với $n \ge 1$, số các số palindrome gồm $2n - 1$ chữ số bằng $9.\ 10^n$ với $n \ge 1$. Từ đó chứng minh bằng quy nạp ta tìm được số các số palindrome không lớn hơn 10^{2n} và không lớn hơn 10^{2n-1}.❒

✪ **Bài toán 7.** *Chứng minh rằng số nguyên tố lớn hơn* 11 *viết trong hệ thập phân có chữ số tận cùng bên trái và chữ số tận cùng bên phải là chữ số* 1 *còn mọi chữ số khác là chữ số* 0 *thì nó có dạng* $10^{2^n} + 1$.
LG. Giả sử số ND p viết trong hệ TP có dạng $p = 10^s + 1$.
• Nếu s là số lẻ thì $p = 10^s + 1$ chia hết cho 11 khi áp dụng *Dấu hiệu chia hết cho* 11, lúc đó p là hợp số khi $s > 1$.
• Nếu $s = 2^n m$ với m là số lẻ lớn hơn 1 và n là số ND thì ta thấy $p = (10^{2^n})^m + 1$ có ước thực sự là $10^{2^n} + 1 > 1$, do đó nếu p là số NT thì số mũ s chỉ có thể là tích của các số 2.❒

✪ **Bài toán 8.** *Tìm tất cả các số nguyên tố* n *có chữ số đầu trái và đầu phải đều bằng* 1 *khi viết trong hệ thập phân với* $101 \le n \le 191$ (*số palindrome nguyên tố*).
LG. Phương pháp *Буняковский*. Gọi m là số có ba chữ số với x là chữ số nằm xen giữa hai chữ số 1. Nếu số $m < 191$ là hợp số thì nó có ước số NT p, lúc đó ta cần giải phương trình nghiệm nguyên hai ẩn x, k dạng $101 + 10x = m$ với $0 \le x \le 9$ hay là
$pk - 10x = 101$ (1)
Ta có $(p, 10) = 1$. Gọi x_0 là nghiệm ND nhỏ nhất của PT $pk - 10x = 1$ (2)

thì PT (1) có nghiệm tổng quát là $x = 101x_0 - pt$ với số nguyên t tùy ý theo **ĐL I.10.** Từ $0 \le x \le 9$ suy ra $101x_0 - 9 \le pt \le 101x_0$ (3)
Cho số NT p lần lượt bằng 3, 7, 11, 13 vì $p^2 \le 191$ theo **ĐL III.1,** sẽ tính được các nghiệm x_0, k_0 và x.

• Với $p = 3$ thì PT (2) có dạng $3k - 10x = 1$ và có nghiệm số ND nhỏ nhất là $x_0 = 2$, nên $k_0 = 7$. Từ đó $x = 202 - 3t$. Từ (3) tính được $65 \le t \le 67$, suy ra x bằng 7, 4, 1, tức là có hợp số m bằng 171, 141, 111 (chúng đều có ước số là 3).

• Tương tự, với $p = 7$ thì PT (2) có dạng $7k - 10x = 1$. Tính được $x_0 = 2$ và hợp số $m = 161 = 7.23$.

• Với $p = 11$ thì PT (2) có dạng $11k - 10x = 1$. Tính được $x_0 = 1$ và hợp số $m = 121 = 11.11$.

• Với $p = 13$ thì không có hợp số nào.

Khi loại trừ các hợp số vừa nêu, ta tìm được các số nguyên tố thỏa mãn đề bài là 101, 131, 151, 181, 191.❒

✪ **Bài toán 9.** *Tìm mọi số nguyên tố có ít hơn năm chữ số mà không thay đổi giá trị khi viết các chữ số của nó theo thứ tự ngược lại* (*số palindrome nguyên tố*).

LG. Theo tính chất c) của số palindrome nguyên tố thì số chữ số của nó là số lẻ (trừ số 11) nên ta chỉ xét các số palindrome nguyên tố có ba chữ số.

Số có ba chữ số dạng $\overline{aba}$ là số nguyên tố thì chữ số tận cùng chỉ có thể là 1, 3, 7, 9. Một hợp số có ba chữ số thì nó có ước số nguyên tố $p < \sqrt{1000} < 32$. Loại bỏ mọi số có tổng các chữ số là bội của 3. Áp dụng kết quả của **Bài toán 3** ta loại bỏ mọi số có $2a - b$ chia hết cho 11; loại bỏ mọi số có $5a - 2b$ chia hết cho 7; loại bỏ mọi số có $a + b$ chia hết cho 13; loại bỏ mọi số có $9a - 5b$ chia hết cho 17; loại bỏ mọi số có $5a + 2b$ chia hết cho 19; loại bỏ mọi số có $4a + 7b$ chia hết cho 23; loại bỏ mọi số có $10a + 3b$ chia hết cho 29; loại bỏ mọi số có $10a - 3b$ chia hết cho 31. Các số có ba chữ số thỏa mãn đề bài là 101, 131, 151, 181, 191, 313, 353, 373, 383, 727, 757, 787, 797, 919, 929 .❒

✪ **Bài toán 10.** *Tìm số chính phương là số palindrome* (*số xuôi ngược*) *có ít hơn sáu chữ số.*

LG. . • Số xuôi ngược CP có một chữ số là 1, 4, 9.

