LỜI GIẢI ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 THÀNH PHỐ HÀ NỘI 2018

Võ Quốc Bá Cẩn – Lê Phúc Lữ – Nguyễn Lê Phước

1. Đề thi

Bài 1 (5.0 *điểm*).

a) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a+b+c=2018$ và $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}=\frac{2017}{2018}$. Tính giá trị của biểu thức

$$P=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}.$$

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn phương trình

$$\frac{x-y}{x^2+xy+y^2}=\frac{7}{13}.$$

Bài 2 (5.0 *điểm*).

a) Giải phương trình:

$$6x^2+2x+1=3x\sqrt{6x+3}.$$

b) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3+x+2=y^3-3y^2+4y, \\ 2\sqrt{x+2}=y+2. \end{cases}$$

Bài 3 (3.0 *điểm*).

a) Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên dương m, n, p với p nguyên tố thỏa mãn

$$m^{2019}+n^{2019}=p^{2018}.$$

b) Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa mãn $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x}{y^3+16}+\frac{y}{z^3+16}+\frac{z}{x^3+16}.$$

Bài 4 (6.0 *điểm*). Cho tam giác ABC có ba góc nhọn với $AB<AC<BC$, nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là hình chiếu của A trên BC, M là trung điểm của AC và P là điểm thay đổi trên đoạn thẳng MH (P khác M và P khác H).

a) Chứng minh rằng $\angle BAO=\angle HAC$.

b) Khi $\angle APB=90^\circ$, chứng minh rằng ba điểm B, O, P thẳng hàng.

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMP và đường tròn ngoại tiếp tam giác BHP cắt nhau tại Q (Q khác P). Chứng minh rằng đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi P thay đổi.

Bài 5 (1.0 *điểm*)**.** Cho đa giác đều $2n$ đỉnh nội tiếp đường tròn (O). Chia $2n$ đỉnh này thành n cặp điểm, mỗi cặp điểm này tạo thành một đoạn thẳng (hai đoạn thẳng bất kỳ trong số n đoạn thẳng được tạo ra không có đầu mút chung).

a) Khi $n = 4$, hãy chỉ ra một cách chia sao cho trong bốn đoạn thẳng được tao ra không có hai đoạn thẳng nào có độ dài bằng nhau.

b) Khi $n = 10$, chứng minh rằng trong mười đoạn thẳng được tạo ra luôn tồn tại hai đoạn thẳng có độ dài bằng nhau.

2. Lời giải và bình luận các bài toán

Bài 1 (5.0 *điểm*)**.**

a) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a+b+c = 2018$ và $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b} = \frac{2017}{2018}$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}.$$

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn phương trình

$$\frac{x-y}{x^2+xy+y^2} = \frac{7}{13}.$$

Lời giải. **a)** Từ giả thiết, ta có

$$P = (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right) - 3 = 2018 \cdot \frac{2017}{2018} - 3 = 2014.$$

b) Điều kiện: $x^2+xy+y^2 \neq 0$. Từ phương trình suy ra $x - y \neq 0$. Bây giờ, ta viết lại phương trình đã cho dưới dạng

$$13(x-y) = 7(x^2+xy+y^2). \tag{1}$$

Từ đây, ta có $13(x-y)$ chia hết cho 7. Mà $(13, 7) = 1$ nên $x - y$ chia hết cho 7. (2)

Mặt khác, ta lại có

$$x^2+xy+y^2 = \frac{1}{4}(x-y)^2 + \frac{3}{4}(x+y)^2 \geq \frac{1}{4}(x-y)^2.$$

Do đó, kết hợp với (1), ta suy ra

$$13(x-y) \geq \frac{7}{4}(x-y)^2.$$

Từ đó, với chú ý $x - y \neq 0$, ta có đánh giá $0 < x - y < \frac{52}{7}$. Kết hợp với (2), ta được $x - y = 7$. Thay kết quả này vào (1), ta tính được $x^2+xy+y^2 = 13$.

Giải hệ phương trình $x - y = 7$ và $x^2+xy+y^2 = 13$, ta được các cặp số (x, y) thỏa mãn yêu cầu đề bài là $(3, -4)$ và $(4, -3)$. □

Bình luận. Ở câu **b)**, học sinh cũng có thể sử dụng phương pháp phương trình bậc hai để giải. Tuy nhiên, do các hệ số của phương trình tương đối lớn nên khối lượng tính toán sẽ nhiều và tương đối vất vả để chặn giá trị của x, y.

