CHUYÊN ĐỀ 1 - PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

A. MỤC TIÊU:

* Hệ thống lại các dạng toán và các phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử
* Giải một số bài tập về phân tích đa thức thành nhân tử
* Nâng cao trình độ và kỹ năng về phân tích đa thức thành nhân tử

B. CÁC PHƯƠNG PHÁP VÀ BÀI TẬP

I. TÁCH MỘT HẠNG TỬ THÀNH NHIỀU HẠNG TỬ:

Định lí bổ sung:

+ Đa thức f(x) có nghiệm hữu tỉ thì có dạng p/q trong đó p là ước của hệ số tự do, q là ước dương của hệ số cao nhất

+ Nếu f(x) có tổng các hệ số bằng 0 thì f(x) có một nhân tử là x – 1

+ Nếu f(x) có tổng các hệ số của các hạng tử bậc chẵn bằng tổng các hệ số của các hạng tử bậc lẻ thì f(x) có một nhân tử là x + 1

+ Nếu a là nghiệm nguyên của f(x) và f(1); f(- 1) khác 0 thì $\frac{f(1)}{a - 1}$ và $\frac{f(-1)}{a + 1}$ đều là số nguyên.

Để nhanh chóng loại trừ nghiệm là ước của hệ số tự do

1. Ví dụ 1: $3x^2 – 8x + 4$

Cách 1: Tách hạng tử thứ 2

$3x^2 – 8x + 4 = 3x^2 – 6x – 2x + 4 = 3x(x – 2) – 2(x – 2) = (x – 2)(3x – 2)$

Cách 2: Tách hạng tử thứ nhất:

$3x^2 – 8x + 4 = (4x^2 – 8x + 4) - x^2 = (2x – 2)^2 – x^2 = (2x – 2 + x)(2x – 2 – x)$

$= (x – 2)(3x – 2)$

Ví dụ 2: $x^3 – x^2 - 4$

Ta nhân thấy nghiệm của f(x) nếu có thì x = $\pm1;\pm2;\pm4$, chỉ có f(2) = 0 nên x = 2 là nghiệm của f(x) nên f(x) có một nhân tử là x – 2. Do đó ta tách f(x) thành các nhóm có xuất hiện một nhân tử là x – 2

Cách 1:

$x^3 – x^2 – 4 = \left(x^3-2x^2\right)+\left(x^2-2x\right)+\left(2x-4\right)=x^2\left(x-2\right)+x(x-2)+2(x-2) = \left(x-2\right)\left(x^2+x+2\right)$

Cách 2: $x^3 - x^2 - 4 = x^3 - 8 - x^2 + 4 = \left(x^3 - 8\right) - \left(x^2 - 4\right) = (x-2)(x^2+2x+4) - (x-2)(x+2)$

$$= (x-2)\left[\left(x^2+2x+4\right) - (x+2)\right] = (x-2)(x^2+x+2)$$

Ví dụ 3: f(x) = $3x^3 - 7x^2 + 17x - 5$

Nhận xét: $\pm1, \pm5$ không là nghiệm của f(x), như vậy f(x) không có nghiệm nguyên. Nên f(x) nếu có nghiệm thì là nghiệm hữu tỉ

Ta nhận thấy x = $\frac{1}{3}$ là nghiệm của f(x) do đó f(x) có một nhân tử là 3x – 1. Nên

f(x) = $3x^3 - 7x^2 + 17x - 5 = 3x^3 - x^2 - 6x^2 + 2x + 15x - 5 = \left(3x^3 - x^2\right) - \left(6x^2 - 2x\right) + \left(15x - 5\right)$

$= x^2(3x-1) - 2x(3x-1) + 5(3x-1) = (3x-1)(x^2-2x+5)$

Vì $x^2 - 2x + 5 = (x^2 - 2x + 1) + 4 = (x-1)^2 + 4 > 0$ với mọi x nên không phân tích được thành nhân tử nữa

Ví dụ 4: $x^3 + 5x^2 + 8x + 4$

Nhận xét: Tổng các hệ số của các hạng tử bậc chẵn bằng tổng các hệ số của các hạng tử bậc lẻ nên đa thức có một nhân tử là x + 1

