Một vài kỹ thuật giải hệ phương trình chứa thành phần đồng bậc

Nguyễn Thi Thu Hằng
THPT Lê Quý Đôn, Đống Đa, Hà Nội

1 Mở đầu

Trong chương trìnhToán THCS hệ phương trình là một trong các chủ đề khó và xuất hiện thường xuyên ở các đề thi học sinh giỏi và thi tuyển vào lớp 10 chuyên. Khi dạy chủ đề này các thầy cô thường dạy học sinh nắm chắc phương pháp giải các dạng cơ bản, đó là:

1. Hệ phương trình gồm một phương trình bậc nhất và một phương trình bậc hai.
2. Hệ phương trình đối xứng loại 1.
3. Hệ phương trình đối xứng loại 2
4. Hệ phương trình đẳng cấp.

Nhưng trong các đề thi thì các hệ phương trình đôi khi không được cho ở những dạng cơ bản nên khi giải hệ cần phải có những kỹ năng biến đổi khéo léo, dẫn dắt để quy bài toán từ lạ về quen. Sau đây tôi xin phép giới thiệu một kỹ thuật biến đổi nhỏ để đưa hệ phương trình về dạng hệ phương trình đẳng cấp.Chúng ta còn gọi chung là phương pháp đồng bậc.

2 Nội dung

2.1 Hệ cơ bản

Dạng hệ đẳng cấp: $\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = d \\ a^{'}x^2 + b^{'}xy + c^{'}y^2 = d^{'} \end{cases}$

Cách giải.

- Khi $d \neq 0$, ta đưa về phương trình thuần nhất bậc hai đối với 2 ẩn x và y.

- Ta thấy $(x, y) = (0, 0)$ không là nghiệm nên có thể ta đặt $y = kx$. Thay vào phương trình thuần nhất nhận được ở bước 1, ta thu được phương trình bậc 2 ẩn k. Tìm k và suy ra nghiệm $(x; y)$.

Ví dụ 2.1 (Đề thi học sinh giỏi lớp 9 tỉnh Phú Thọ, Năm học 2011 – 2012)**.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 1 \\ x^2 + xy = 2 \end{cases}$

Nhận xét. Ta thấy đây là dạng hệ phương trình đẳng cấp đã xét ở trên.

Lời giải. Từ hệ, ta có phương trình

$$xy + x^2 = 2(2x^2 - y^2) \Leftrightarrow (x-y)(3x+2y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x \\ y = -\frac{3}{2}x \end{array}\right. .$$

Thay $y = x$ vào phương trình thứ nhất của hệ, ta có $2x^2 - x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$, nên hệ phương trình có nghiệm $(x, y) = (1; 1), (x, y) = (-1; -1)$.

Thay $y = -\dfrac{3}{2}x$ vào phương trình thứ nhất của hệ, ta được $-\dfrac{3}{2}x^2 + x^2 = 2$, vô nghiệm.

2.2 Một vài hệ phương trình đưa được về hệ chứa biểu thức đồng bậc

Ví dụ 2.2 (Đề thi vào lớp 10 chuyên toán ĐHKHTN, ĐHQGHN, Năm học 2004- 2005)**.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - 6x^2y + 9xy^2 - 4y^3 = 0 & (1) \\ \sqrt{x-y} + \sqrt{x+y} = 2 & (2) \end{cases}$$

Nhận xét. Chưa nhìn thấy hệ chứa dạng đẳng cấp, nhưng vế trái của phương trình (1) là dạng đồng bậc.

Lời giải.

Dễ thấy $(x, y) = (0, 0)$ không là nghiệm. Đặt $y = kx$. Phương trình (1) trở thành

$$4k^3 - 9k^2 + 6k - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 1 \\ k = \dfrac{1}{4} \end{array}\right.$$

Với $k = 1 \Leftrightarrow y = x$, ta được nghiệm của hệ $(x, y) = (2; 2)$.

Với $k = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 4y = x$, ta được nghiệm của hệ $(x, y) = (32 - 8\sqrt{15}; 8 - 2\sqrt{15})$.

Ví dụ 2.3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+y)(x^2+y^2) = 15 & (1) \\ (x-y)(x^2-y^2) = 3 & (2) \end{cases}$

Nhận xét. Đây là hệ phương trình đẳng cấp bậc 3.