Bài 2 (5.0 *điểm*).

a) Giải phương trình:

$$6x^2 + 2x + 1 = 3x\sqrt{6x+3}.$$

b) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 + x + 2 = y^3 - 3y^2 + 4y, \\ 2\sqrt{x+2} = y + 2. \end{cases}$$

Lời giải. a) Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{2}$. Do $6x^2 + 2x + 1 = 5x^2 + (x+1)^2 > 0$ nên từ phương trình, ta suy ra $x > 0$. Bây giờ, đặt $a = \sqrt{6x+3}$, ta có $6x^2 + 2x + 1 = 6x^2 + \frac{1}{3}a^2$ nên phương trình có thể được viết lại thành

$$6x^2 + \frac{1}{3}a^2 = 3xa,$$

hay

$$(a - 6x)(a - 3x) = 0.$$

Từ đây, ta có $a = 3x$ hoặc $a = 6x$.

- Với $a = 3x$, ta có $9x^2 = 6x + 3$. Từ đây, với chú ý $x > 0$, ta giải được $x = 1$.
- Với $a = 6x$, ta có $36x^2 = 6x + 3$. Từ đây, với chú ý $x > 0$, ta giải được $x = \frac{1+\sqrt{13}}{12}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 1$ và $x = \frac{1+\sqrt{13}}{12}$.

b) Điều kiện: $x \geq -2$. Từ phương trình thứ hai, ta suy ra $y \geq -2$. Phương trình thứ nhất của hệ có thể được viết lại thành

$$x^3 + x = (y-1)^3 + (y-1).$$

Ta thấy, nếu $x > y - 1$ thì VT > VP, còn nếu $x < y - 1$ thì ngược lại. Do đó $x = y - 1$ (suy ra $y \geq -1$). Thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta được

$$2\sqrt{y+1} = y + 2,$$

hay

$$\left(\sqrt{y+1} - 1\right)^2 = 0.$$

Giải phương trình này, ta được $y = 0$. Một cách tương ứng, ta có $x = -1$. Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm (x, y) duy nhất là $(-1, 0)$. □

Bài 3 (3.0 *điểm*).

a) Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên dương m, n, p với p nguyên tố thỏa mãn

$$m^{2019} + n^{2019} = p^{2018}.$$

b) Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa mãn $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{y^3+16} + \frac{y}{z^3+16} + \frac{z}{x^3+16}.$$

Lời giải. **a)** Giả sử tồn tại bộ số (m, n, p) thỏa mãn yêu cầu. Dễ thấy $0 < m, n < p$. Phương trình đã cho có thể được viết lại thành

$$(m+n)A = p^{2018}, \tag{1}$$

trong đó $A = m^{2018} - m^{2017}n + m^{2017}n^2 - \cdots - mn^{2017} + n^{2018}$.

Nếu A không chia hết cho p thì từ (1), ta có $A = 1$ và

$$m + n = p^{2018} = m^{2019} + n^{2019}.$$

Từ đó, dễ thấy $m = n = 1$ và $p^{2018} = 2$, mâu thuẫn. Vậy A chia hết cho p.

Do $m + n > 1$ nên từ (1) suy ra $m + n$ chia hết cho p. Khi đó, ta có

$$A \equiv 2019m^{2018} \pmod{p}.$$

Do A chia hết cho p và $0 < m < p$ nên từ kết quả trên, ta suy ra 2019 chia hết cho p, hay $p = 2019$. Từ đây, dễ thấy m và n khác tính chẵn lẻ, hay $m \neq n$.