$x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = (x^3 + x^2) + (4x^2 + 4x) + (4x + 4) = x^2(x + 1) + 4x(x + 1) + 4(x + 1)$

$= (x + 1)(x^2 + 4x + 4) = (x + 1)(x + 2)^2$

Ví dụ 5: f(x) = $x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 2$

Tổng các hệ số bằng 0 thì nên đa thức có một nhân tử là x – 1, chia f(x) cho (x – 1) ta có:

$x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 2 = (x - 1)(x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x - 2)$

Vì $x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x - 2$ không có nghiệm nguyên cũng không có nghiệm hữu tỉ nên không phân tích được nữa

Ví dụ 6: $x^4 + 1997x^2 + 1996x + 1997 = (x^4 + x^2 + 1) + (1996x^2 + 1996x + 1996)$

$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) + 1996(x^2 + x + 1)$

$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1 + 1996) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1997)$

Ví dụ 7: $x^2 - x - 2001.2002 = x^2 - x - 2001.(2001 + 1)$

$= x^2 - x - 2001^2 - 2001 = (x^2 - 2001^2) - (x + 2001) = (x + 2001)(x - 2002)$

II. THÊM , BỚT CÙNG MỘT HẠNG TỬ:

1. Thêm, bớt cùng một số hạng tử để xuất hiện hiệu hai bình phương:

Ví dụ 1: $4x^4 + 81 = 4x^4 + 36x^2 + 81 - 36x^2 = (2x^2 + 9)^2 – 36x^2$

$= (2x^2 + 9)^2 – (6x)^2 = (2x^2 + 9 + 6x)(2x^2 + 9 – 6x)$

$= (2x^2 + 6x + 9)(2x^2 – 6x + 9)$

Ví dụ 2: $x^8 + 98x^4 + 1 = (x^8 + 2x^4 + 1) + 96x^4$

$= (x^4 + 1)^2 + 16x^2(x^4 + 1) + 64x^4 - 16x^2(x^4 + 1) + 32x^4$

$= (x^4 + 1 + 8x^2)^2 – 16x^2(x^4 + 1 – 2x^2) = (x^4 + 8x^2 + 1)^2 - 16x^2(x^2 – 1)^2$

$= (x^4 + 8x^2 + 1)^2 - (4x^3 – 4x)^2$

$= (x^4 + 4x^3 + 8x^2 – 4x + 1)(x^4 - 4x^3 + 8x^2 + 4x + 1)$

2. Thêm, bớt cùng một số hạng tử để xuất hiện nhân tử chung

Ví dụ 1: $x^7 + x^2 + 1 = (x^7 – x) + (x^2 + x + 1) = x(x^6 – 1) + (x^2 + x + 1)$

$= x(x^3 - 1)(x^3 + 1) + (x^2 + x + 1) = x(x – 1)(x^2 + x + 1)(x^3 + 1) + (x^2 + x + 1)$

$= (x^2 + x + 1)[x(x – 1)(x^3 + 1) + 1] = (x^2 + x + 1)(x^5 – x^4 + x^2 - x + 1)$

Ví dụ 2: $x^7 + x^5 + 1 = (x^7 – x) + (x^5 – x^2) + (x^2 + x + 1)$

$= x(x^3 – 1)(x^3 + 1) + x^2(x^3 – 1) + (x^2 + x + 1)$

$= (x^2 + x + 1)(x – 1)(x^4 + x) + x^2 (x – 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$

$= (x^2 + x + 1)[(x^5 – x^4 + x^2 – x) + (x^3 – x^2) + 1] = (x^2 + x + 1)(x^5 – x^4 + x^3 – x + 1)$

Ghi nhớ:

Các đa thức có dạng $x^{3m + 1} + x^{3n + 2} + 1$ như: $x^7 + x^2 + 1$; $x^7 + x^5 + 1$; $x^8 + x^4 + 1$; $x^5 + x + 1$; $x^8 + x + 1$; … đều có nhân tử chung là $x^2 + x + 1$