Lời giải. Nhân chéo vế với vế ta có $(x+y)(x^2+y^2) = 5(x-y)(x^2-y^2)$Vì $x + y \neq 0$nên $x^2 + y^2 - 5(x-y)^2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 10xy + 4y^2 = 0$. Đặt $y = kx$. Phương trình (1) trở thành :

$$2k^2 - 5k + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 2 \\ k = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

.) $k = 2 \Leftrightarrow y = 2x$. Thay vào phương trình (1) $(2x+x)(x^2+4x^2) = 15 \Leftrightarrow x = 1$Nghiệm của hệ (1;2).

.) $k = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2y = x$. Thay vào phương trình (1) $(2y+y)(y^2+4y^2) = 15 \Leftrightarrow y = 1$Nghiệm của hệ (2;1).

Ở ba ví dụ trên ta dễ dàng nhận ra dạng hệ phương trình đẳng cấp và đưa chúng về các phương trình thuần nhất đã có cách giải. Nhưng có một vài hệ ta phải có cái nhìn tinh tế hay có một chút biến đổi khéo léo để đưa được bài toán khó về một bài toán quen thuộc mà ta đã biết cách giải.

Ví dụ 2.4. Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y & (1) \\ x^2 - 3 = 3(y^2 + 1) & (2) \end{cases}$

Nhận xét. Chưa nhận ra dạng quen thuộc . Nếu quan sát phương trình (1) và chuyển $x^3; y^3$ về một vế , vế còn lại là biểu thức bậc 1 đối với x ; y để xuất hiện phương trình thuần nhất ta phải quan sát tiếp phương trình (2) và thế phương trình (2) vào phương trình (1) ta sẽ có phương trình thuần nhất bậc 3.

Lời giải. Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - y^3 = 8x + 2y & (1) \\ x^2 - 3y^2 = 6 & (2) \end{cases}$

Để xuất hiện phương trình thuần nhất bậc 3 ta nhân cả hai vế của phương trình (1) với 3 ta có $3x^3 - 3y^3 = 6(4x + y)$.Thế $6 = x^2 - 3y^2$ vào ta có phương trình thuần nhất $3x^3 - 3y^3 = (x^2 - 3y^2)(4x + y)$.

.) $x = 3y$. Thay vào phương trình (2) ta có $9y^2 - 3y^2 = 6 \Leftrightarrow y = \pm 1$. Nghiệm của hệ (3;1) (-3;-1).

.) $x = -4y$. Thay vào phương trình (2) ta có $16y^2 - 3y^2 = 6 \Leftrightarrow y = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{13}}$.

Nên hệ phương trình có nghiệm $(\dfrac{4\sqrt{6}}{\sqrt{13}}; -\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{13}}); (-\dfrac{4\sqrt{6}}{\sqrt{13}}; \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{13}})$.

Ví dụ 2.5. Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} 5x^2 - 3y = x - 3xy & (1) \\ x^3 - x^2 = y^2 - 3y^3 & (2) \end{cases}$

Nhận xét. Chưa nhận ra dạng quen thuộc . Lại biến đổi hệ chút ít. Suy nghĩ xem ta làm thế nào?

Lời giải. Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 3xy = x + 3y & (1) \\ x^3 + 3y^3 = y^2 + x^2 & (2) \end{cases}$

Đã thấy hệ phương trình ở dạng quen thuộc. Nhân chéo vế với vế ta có $(5x^2 + 3xy)(x^2 + y^2) = (x + 3y)(x^3 + 3y^3) \Leftrightarrow 4x^4 + 5x^2y^2 - 9y^4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y$. Thay vào phương trình (2)

Nghiệm của hệ (0;0); $(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2})$.

Ví dụ 2.6. Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} 2x(1 + \dfrac{1}{x^2 + y^2}) = 3 & (1) \\ 2y(1 - \dfrac{1}{x^2 + y^2}) = 1 & (2) \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $x \neq 0; y \neq 0$. Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{x^2 + y^2} = \dfrac{3}{2x} \\ 1 - \dfrac{1}{x^2 + y^2} = \dfrac{1}{2y} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{2x}+\dfrac{1}{2y}=2 & (1)\\ \dfrac{3}{2x}-\dfrac{1}{2y}=\dfrac{2}{x^2+y^2} & (2)\end{cases}$$

Nhân vế với vế ta có $\dfrac{9}{4x^2}-\dfrac{1}{4y^2}=\dfrac{4}{x^2+y^2} \Leftrightarrow x^4+8x^2y^2-9y^4=0 \Leftrightarrow x^2=y^2$ Thay $y^2=x^2$ vào phương trình (1): $2x(1+\dfrac{3}{2x^2})=3 \Leftrightarrow 2x+\dfrac{3}{x}=3 \Leftrightarrow x=\left\{1;\dfrac{1}{2}\right\}$.