Bây giờ, ta viết lại phương trình đã cho dưới dưới dạng

$$(m^3)^{673} + (n^3)^{673} = 2019^{2018},$$

hay

$$(m+n)(m^2 - mn + n^2)B = 2019^{2018},$$

trong đó $B = (m^3)^{672} - (m^3)^{671}(n^3) + \cdots - (m^3)(n^3)^{671} + (n^3)^{672}$. Do $m \neq n$ nên $m^2 - mn + n^2 = (m-n)^2 + mn > 1$, từ đó ta có $m^2 - mn + n^2$ chia hết cho 2019. Tuy nhiên, điều này không thể xảy ra do

$$\begin{aligned} m^2 - mn + n^2 &\equiv 3n^2 \pmod{2019} \\ &\not\equiv 0 \pmod{2019}. \end{aligned}$$

Vậy không tồn tại các số m, n, p thỏa mãn yêu cầu của đề bài.

b) Ta sẽ chứng minh $P \geq \frac{1}{6}$ với dấu bằng đạt được tại $(x, y, z) = (0, 1, 2)$ (và các hoán vị vòng quanh của bộ này). Bất đẳng thức $P \geq \frac{1}{6}$ tương đương với

$$\frac{16x}{y^3+16} + \frac{16y}{z^3+16} + \frac{16z}{x^3+16} \geq \frac{8}{3},$$

hay

$$\left(x - \frac{16x}{y^3+16}\right) + \left(y - \frac{16y}{z^3+16}\right) + \left(z - \frac{16z}{x^3+16}\right) \leq x + y + z - \frac{8}{3}.$$

Một cách tương đương, ta phải chứng minh

$$\frac{xy^3}{y^3+16} + \frac{yz^3}{z^3+16} + \frac{zx^3}{x^3+16} \leq \frac{1}{3}. \tag{1}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử y nằm giữa x và z. Ta có

$$y^3 + 16 = (y+4)(y-2)^2 + 12y \geq 12y$$

nên $\frac{y}{y^3+16} \leq \frac{1}{12}$. Từ đó

$$\frac{xy^3}{y^3+16} \leq \frac{xy^2}{12}.$$

Đánh giá tương tự, ta cũng có

$$\frac{yz^3}{z^3+16} \le \frac{yz^2}{12}, \quad \frac{zx^3}{x^3+16} \le \frac{zx^2}{12}.$$

Suy ra

$$\frac{xy^3}{y^3+16} + \frac{yz^3}{z^3+16} + \frac{zx^3}{x^3+16} \le \frac{xy^2+yz^2+zx^2}{12}. \tag{2}$$

Do y nằm giữa x và z nên ta có $(y-z)(y-x) \le 0$, suy ra $y^2+zx \le xy+yz$ và $xy^2+zx^2 \le xy^2+xyz$. Từ đó, ta có đánh giá

$$\begin{aligned} xy^2+yz^2+zx^2 &\le y(x^2+xz+z^2) \le y(x+z)^2 \\ &= y(3-y)^2 = 4-(4-y)(y-1)^2 \\ &\le 4. \end{aligned} \tag{3}$$

Từ (2) và (3), ta thu được (1). Vậy min $P = \frac{1}{6}$. □

Bình luận. Các bất đẳng thức $y^3+16 \ge 12y$ và $y(x+z)^2 \le 4$ trong lời giải câu **b)** có thể chứng minh dễ dàng bằng cách sử dụng bất đẳng thức AM-GM cho ba số không âm. Ở đây, chúng tôi chọn trình bày bằng biến đổi tương đương để tránh việc phải chứng minh lại bất đẳng thức này dưới dạng bổ đề.

Ở đoạn đánh giá $\frac{xy^3}{y^3+16} \le \frac{xy^2}{12}$, các em học sinh không nên trình bày theo kiểu

$$\frac{xy^3}{y^3+16} \le \frac{xy^3}{12y} = \frac{xy^2}{12},$$

vì y vẫn chưa chắc chắn là số khác 0, nó hoàn toàn có thể nhận giá trị bằng 0. Nếu muốn trình bày theo lối này, cần xét hai trường hợp.

Bài 4 (6.0 *điểm*)**.** Cho tam giác ABC có ba góc nhọn với $AB < AC < BC$, nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là hình chiếu của A trên BC, M là trung điểm của AC và P là điểm thay đổi trên đoạn thẳng MH (P khác M và P khác H).

a) Chứng minh rằng $\angle BAO = \angle HAC$.

b) Khi $\angle APB = 90^\circ$, chứng minh rằng ba điểm B, O, P thẳng hàng.

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMP và đường tròn ngoại tiếp tam giác BHP cắt nhau tại Q (Q khác P). Chứng minh rằng đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi P thay đổi.