III. ĐẶT BIẾN PHỤ:

Ví dụ 1: $x(x + 4)(x + 6)(x + 10) + 128 = [x(x + 10)][(x + 4)(x + 6)] + 128$

$= (x^2 + 10x) + (x^2 + 10x + 24) + 128$

Đặt $x^2 + 10x + 12 = y$, đa thức có dạng

$(y – 12)(y + 12) + 128 = y^2 – 144 + 128 = y^2 – 16 = (y + 4)(y – 4)$

$= (x^2 + 10x + 8)(x^2 + 10x + 16) = (x + 2)(x + 8)(x^2 + 10x + 8)$

Ví dụ 2: $A = x^4 + 6x^3 + 7x^2 – 6x + 1$

Giả sử $x \neq 0$ ta viết

$x^4 + 6x^3 + 7x^2 – 6x + 1 = x^2 (x^2 + 6x + 7 – \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}) = x^2 [(x^2 + \frac{1}{x^2}) + 6(x - \frac{1}{x}) + 7]$

Đặt $x - \frac{1}{x} = y$ thì $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + 2$, do đó

$A = x^2(y^2 + 2 + 6y + 7) = x^2(y + 3)^2 = (xy + 3x)^2 = [x(x - \frac{1}{x})^2 + 3x]^2 = (x^2 + 3x – 1)^2$

Chú ý: Ví dụ trên có thể giải bằng cách áp dụng hằng đẳng thức như sau:

$A = x^4 + 6x^3 + 7x^2 – 6x + 1 = x^4 + (6x^3 – 2x^2) + (9x^2 – 6x + 1)$

$= x^4 + 2x^2(3x – 1) + (3x – 1)^2 = (x^2 + 3x – 1)^2$

Ví dụ 3: $A = (x^2+y^2+z^2)(x+y+z)^2+(xy+yz+zx)^2$

$= \left[(x^2+y^2+z^2)+2(xy+yz+zx)\right](x^2+y^2+z^2)+(xy+yz+zx)^2$

Đặt $x^2+y^2+z^2 = a$, $xy + yz + zx = b$ ta có

$A = a(a + 2b) + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 = (x^2+y^2+z^2 + xy + yz + zx)^2$

Ví dụ 4: $B = 2(x^4+y^4+z^4)-(x^2+y^2+z^2)^2-2(x^2+y^2+z^2)(x+y+z)^2+(x+y+z)^4$

Đặt $x^4 + y^4 + z^4 = a$, $x^2 + y^2 + z^2 = b$, $x + y + z = c$ ta có:

$B = 2a – b^2 – 2bc^2 + c^4 = 2a – 2b^2 + b^2 - 2bc^2 + c^4 = 2(a – b^2) + (b –c^2)^2$

Ta lại có: $a – b^2 = - 2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$ và $b –c^2 = - 2(xy + yz + zx)$ Do đó;

$B = - 4(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2) + 4 (xy + yz + zx)^2$

$= -4x^2y^2-4y^2z^2-4z^2x^2+4x^2y^2+4y^2z^2+4z^2x^2+8x^2yz+8xy^2z+8xyz^2 = 8xyz(x+y+z)$

Ví dụ 5: $(a+b+c)^3-4(a^3+b^3+c^3)-12abc$

Đặt $a + b = m$, $a – b = n$ thì $4ab = m^2 – n^2$

$a^3 + b^3 = (a + b)[(a – b)^2 + ab] = m(n^2 + \frac{m^2 - n^2}{4})$. Ta có:

$C = (m + c)^3 – 4.\frac{m^3 + 3mn^2}{4} - 4c^3 - 3c(m^2 - n^2) = 3(- c^3 +mc^2 – mn^2 + cn^2)$

$= 3[c^2(m - c) - n^2(m - c)] = 3(m - c)(c - n)(c + n) = 3(a + b - c)(c + a - b)(c - a + b)$

III. PHƯƠNG PHÁP HỆ SỐ BẤT ĐỊNH:

Ví dụ 1: $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3$

Nhận xét: các số ± 1, ± 3 không là nghiệm của đa thức, đa thức không có nghiệm nguyên củng không có nghiệm hữu tỉ