Hệ phương trình có nghiệm là: (1;1) ; $(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$; (1;-1) ; $(\frac{1}{2};-\frac{1}{2})$.

Ví dụ 2.7. Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} \sqrt{x^3+y^6}(2+\dfrac{x^4}{x^3+5y^6})=\dfrac{22}{5}x^2 & (1)\\ \dfrac{2y^3}{x^4}-\dfrac{y^3}{x^3+5y^6}=\dfrac{9}{10x^2} & (2)\end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện $x^3+y^6\geq 0;\ x^3+5y^6\neq 0; x\neq 0$.Chia phương trình (2) cho $\dfrac{y^3}{x^4}$. Khi đó

$$\begin{cases} 2+\dfrac{x^4}{x^3+5y^6}=\dfrac{22x^2}{5\sqrt{x^3+y^6}}\\ 2-\dfrac{x^4}{x^3+5y^6}=\dfrac{9x^2}{10y^3}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2=\dfrac{11x^2}{5\sqrt{x^3+y^6}}+\dfrac{9x^2}{10y^3}\\ \dfrac{x^4}{x^3+5y^6}=\dfrac{11x^2}{5\sqrt{x^3+y^6}}-\dfrac{9x^2}{10y^3}\end{cases}$$

Nhân vế với vế ta có

$\dfrac{2x^4}{x^3+5y^6}=\dfrac{121x^4}{25(x^3+y^6)}-\dfrac{81x^4}{100y^6}$ .Vì $x\neq 0$nên ta sẽ có phương trình thuần nhất giữa biến x^3 và y^6 là $\dfrac{2}{x^3+5y^6}=\dfrac{121}{25(x^3+y^6)}-\dfrac{81}{100y^6}$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{1+5\frac{y^6}{x^3}}=\frac{121}{25(1+\frac{y^6}{x^3})}-\frac{81}{100\frac{y^6}{x^3}} \Leftrightarrow \frac{2}{1+5t}=\frac{121}{25(1+t)}-\frac{81}{100t} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{1}{15}\\ t=-\dfrac{81}{565}\ \text{(loại)}\end{array}\right.$$

$t=\dfrac{1}{15} \Leftrightarrow \dfrac{y^6}{x^3}=\dfrac{1}{15} \Leftrightarrow y^6=\dfrac{1}{15}x^3$. Thay vào phương trình (1): $\sqrt{x^3+\dfrac{y^6}{15}}(2+\dfrac{x^4}{x^3+\dfrac{x^3}{3}})=\dfrac{22x^2}{5} \Leftrightarrow \dfrac{4\sqrt{x}}{\sqrt{15}}(2+\dfrac{3x}{4})=\dfrac{22x}{5}$.

Bình phương khử căn ta giải được

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{4}{15} \\ x = \dfrac{80}{3} \end{array} \right.$. Hệ phương trình có nghiệm là: $(\frac{4}{15}; \pm\sqrt[6]{\frac{64}{50625}})$; $(\frac{80}{3}; \pm\sqrt[6]{\frac{102400}{81}})$.

Ví dụ 2.8. Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} 16x^2y^2 - 17y^2 = -1 & (1) \\ 4xy + 2x - 7y = -1 & (2) \end{cases}$

Nhận xét. Chưa nhận ra dạng quen thuộc . Làm sao đưa được về phương trình đồng bậc? Ta thấy ở hai phương trình có 4xy và $16x^2y^2$. Nếu biến đổi chút ít phương trình (2) và thế vào phương trình (1) ta sẽ thấy xuất hiện phương trình thuần nhất.

Lời giải. (2) $\Leftrightarrow 4xy + 1 = -2x + 7y$. Bình phương hai vế $16x^2y^2 + 8xy + 1 = 4x^2 - 28xy + 49y^2 \Leftrightarrow -1 + 17y^2 + 8xy + 1 = 4x^2 - 28xy + 49y^2$

$\Leftrightarrow 4(x^2 - 9xy + 8y^2) = 0$. Tới đây ta dễ dàng giải được.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(\frac{1}{4}; \frac{1}{4})$; $(1; 1)$

Ví dụ 2.9. Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 & (1) \\ (x+y)(4 - x^2y^2 - 2xy) = 2y^5 & (2) \end{cases}$

Nhận xét. Lại một kiểu biến đổi độc đáo nữa mới thấy xuất hiên được phương trình thuần nhất bậc 5. Thế phương trình (1) vào phương trình (2) để xuất hiện đồng bậc ta phải nhìn vào số 4 và số 2 ở phương trình này.