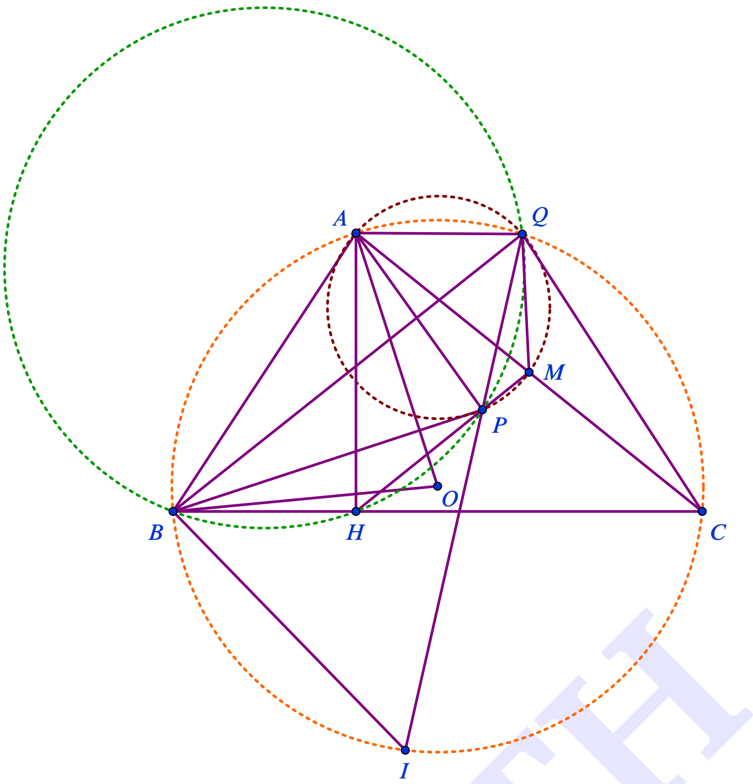
Lời giải. a) Ta có $\angle ACB = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AB} = \angle AOB$ (tính chất góc nội tiếp chắn cung). Mà $OA = OB$ nên $\angle BAO = \angle ABO$, suy ra

$$\angle AOB + 2\angle BAO = 90^\circ.$$

Từ đây, ta có $2\angle ACB + 2\angle BAO = 90^\circ$, hay

$$\angle BAO = 90^\circ - \angle ACB = \angle HAC \text{ (vì } \angle AHC = 90^\circ).$$

Vậy $\angle BAO = \angle CAH$.



b) Xét tứ giác $APHB$, ta có $\angle APB = \angle AHB = 90^\circ$ (gt). Mà hai góc này cùng nhìn cạnh AB nên tứ giác $APHB$ nội tiếp. Suy ra $\angle ABP = \angle AHP$ (cùng chắn cung AP). (1)

Xét tam giác AHC vuông tại H có M là trung điểm của AC nên $MH = MC = MA$ (đường trung tuyến bằng nửa cạnh huyền). Từ đó suy ra

$$\angle AHP = \angle AHM = \angle MAH = \angle CAH = \angle BAO = \angle ABO. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có $\angle ABP = \angle ABO$ nên các tia BO và BP trùng nhau. Từ đó suy ra ba điểm B, O, P thẳng hàng.

c) Ta có tứ giác $BQPH$ nội tiếp nên và hai góc BQP, BHP ở vị trí đối nhau nên

$$\angle BQP = 180^\circ - \angle BHP = \angle PHC = \angle MHC.$$

Mặt khác, ta lại có $MH = MC$ (chứng minh trên) nên

$$\angle MHC = \angle MCH = \angle ACB.$$

Từ đây, ta suy ra

$$\angle BQP = \angle ACB.$$

Lại có tứ giác $AQMP$ nội tiếp nên $\angle AQP = \angle AMP = \angle AMH$ (cùng chắn cung AP). Mà $\angle AMH = \angle MHC + \angle MCH = 2\angle MCH = 2\angle ACB$ (tính chất góc ngoài) nên

$$\angle AQP = 2\angle ACB.$$

Từ đó

$$\angle AQB = \angle AQP - \angle BQP = \angle ACB.$$

Hai góc AQB và ACB cùng nhìn cạnh AB nên tứ giác $AQCB$ nội tiếp. Bây giờ, gọi I là giao điểm khác P của PQ và (O). Ta có

$$\angle BQI = \angle BQP = \angle ACB = \angle AQB$$

nên sđ$\overset{\frown}{BA}$ = sđ$\overset{\frown}{BI}$, hay $BA = BI$. Suy ra I là giao điểm khác A của các đường tròn (B, BA) và (O), tức I cố định. Vậy đường thẳng PQ luôn đi qua I cố định. □