Như vậy nếu đa thức phân tích được thành nhân tử thì phải có dạng

$(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = x^4 + (a + c)x^3 + (ac + b + d)x^2 + (ad + bc)x + bd$

đồng nhất đa thức này với đa thức đã cho ta có: $\begin{cases} a+c=-6 \\ ac+b+d=12 \\ ad+bc=-14 \\ bd=3 \end{cases}$

Xét bd = 3 với b, d $\in$ Z, b $\in \{\pm1, \pm3\}$ với b = 3 thì d = 1 hệ điều kiện trên trở thành

$$\begin{cases} a+c=-6 \\ ac=-8 \\ a+3c=-14 \\ bd=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2c=-8 \\ ac=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=-4 \\ a=-2 \end{cases}$$

Vậy: $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3 = (x^2 - 2x + 3)(x^2 - 4x + 1)$

Ví dụ 2: $2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 8$

Nhận xét: đa thức có 1 nghiệm là x = 2 nên có thừa số là x - 2 do đó ta có:

$2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 8 = (x - 2)(2x^3 + ax^2 + bx + c)$

$= 2x^4 + (a - 4)x^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c \Rightarrow \begin{cases} a-4=-3 \\ b-2a=-7 \\ c-2b=6 \\ -2c=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-5 \\ c=-4 \end{cases}$

Suy ra: $2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 8 = (x - 2)(2x^3 + x^2 - 5x - 4)$

Ta lại có $2x^3 + x^2 - 5x - 4$ là đa thức có tổng hệ số của các hạng tử bậc lẻ và bậc chẵn bằng nahu nên có 1 nhân tử là x + 1 nên $2x^3 + x^2 - 5x - 4 = (x + 1)(2x^2 - x - 4)$

Vậy: $2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 8 = (x - 2)(x + 1)(2x^2 - x - 4)$

Ví dụ 3:

$12x^2 + 5x - 12y^2 + 12y - 10xy - 3 = (a x + by + 3)(cx + dy - 1)$

$= acx^2 + (3c - a)x + bdy^2 + (3d - b)y + (bc + ad)xy – 3$

$$\Rightarrow \begin{cases} ac=12 \\ bc+ad=-10 \\ 3c-a=5 \\ bd=-12 \\ 3d-b=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ c=3 \\ b=-6 \\ d=2 \end{cases}$$

$\Rightarrow 12x^2 + 5x - 12y^2 + 12y - 10xy - 3 = (4 x - 6y + 3)(3x + 2y - 1)$

BÀI TẬP:

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

1) $x^3 - 7x + 6$
2) $x^3 - 9x^2 + 6x + 16$
3) $x^3 - 6x^2 - x + 30$
4) $2x^3 - x^2 + 5x + 3$
5) $27x^3 - 27x^2 + 18x - 4$
6) $x^2 + 2xy + y^2 - x - y - 12$
7) $(x + 2)(x +3)(x + 4)(x + 5) - 24$
8) $4x^4 - 32x^2 + 1$
9) $3(x^4 + x^2 + 1) - (x^2 + x + 1)^2$
10) $64x^4 + y^4$
11) $a^6 + a^4 + a^2b^2 + b^4 - b^6$
12) $x^3 + 3xy + y^3 - 1$
13) $4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1$
14) $x^8 + x + 1$
15) $x^8 + 3x^4 + 4$
16) $3x^2 + 22xy + 11x + 37y + 7y^2 +10$
17) $x^4 - 8x + 63$

CHUYÊN ĐỀ 2: HOÁN VỊ, TỔ HỢP

A. MỤC TIÊU:

* Bước đầu HS hiểu về chỉnh hợp, hoán vị và tổ hợp
* Vận dụng kiến thức vào một ssó bài toán cụ thể và thực tế
* Tạo hứng thú và nâng cao kỹ năng giải toán cho HS

B. KIẾN THỨC:

I. Chỉnh hợp:

1. định nghĩa: Cho một tập hợp X gồm n phần tử. Mỗi cách sắp xếp k phần tử của tập hợp X ($1 \le k \le n$) theo một thứ tự nhất định gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử ấy