• Số xuôi ngược gồm hai chữ số có dạng $\overline{aa} = 11a$ nhưng a không chia hết cho 11, do đó số $\overline{aa}$ không là số CP.

• Số xuôi ngược gồm ba chữ số có dạng $\overline{aba} = n^2$ thì a chỉ có thể là 1, 4, 5, 6, 9. Với $a = 1$ có $100 \le n^2 < 200$ nên $10 < n < 15$ mà n chỉ tận cùng bởi 1 hoặc 9 , suy ra $n = 11$. Tiếp tục xét như thế có $22^2 = 484$, $26^2 = 676$.

•Số xuôi ngược gồm bốn chữ số có dạng $\overline{abba} = n^2$ thì $n^2 = 11(91b + 10a)$ nên n là bội của 11. Đặt $n = 11m$ thì có $11m^2 = 91b + 10a = 121b - 11(3a - b) + 3a - b$, suy ra $3a - b$ là bội của 11. Do $-9 \le 3a - b \le 27$ nên chỉ xảy ra $3a - b$ bằng 0, 11, 22. Với $3a = b$ thay vào đẳng thức trên có $11m^2 = 121a$ nên $m^2 = 11a$, mà $a < 11$, không xảy ra.
Với $3a = b + 11$ thay vào đẳng thức trên có $m^2 = 11a - 10 \le 99 - 10 = 89$, suy ra $m < 10$. Mặt khác $11a - 11 = m^2 - 1$ hay là $11(a - 1) = (m - 1)(m + 1)$, mà $m < 10$ nên 11 không thể là ước của $m - 1$ hoặc của $m + 1$.
Với $3a = b + 22$ thay vào đẳng thức trên có $m^2 = 11(a - 2) + 2$, hơn nữa $m^2 < 99 - 20 = 79$, suy ra $m < 9$. Mặt khác $m^2 - 2 = 11(a - 2)$ phải chia hết cho 11, điều này không xảy ra.

• Số xuôi ngược gồm năm chữ số có dạng $\overline{abcba} = n^2$ thì a chỉ có thể là 1, 4, 5, 6, 9. Với $a = 1$ có $10000 \le n^2 < 20000$ nên $100 < n < 142$ mà n chỉ tận cùng bởi 1 hoặc 9 , suy ra n có thể là 101, 109, 111, 119, 121, 129, 131, 139, 141. Kiểm tra các số trên có nghiệm là $101^2 = 10201$, $111^2 = 12321$, $121^2 = 14641$.

Với $a = 4$ có $40000 \le n^2 < 50000$ nên $200 < n < 224$ mà n chỉ tận cùng bởi 2 hoặc 8, suy ra n có thể là 202, 208, 212, 218, 222. Kiểm tra các số trên có nghiệm là $202^2 = 40804$, $212^2 = 44944$.
Với $a = 5$ có $50000 \le n^2 < 60000$ nên $224 < n < 245$ mà n chỉ tận cùng bởi 5, suy ra n có thể là 225, 235. Kiểm tra các số trên không có nghiệm.
Với $a = 6$ có $60000 \le n^2 < 70000$ nên $244 < n < 265$ mà n chỉ tận cùng bởi 4 hoặc 6, suy ra n có thể là 246, 254, 256, 264. Kiểm tra các số trên có nghiệm là $264^2 = 69696$.
Với $a = 9$ có $90000 \le n^2 < 100000$ nên $300 < n < 317$ mà n chỉ tận cùng bởi 3 hoặc 7, suy ra n có thể là 303, 307, 313. Kiểm tra các số trên có nghiệm là $307^2 = 94249$.❒

✪ **Bài toán 11.** *Lấy một số ND gồm hai chữ số bất kì, đem cộng số đó với số viết ngược của nó, lại cộng số nhận được với số viết ngược của nó, cứ lấy tổng liên tiếp như thế, chứng minh rằng đến lúc nào đó sẽ nhận số palindrome.*