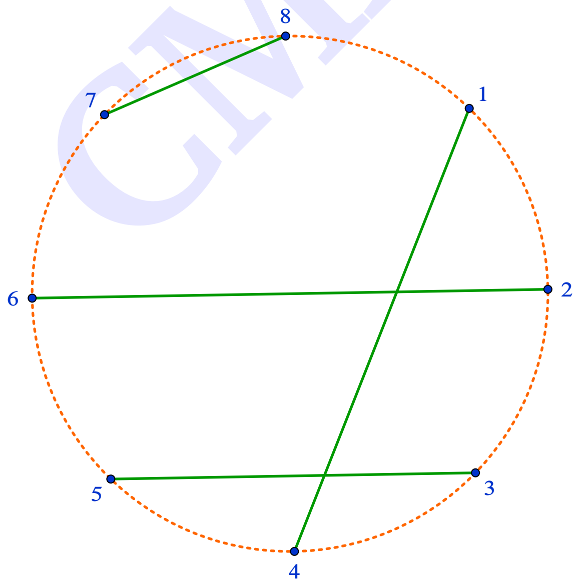
Bài 5 (1.0 *điểm*). Cho đa giác đều $2n$ đỉnh nội tiếp đường tròn (O). Chia $2n$ đỉnh này thành n cặp điểm, mỗi cặp điểm này tạo thành một đoạn thẳng (hai đoạn thẳng bất kỳ trong số n đoạn thẳng được tạo ra không có đầu mút chung).

a) Khi $n = 4$, hãy chỉ ra một cách chia sao cho trong bốn đoạn thẳng được tao ra không có hai đoạn thẳng nào có độ dài bằng nhau.

b) Khi $n = 10$, chứng minh rằng trong mười đoạn thẳng được tạo ra luôn tồn tại hai đoạn thẳng có độ dài bằng nhau.

Lời giải. Ta đánh số $2n$ đỉnh của đa giác từ 1 đến $2n$. Khi đó, độ dài của đoạn thẳng nối hai đỉnh có thể coi tương ứng với số lượng cung nhỏ nằm giữa hai đỉnh đó, cũng chính là chênh lệch giữa hai số thứ tự theo mod n rồi cộng thêm 1. Sự tồn tại hai đoạn thẳng có độ dài bằng nhau trong đề bài tương ứng với việc tồn tại hai cặp đỉnh có chênh lệch giữa các số thứ tự bằng nhau theo mod n.

a) Ta cần chỉ ra cách chia cặp 8 số từ 1 đến 8 sao cho không có hai cặp nào có chênh lệch giống nhau theo mod 4. Cụ thể là, $(1, 4)$, $(2, 6)$, $(3, 5)$ và $(7, 8)$ với các chênh lệch là $3, 4, 2, 1$, thỏa mãn đề bài.



b) Giả sử ngược lại tồn tại cách ghép cặp (a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_{10}, b_{10}) cho các số từ 1 đến 20 sao cho không có hai số nào có cùng số dư khi chia cho 10. Suy ra

$$\begin{aligned}|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_{10} - b_{10}| &\equiv 0 + 1 + \cdots + 9 \pmod{10}\\ &\equiv 5 \pmod{10}.\end{aligned}$$

Do đó, tổng $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_{10} - b_{10}$ là số lẻ. Chú ý rằng với mọi x, y nguyên thì $|x - y|$ có cùng tính chẵn lẻ với $x + y$. Kết hợp với kết quả trên, ta suy ra tổng $(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_{10} + b_{10})$ cũng lẻ. Mặt khác, ta lại có

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_{10} + b_{10}) = 1 + 2 + \cdots + 20 = 210$$

là số chẵn. Mâu thuẫn nhận được cho ta kết quả cần chứng minh. $\square$

Bình luận. Việc mô hình hóa thành việc ghép cặp các số khiến bài toán sáng sủa hơn nhiều bởi đa giá có kích thước $2n = 20$ trong câu **b)** không dễ để vẽ.