Số tất cả các chỉnh hợp chập k của n phần tử được kí hiệu A_n^k

2. Tính số chỉnh chập k của n phần tử

$$\boxed{A_n^k = n(n - 1)(n - 2)...[n - (k - 1)]}$$

II. Hoán vị:

1. Định nghĩa: Cho một tập hợp X gồm n phần tử. Mỗi cách sắp xếp n phần tử của tập hợp X theo một thứ tự nhất định gọi là một hoán vị của n phần tử ấy

Số tất cả các hoán vị của n phần tử được kí hiệu P_n

2. Tính số hoán vị của n phần tử

(n! : n giai thừa)

$$\boxed{P_n = A_n^n = n(n - 1)(n - 2) \ldots 2 . 1 = n!}$$

III. Tổ hợp:

1. Định nghĩa: Cho một tập hợp X gồm n phần tử. Mỗi tập con của X gồm k phần tử trong n phần tử của tập hợp X ($0 \le k \le n$) gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử ấy

Số tất cả các tổ hợp chập k của n phần tử được kí hiệu C_n^k

2. Tính số tổ hợp chập k của n phần tử

$$\boxed{C_n^k = A_n^n : k! = \frac{n(n - 1)(n - 2)\ldots[n - (k - 1)]}{k!}}$$

C. Ví dụ:

1. Ví dụ 1:

Cho 5 chữ số: 1, 2, 3, 4, 5

a) có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số, các chữ số khác nhau, lập bởi ba trong các chữ số trên

b) Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số, các chữ số khác nhau, lập bởi cả 5 chữ số trên

c)Có bao nhiêu cách chọn ra ba chữ số trong 5 chữ số trên

Giải:

a) số tự nhiên có ba chữ số, các chữ số khác nhau, lập bởi ba trong các chữ số trên là chỉnh hợp chập 3 của 5 phần tử: $A_5^3 = 5.(5 - 1).(5 - 2) = 5 . 4 . 3 = 60$ số

b) số tự nhiên có 5 chữ số, các chữ số khác nhau, lập bởi cả 5 chữ số trên là hoán vị cua 5 phần tử (chỉnh hợp chập 5 của 5 phần tử):

A_5^5 = 5.(5 - 1).(5 - 2).(5 - 3).(5 - 4) = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120 số

c) cách chọn ra ba chữ số trong 5 chữ số trên là tổ hợp chập 3 của 5 phần tử:

$$C_5^3 = \frac{5.(5-1).(5-2)}{3!} = \frac{5\,.\,4\,.\,3}{3.(3-1)(3-2)} = \frac{60}{6} = 10 \text{ nhóm}$$

2. Ví dụ 2:

Cho 5 chữ số 1, 2, 3, 4, 5. Dùng 5 chữ số này:

a) Lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số trong đó không có chữ số nào lặp lại? Tính tổng các số lập được

b) lập được bao nhiêu số chẵn có 5 chữ số khác nhau?

c) Lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số, trong đó hai chữ số kề nhau phải khác nhau

d) Lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số, các chữ số khác nhau, trong đó có hai chữ số lẻ, hai chữ số chẵn

Giải

a) số tự nhiên có 4 chữ số, các chữ số khác nhau, lập bởi 4 trong các chữ số trên là chỉnh hợp chập 4 của 5 phần tử: A_5^4 = 5.(5 - 1).(5 - 2).(5 - 3) = 5 . 4 . 3 . 2 = 120 số

Trong mỗi hang (Nghìn, trăm, chục, đơn vị), mỗi chữ số có mặt: 120 : 5 = 24 lần

Tổng các chữ số ở mỗi hang: (1 + 2 + 3 + 4 + 5). 24 = 15 . 24 = 360

Tổng các số được lập: 360 + 3600 + 36000 + 360000 = 399960

b) chữ số tận cùng có 2 cách chọn (là 2 hoặc 4)

bốn chữ số trước là hoán vị của của 4 chữ số còn lại và có P_4 = 4! = 4 . 3 . 2 = 24 cách chọn

