TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
**TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN**

**ĐỀ THI THỬ LỚP 9 NĂM 2018**
**Môn: Toán (Vòng 1 - Đợt 1)**
Thời gian: 120 phút (không kể thời gian phát đề)

**Câu I (3 điểm).**
1) Giải phương trình
$$x^2+1+\sqrt{x^2+x+2}=2x+\sqrt{3x+1}.$$
2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2+4y^2=5 \\ 5x+10y+4x^2y+8y^2x=27. \end{cases}$$

**Câu II (3 điểm).**
1) Tìm tích của tất cả các ước số nguyên dương phân biệt của số $n=(420)^4$.

2) Với $a,b,c>0$ và $\min(ab,bc,ca)\geq 1$. Chứng minh rằng
$$(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)\leq\left(1+(\frac{a+b}{2})^2\right)\left(1+(\frac{b+c}{2})^2\right)\left(1+(\frac{c+a}{2})^2\right).$$

**Câu III (3 điểm).** Cho tam giác nhọn $ABC$ nội tiếp đường tròn $(O)$ với $BA>BC$. Phân giác ngoài góc $\angle ABC$ cắt đường thẳng qua $A$ song song với $BC$ tại $P$.

1) Chứng minh rằng $AP=AB$.

2) Tiếp tuyến qua $A$ của $(O)$ cắt $PB$ tại $Q$. $BP$ cắt $(O)$ tại $M$ khác $B$. Chứng minh rằng
$$MA^2=MQ\cdot MP.$$

3) Gọi $R$ đối xứng $Q$ qua $AC$. Chứng minh rằng $\angle APR=\angle CPB$.

**Câu IV (1 điểm).** Giả sử số nguyên dương $n$ có tính chất: có tồn tại một cách xắp xếp $a_1,a_2,...,a_{2n}$ của $2n$ số $1,1,2,2,...,n,n$ sao cho với mỗi $k=1,2,...,n$ luôn tồn tại đúng $k$ số xếp giữa hai số $k$. Chứng minh rằng $n^2+n$ chia hết cho 4.

......Hết ......

# ĐÁP ÁN ĐỀ VÒNG 1 ĐỢT 1

**Câu I.** 1) Điều kiện $x \ge -1/3$. Đặt $u = \sqrt{x^2+x+2}, v = \sqrt{3x+1}$ thu được
$u^2 - v^2 + u - v = 0 \leftrightarrow (u-v)(u+v+1) = 0 \leftrightarrow u = v \leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \leftrightarrow x = 1$.

2) Hệ tương đương

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 5 \\ 5x + 10y + 4x^2y + 8y^2x = 27. \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 5(1) \\ (x+2y)(5+4xy) = 27(2) \end{cases}.$$

Thay (1) vào (2) suy ra $(x+2y)(x^2+4y^2+4xy) = 27 \leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 \\ xy = 1 \end{cases}$.

**Câu II.**
1) Ta có $n = (2^2.3.5.7)^4$ nên ước của $n$ có dạng $m = 2^a3^b5^c7^d$ với $0 \le a \le 8$ nhận 9 giá trị, $0 \le b \le 4, 0 \le c \le 4, 0 \le d \le 4$ với mỗi số $b$, $c$, $d$ nhận 5 giá trị suy ra $n$ có $9.5.5.5 = 1125$ ước dương. Nếu $m \ne 420^2$ thì $\frac{(420)^4}{m}$ cũng là ước suy ra $m, \frac{420^4}{m}$ là một cặp ước có tích bằng $420^4$. Ta có $\frac{1125-1}{2} = 562$ cặp ước. Suy ra tích tất cả các ước nguyên dương của $n$ bằng $(420^4)^{562}.420^2 = 420^{2250}$.

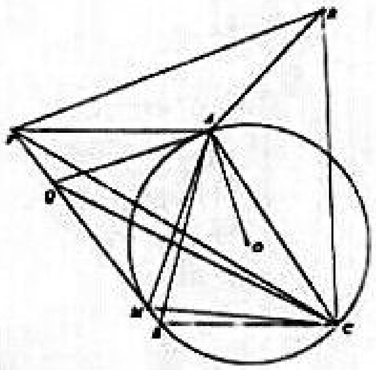
2) Ta có $(1+a^2)(1+b^2) = (ab-1)^2 + (a+b)^2 \le ((\frac{a+b}{2})^2 - 1)^2 + (a+b)^2 = ((\frac{a+b}{2})^2 + 1)^2$.

Tương tự $(1+b^2)(1+c^2) \le ((\frac{b+c}{2})^2+1)^2$ và $(1+c^2)(1+a^2) \le ((\frac{c+a}{2})^2+1)^2$. Nhân các vế của bất đẳng thức ta thu được đpcm.

**Câu III.** 1) Do $BP$ là phân giác ngoài $\angle ABC$ nên $\angle ABP = 90° - \frac{\angle ABC}{2} = 90° - \frac{\angle PAB}{2}$ suy ra tam giác $PAB$ cân tại $A$ nên $AP = AB$.

2) Chú ý $AQ$ là tiếp tuyến của $(O)$, kết hợp câu 1) ta có $\angle APQ = \angle ABP = \angle MAQ$ ta suy ra $\triangle MAQ \sim \triangle MPA$ suy ra $MA^2 = MQ \cdot MP$.

3) Từ $R$ đối xứng $Q$ qua $AC$ nên $\angle PAR = 360° - \angle PAC - \angle CAR = 180° + \angle ACB - \angle CAQ = 180° + \angle ACB - (\angle CAM + \angle MAQ) = \angle ACB + \angle MBC - \angle MBA = \angle ACB + \angle ABC = 180° - \angle BAC = \angle PMC$. Kết hợp $\frac{AP}{AR} = \frac{AP}{AQ} = \frac{MP}{MA} = \frac{MP}{MC}$, ta suy ra $\triangle PAR \sim \triangle PMC$ do đó $\angle APR = \angle CPB$.



**Câu IV.** Giả sử $a_1, a_2, ..., a_{2n}$ là một hoán vị thỏa mãn yêu cầu của bài toán, khi đó với mọi $k = 1, 2, ..., n$ luôn tồn tại chỉ số $i_k$ mà $a_{i_k} = a_{i_k} + k + 1 = k$. Ta tính tổng các chỉ số bằng 2 cách.

Cách 1:

$$1 + 2 + ... + 2n = n(2n+1).$$

**Cách 2:**

$$\sum_{k=1}^{n}(i_k + i_k + k + 1) = 2\sum_{k=1}^{n} i_k + \frac{n(n+3)}{2}.$$

**Suy ra**

$$2\sum_{k=1}^{n} i_k = n(2n+1) - \frac{n(n+3)}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$$

nên $n(3n-1) \equiv 0 \pmod 4$. Ta có $n^2 + n = 4n^2 - n(3n-1)$ suy ra $n^2 + n$ chia hết cho 4 (đpcm).