Lời giải. Thế $2 = x^2 + y^2; 4 = (x^2 + y^2)^2$vào phương trình (2).Ta có $(x+y)[(x^2+y^2)^2 - x^2y^2 - (x^2+y^2)xy] = 2y^5 \Leftrightarrow x^5 + y^5) = 2y^5 \Leftrightarrow x = y$. Vậy hệ phương trình có nghiệm $(-1; -1)$; $(1; 1)$

Ví dụ 2.10. Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} x^3 - xy^2 + 2000y = 0 & (1) \\ y^3 - yx^2 - 500x = 0 & (2) \end{cases}$

Nhận xét. Dễ dàng đưa được về hệ phương trình đẳng cấp. Nhưng ta biến đổi một chút để lời giải gọn hơn.

Lời giải. Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 - y^2) = -2000y \\ y(x^2 - y^2) = -500x \end{cases}$ Từ đó $500x^2(x^2 - y^2) = 2000y^2(x^2 - y^2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = -y \\ x = 2y \\ x = -2y \end{array} \right.$. Thay vào phương trình (1) hệ phương trình có nghiệm $(0; 0)$; $(-\frac{20\sqrt{10}}{\sqrt{3}}; 10\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}})$; $(\frac{20\sqrt{10}}{\sqrt{3}}; -10\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}})$

Ví dụ 2.11. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x^2 + 9)(x^2 + 9y) = 22(y-1)^2 & (1) \\ x^2 - 2 - 4y\sqrt{y+1} = 0 & (2) \end{cases}$

Nhận xét. Chưa nhìn thấy đúng dạng nhưng phương trình (1) là phương trình thuần nhất bậc 2 nếu ta khéo léo biến đổi bằng cách đặt ẩn phụ.

Lời giải. Điều kiện: $y \geq -1$. Đặt $x^2+9=a; y-1=b$. Phương trình (1) trở thành : $a(a+9b)=22b^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} a=-11b \\ a=2b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x^2=-11y+2 \\ x^2=2y-11 \end{array}\right.$ Thay vào phương trình (2) ta sẽ tìm được nghiệm.

Vậy nghệm của hệ là $(\sqrt{2};0)$ và $(-\sqrt{2};0)$.

Ví dụ 2.12. Giải hệ phương trình sau

$$\left\{\begin{array}{ll} (x-2y)(3x+8y+4\sqrt{x^2-4xy+4y^2-16})=-6 & (1) \\ (y-4x)(3y+2x+2\sqrt{x^2-4xy+4y^2-16})=-10 & (2) \end{array}\right.$$

Nhận xét. Ta thấy hệ là một khối cồng kềnh phức tạp.Biến đổi thế nào để ra được phương trình thuần nhất. Cả hai phương trình có biểu thức căn giống nhau. Nếu cộng vế với vế của hai phương trình lại ta sẽ thấy xuất hiện điều đặc biệt. Điều đó dẫn dắt ta nhận ra hệ phương trình đẳng cấp.

Lời giải. Cộng vế với vế ta có: $(x-2y)(3x+8y)+(y-4x)(3y+2x)-2(2x+3y)\sqrt{x^2-4xy+4y^2-16}) = -16 \Leftrightarrow -5x^2-10xy-13y^2-2(2x+3y)\sqrt{x^2-4xy+4y^2-16}) = -16 \Leftrightarrow (2x+3y)^2+2(2x+3y)\sqrt{x^2-4xy+4y^2-16})+x^2-4xy+4y^2-16=0 \Leftrightarrow (2x+3y+\sqrt{x^2-4xy+4y^2-16})^2=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-4xy+4y^2-16})^2 = -2x-3y$

Thay vào cả hai phương trình của hệ ta có hệ phương trình dẳng cấp: $\left\{\begin{array}{l} (x-2y)(5x+4y)=6 \\ (y-4x)(3y+2x)=10 \end{array}\right.$

Tới đây bạn đọc có thể tự giải . Hệ phương trình có nghiệm $(-\sqrt{2};\sqrt{2})$; $(\sqrt{2};-\sqrt{2})$

3 Kết luận

Nói tóm lại mỗi hệ phương trình đều được khoác lên mình "những chiếc áo" đẹp. Nếu ta biết khéo léo biến đổi gỡ bỏ từng" lớp " áo ấy, ta sẽ đưa được hệ ban đầu về hệ cơ bản mà ta đã biết cách giải. Sau đây là một số bài tập tương tự với các ví dụ trên tác giả đã sưu tầm bạn đọc hãy tự giải .