Tất cả có 24 . 2 = 48 cách chọn

c) Các số phải lập có dạng $\overline{abcde}$, trong đó : a có 5 cách chọn, b có 4 cách chọn (khác a), c có 4 cách chọn (khác b), d có 4 cách chọn (khác c), e có 4 cách chọn (khác d)

Tất cả có: 5 . 4 . 4 . 4 . 4 = 1280 số

d) Chọn 2 trong 2 chữ số chẵn, có 1 cách chọn

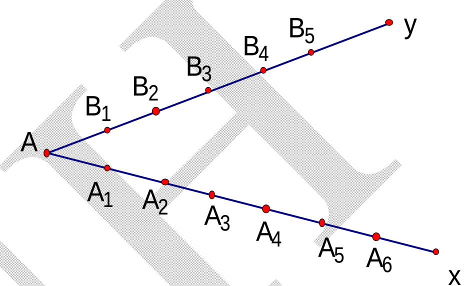
chọn 2 trong 3 chữ số lẻ, có 3 cách chọn. Các chữ số có thể hoán vị, do đó có:

1 . 3 . 4! =1 . 3 . 4 . 3 . 2 = 72 số

Bài 3: Cho $\widehat{xAy} \neq 180^0$. Trên Ax lấy 6 điểm khác A, trên Ay lấy 5 điểm khác A. trong 12 điểm nói trên (kể cả điểm A), hai điểm nào củng được nối với nhau bởi một đoạn thẳng. Có bao nhiêu tam giác mà các đỉnh là 3 trong 12 điểm ấy

Giải

Cách 1: Tam giác phải đếm gồm ba loại:



+ Loại 1: các tam giác có một đỉnh là A, đỉnh thứ 2 thuộc Ax (có 6 cách chọn), đỉnh thứ 3 thuộc Ay (có 5 cách chọn), gồm có: 6 . 5 = 30 tam giác

+ Loại 2: Các tam giác có 1 đỉnh là 1 trong 5 điểm B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 (có 5 cách chọn), hai đỉnh kia là 2 trong 6 điểm A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 (Có $C_6^2 = \frac{6.5}{2!} = \frac{30}{2} = 15$ cách chọn)

Gồm 5 . 15 = 75 tam giác

+ Loại 3: Các tam giác có 1 đỉnh là 1 trong 6 điểm A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 hai đỉnh kia là 2 trong 5 điểm B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 gồm có: 6. $C_5^2 = 6.\frac{5.4}{2!} = 6.\frac{20}{2} = 60$ tam giác

Tất cả có: 30 + 75 + 60 = 165 tam giác

Cách 2: số các tam giác chọn 3 trong 12 điểm ấy là $C_{12}^3 = \frac{12.11.10}{3!} = \frac{1320}{3.2} = \frac{1320}{6} = 220$

Số bộ ba điểm thẳng hang trong 7 điểm thuộc tia Ax là: $C_7^3 = \frac{7.6.5}{3!} = \frac{210}{3.2} = \frac{210}{6} = 35$

Số bộ ba điểm thẳng hang trong 6 điểm thuộc tia Ay là: $C_6^3 = \frac{6.5.4}{3!} = \frac{120}{3.2} = \frac{120}{6} = 20$

Số tam giác tạo thành: 220 - (35 + 20) = 165 tam giác

D. BÀI TẬP:

Bài 1: cho 5 số: 0, 1, 2, 3, 4. từ các chữ số trên có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên:

a) Có 5 chữ số gồm cả 5 chữ số ấy?

b) Có 4 chữ số, có các chữ số khác nhau?

c) có 3 chữ số, các chữ số khác nhau?

d) có 3 chữ số, các chữ số có thể giống nhau?