LG. Gọi số ban đầu là $a = \overline{cd}$ thì số viết ngược của nó là $b = \overline{dc}$.
- Với $c + d \le 9$ thì tổng $a + b$ là số gồm hai chữ số giống nhau là $c + d$ nên $a + b$ là số palindrome.
- Với $c + d = 10$ thì tổng $a + b = 110$, lấy tổng lần nữa được $110 + 011 = 121$ là số palindrome.
- Với $c + d = 10 + e$ với $1 \le e \le 8$ thì tổng $\overline{cd} + \overline{dc} = \overline{1(e+1)e}$. Xét các trường hợp sau.
• Nếu $e = 1$ thì tổng đó bằng 121 (đúng).
• Nếu $2 \le e \le 3$ thì $2(e+1) \le 9$ nên $\overline{1(e+1)e} + \overline{e(e+1)1} = \overline{(e+1)(2e+2)(e+1)}$ (đúng).
• Nếu $4 \le e \le 6$ và $e = 8$ thì tính theo sơ đồ sau, trong đó mũi tên chỉ ra việc lấy tổng của số đứng trước mũi tên với số viết ngược của nó:
a) 154 → 605 → 1111 (đúng).
b) 165 → 726 → 1353 → 4884 (đúng).
c) 176 → 847 → 1595 → 7546 → 14003 → 44044 (đúng).
d) 198 → 1089 → 10170 → 17271 (đúng).
• Nếu $e = 7$ ta có số 187, cần thực hiện sau 23 lần lấy tổng thì được số palindrome là 8813200023188.❒

❈ ***Ghi chú.***
⊗ Số palindrome nguyên tố nhỏ nhất có đủ 10 chữ số là 1023456987896543201.
⊗ Xem số palindrome chính phương có một số lẻ chữ số ở **Bài toán 5** và số palindrome chính phương có ít hơn 6 chữ số ở **Bài toán 10.** Một số các số palindrome chính phương nhiều hơn 5 chữ số là : $836^2 = 698896$, $1001^2 = 1002001$, $2002^2 = 4008004$, $2285^2 = 5221225$, $2636^2 = 6948496$.
Người ta *chỉ* tìm được không nhiều các số palindrome chính phương có một số chẵn chữ số như : $836^2 = 698896$, $798644^2 = 637832238736$, $64030648^2 = 4099923883299904$, $83163115486^2 = 6916103777337773016196$ gồm 22 chữ số và $4040997647536659 81^2$ = 163296619873968186681869378916692361 gồm 36 chữ số.
⊗ Kí hiệu số các số palindrome nguyên tố nhỏ hơn 10^r là $P(10^r)$, người ta đã tìm được $P(10) = 4$, $P(10^2) = 5$, $P(10^3) = 20$, $P(10^5) = 113$, $P(10^7) = 781$, $P(10^9) = 5953$.
◈ *Giả thuyết về tạo số palindrome*: Lấy một số ND bất kì, đem cộng số đó với số viết ngược của nó, lại cộng số nhận được với số viết ngược của nó, cứ lấy tổng liên tiếp như thế đến lúc nào đó sẽ nhận số palindrome. Hiện nay chưa ai chứng minh được giả thuyết này với số đầu tiên nhiều hơn hai chữ số tùy ý .
1) Lấy số 3462 + 2643 = 6105, lấy 6105 + 5016 = 11121, lấy 11121 + 12111 = 23232 là số palindrome. Lấy số 1359 + 9531 = 10890, lấy 10890 + 09801 = 20691, lấy 20691 + 19602 = 40293, lấy 40293 + 39204 = 79497 là số palindrome.
2) Các số gồm ba chữ số dạng $\overline{acb}$, $\overline{acdb}$ với $a + b \le 9$, $c + d \le 9$ khi lấy tổng sau một bước sẽ được số palindrome.

3) Lấy số 89 + 98 = 187, lấy 187 + 781 = 968, lấy tổng như thế tất cả 24 lần sẽ được số palindrome là 8813200023188, nhưng với số 196 sau khi thực hiện 1000 bước vẫn chưa được số palindrome !

⊗ Năm 1996 các nhà toán học *M. Harminc* và *R. Sotak* đã chứng minh rằng:

Cấp số cộng các số nguyên dương $a_k = a_0 + kd$ *với* k *bằng* 0, 1, 2,… *chứa vô hạn số palindrome khi và chỉ khi số* a_0 *hoặc số* d *không chia hết cho* 10.

⊗ Ba số palindrome nguyên tố lớn nhất đã biết đến nay là:

Số $10^{474500} + 999.10^{237249} + 1$ gồm 474501 chữ số tp, số $10^{390636} + 999.10^{195317} + 1$ gồm 390637 chữ số tp và số $10^{362600} + 666.10^{181299} + 1$ gồm 362601 chữ số tp, do *Serge Batalov* tìm ra vào tháng 11 năm 2014.

⯑ Ta không biết có vô hạn chăng các số nguyên tố trong dãy số $T_n = 10^{2^n} + 1$ với n = 1, 2, 3, 4,…, nhưng biết $T_1 = 10^2 + 1 = 101$ là số NT, còn các số sau là hợp số:

$T_2 = 10^4 + 1 = 73.137$, $T_3 = 10^8 + 1 = 17.5882353$, $T_4 = 10^{16} + 1$ có ước số là 353, $T_5 = 10^{32} + 1$ có ước số là 19841, $T_6 = 10^{64} + 1$ có ước số là 1265011073, $T_7 = 10^{128} + 1$ có ước số là 257, $T_8 = 10^{256} + 1$ có ước số là 10753.