4 Các bài tập tự luyện

Bài 4.1 (Đề thi vào lớp 10 chuyên toán ĐHKHTN, ĐHQGHN. Năm học 2008- 2009)**.** Giải hệ phương trình: $\left\{\begin{array}{c} 2x^2y-y^2x=1 \\ 8x^3-y^3=7 \end{array}\right.$ Đáp số: $(1;1)$ $(-\dfrac{1}{2};-2)$

Bài 4.2 (Đề thi vào lớp 10 chuyên toán ĐHKHTN, ĐHQGHN. Năm học 2002- 2003)**.** Giải hệ phương trình: $\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+xy=1 \\ x^3+y^3=x+3y \end{array}\right.$ Đáp số: $(1;0)$ $(-1;0)$

Bài 4.3 (Đề thi vào lớp 10 chuyên toán ĐHKHTN, ĐHQGHN. Năm học 2003- 2004). Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^3+3x^2y=5 \\ y^3+6xy^2=7 \end{cases}$ Đáp số: $(1;1)$ $(\dfrac{5-\sqrt{105}}{8};\dfrac{7+\sqrt{105}}{4})$; $(\dfrac{5+\sqrt{105}}{4};\dfrac{7-\sqrt{105}}{8})$

Bài 4.4 (Đề thi học sinh giỏi lớp 9 tỉnh Hải Dương ngày 23/2/2012). Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+xy-2y^2=0 \\ xy+3y^2+x=7 \end{cases}$

Bài 4.5 (Đề thi học sinh giỏi lớp 9 tỉnh Thanh Hóa ngày 11/3/2017). Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{x}(1+\dfrac{1}{x+y})=3 \\ 2\sqrt{y}(1-\dfrac{1}{x+y})=1 \end{cases}$

Bài 4.6 (Đề thi vào lớp 10 chuyên toán ĐHKHTN, ĐHQGHN. Năm học 2005- 2006). Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+y^3-xy^2=1 \\ 4x^4+y^4=4x+y \end{cases}$ Đáp số: $(1;0)$ $(0;1)$ $(1;1)$ $(\dfrac{3\sqrt[3]{5}}{5};\dfrac{\sqrt[3]{5}}{5})$

Bài 4.7. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+2xy^2+12y=0 \\ x^2+8y^2=12 \end{cases}$ Đáp số: $(-2;1)$ $(2;-1)$

Bài 4.8. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^3-9y^3=(x-y)(2xy+3) \\ x^2-xy+y^2=3 \end{cases}$ Đáp số: $(2;1)$ $(-2;-1)$

Bài 4.9. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x^5+y^5=x^2+y^2 \end{cases}$ Đáp số: $(1;0)$ $(0;1)$

Bài 4.10. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2-y^2=1 \\ 2x^3-y^3=2y-x \end{cases}$ Đáp số: $(1;1)$ $(-1;-1)$

Bài 4.11. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+y^2x+3x-6y=0 \\ x^2+xy=3 \end{cases}$ Đáp số: $(-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}};-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}})$ $(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}};\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}})$

Bài 4.12. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+4y=y^3+16x \\ 1+y^2=5(1+x^2) \end{cases}$ Đáp số: $(0;2)$ $(0;-2)$ $(1;3)$ $(-1;-3)$

Bài 4.13. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}=8\sqrt{2} \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4 \end{cases}$ Đáp số: $(4;4)$

Bài 4.14. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x-2y-\sqrt{xy}=0 \\ \sqrt{x-1}+\sqrt{4y-1}=2 \end{cases}$ Đáp số: $(1;1)$ $(2;\dfrac{1}{2})$

Bài 4.15. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^5+y^5=1 \\ x^9+y^9=x^4+y^4 \end{cases}$ Đáp số: $(1;0)$ $(0;1)$

Tài liệu trích dẫn

[1] Trần Nam Dũng (2014), *Phương trình và hơn thế nữa*, Kỷ yếu Trường hè 2014, ĐHQG TpHCM.

[2] Nguyễn Văn Mậu (1993), *Một số phương pháp giải phương trình và hệ phương trinh*, NXBGD

[3] Nguyễn Văn Mậu, Nguyễn Văn Ngọc (2009), *Đa thức đối xứng và áp dụng*, NXBGD