Bài 2: Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số lập bởi các chữ số 1, 2, 3 biết rằng số đó chia hết cho 9

Bài 3: Trên trang vở có 6 đường kẻ thẳng đứng và 5 đường kẻ nằm ngang đôi một cắt nhau. Hỏi trên trang vở đó có bao nhiêu hình chữ nhật

CHUYÊN ĐỀ 3 - LUỸ THỪA BẬC N CỦA MỘT NHỊ THỨC

A. MỤC TIÊU:

HS nắm được công thức khai triển luỹ thừa bậc n của một nhị thức: $(a + b)^n$

Vận dụng kiến thức vào các bài tập về xác định hệ số của luỹ thừa bậc n của một nhị thức, vận dụng vào các bài toán phân tích đa thức thành nhân tử

B. KIẾN THỨC VÀ BÀI TẬP VẬN DỤNG:

I. Nhị thức Niutơn: $\boxed{(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + ... + C_n^{n-1} ab^{n-1} + b^n}$

Trong đó: $C_n^k = \dfrac{n(n-1)(n-2)...[n-(k-1)]}{1.2.3...k}$

II. Cách xác định hệ số của khai triển Niutơn:

1. Cách 1: Dùng công thức $C_n^k = \dfrac{n(n-1)(n-2)...[n-(k-1)]}{k!}$

Chẳng hạn hệ số của hạng tử a^4b^3 trong khai triển của $(a + b)^7$ là

$C_7^4 = \dfrac{7.6.5.4}{4!} = \dfrac{7.6.5.4}{4.3.2.1} = 35$

Chú ý: a) $C_n^k = \dfrac{n!}{n!(n-k)!}$ với quy ước $0! = 1$ $\Rightarrow C_7^4 = \dfrac{7!}{4!.3!} = \dfrac{7.6.5.4.3.2.1}{4.3.2.1.3.2.1} = 35$

b) Ta có: $C_n^k = C_n^{k-1}$ nên $C_7^4 = C_7^3 = \dfrac{7.6.5.}{3!} = 35$

2. Cách 2: Dùng tam giác Patxcan

Đỉnh							**1**						

Dòng 1(n = 1)						**1**		**1**					
Dòng 2(n = 1)					**1**		**2**		**1**				
Dòng 3(n = 3)				**1**		**3**		**3**		**1**			
Dòng 4(n = 4)			**1**		**4**		**6**		**4**		**1**		
Dòng 5(n = 5)		**1**		**5**		**10**		**1 0**		**5**		**1**	
Dòng 6(n = 6)	**1**		**6**		**15**		**20**		**15**		**6**		**1**

Trong tam giác này, hai cạnh bên gồm các số 1; dòng k + 1 được thành lập từ dòng k ($k \geq 1$), chẳng hạn ở dòng 2 (n = 2) ta có 2 = 1 + 1, dòng 3 (n = 3): 3 = 2 + 1, 3 = 1 + 2 dòng 4 (n = 4): 4 = 1 + 3, 6 = 3 + 3, 4 = 3 + 1, …

Với n = 4 thì: $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Với n = 5 thì: $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Với n = 6 thì: $(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2 b^4 + 6ab^5 + b^6$

3. Cách 3:

Tìm hệ số của hạng tử đứng sau theo các hệ số của hạng tử đứng trước:

a) Hệ số của hạng tử thứ nhất bằng 1

b) Muốn có hệ số của của hạng tử thứ k + 1, ta lấy hệ số của hạng tử thứ k nhân với số mũ của biến trong hạng tử thứ k rồi chia cho k

Chẳng hạn: $(a + b)^4 = a^4 + \frac{1.4}{1}a^3b + \frac{4.3}{2}a^2b^2 + \frac{4.3.2}{2.3}ab^3 + \frac{4.3.2.}{2.3.4}b^5$

Chú ý rằng: các hệ số của khai triển Niutơn có tính đối xứng qua hạng tử đứng giữa, nghĩa là các hạng tử cách đều hai hạng tử đầu và cuối có hệ số bằng nhau

$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n - 1)}{1.2}a^{n-2}b^2 + … + \frac{n(n - 1)}{1.2}a^2b^{n-2} + na^{n-1}b^{n-1} + b^n$

III. Ví dụ:

1. Ví dụ 1: phân tích đa thức sau thành nhân tử

a) $A = (x + y)^5 - x^5 - y^5$

Cách 1: khai triển $(x + y)^5$ rồi rút gọn A

$A = (x + y)^5 - x^5 - y^5 = (x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5) - x^5 - y^5$

$= 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 = 5xy(x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3)$

$= 5xy [(x + y)(x^2 - xy + y^2) + 2xy(x + y)] = 5xy(x + y)(x^2 + xy + y^2)$

Cách 2: $A = (x + y)^5 - (x^5 + y^5)$

$x^5 + y^5$ chia hết cho $x + y$ nên chia $x^5 + y^5$ cho $x + y$ ta có:

$x^5 + y^5 = (x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$ nên A có nhân tử chung là $(x + y)$, đặt $(x + y)$ làm nhân tử chung, ta tìm được nhân tử còn lại

b) $B = (x + y)^7 - x^7 - y^7 = (x^7+7x^6y +21x^5y^2 + 35x^4y^3 +35x^3y^4 +21x^2y^5 \ 7xy^6 + y^7) - x^7 - y^7$

$= 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6$

$= 7xy[(x^5 + y^5) + 3(x^4y + xy^4) + 5(x^3y^2 + x^2y^3)]$

$= 7xy \{[(x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)] + 3xy(x + y)(x^2 - xy + y^2) + 5x^2y^2(x + y)\}$

$= 7xy(x + y)[x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 + 3xy(x^2 + xy + y^2) + 5x^2y^2]$

$= 7xy(x + y)[x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 + 3x^3y - 3x^2y^2 + 3xy^3 + 5x^2y^2]$

$= 7xy(x + y)[(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) + 2xy (x^2 + y^2) + x^2y^2] = 7xy(x + y)(x^2 + xy + y^2)^2$

Ví dụ 2:Tìm tổng hệ số các đa thức có được sau khi khai triển

a) $(4x - 3)^4$

Cách 1: Theo cônh thức Niu tơn ta có:

$(4x - 3)^4 = 4.(4x)^3.3 + 6.(4x)^2.3^2 - 4. 4x. 3^3 + 3^4 = 256x^4 - 768x^3 + 864x^2 - 432x + 81$

Tổng các hệ số: $256 - 768 + 864 - 432 + 81 = 1$

b) Cách 2: Xét đẳng thức $(4x - 3)^4 = c_0x^4 + c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4$

Tổng các hệ số: $c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4$

Thay x = 1 vào đẳng thức trên ta có: $(4.1 - 3)^4 = c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4$

Vậy: $c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 1$

* Ghi chú: Tổng các hệ số khai triển của một nhị thức, một đa thức bằng giá trị của đa thức đó tại x = 1

C. BÀI TẬP:

Bài 1: Phân tích thành nhân tử

a) $(a + b)^3 - a^3 - b^3$ b) $(x + y)^4 + x^4 + y^4$

Bài 2: Tìm tổng các hệ số có được sau khi khai triển đa thức

a) $(5x - 2)^5$ b) $(x^2 + x - 2)^{2010} + (x^2 - x + 1)^{2011}$

CHUÊN ĐỀ 4 - CÁC BÀI TOÁN VỀ SỰ CHIA HẾT CỦA SỐ NGUYÊN

A. MỤC TIÊU:

* Củng cố, khắc sâu kiến thức về các bài toán chia hết giữa các số, các đa thức

* HS tiếp tục thực hành thành thạo về các bài toán chứng minh chia hết, không chia hết, sốnguyên tố, số chính phương…

* Vận dụng thành thạo kỹ năng chứng minh về chia hết, không chia hết… vào các bài toán cụ thể

B.KIẾN THỨC VÀ CÁC BÀI TOÁN:

I. Dạng 1: Chứng minh quan hệ chia hết

1. Kiến thức:

* Để chứng minh A(n) chia hết cho một số m ta phân tích A(n) thành nhân tử có một nhân tử làm hoặc bội của m, nếu m là hợp số thì ta lại phân tích nó thành nhân tử có các đoi một nguyên tố cùng nhau, rồi chứng minh A(n) chia hết cho các số đó

* Chú ý:

+ Với k số nguyên liên tiếp bao giờ củng tồn tại một bội của k

+ Khi chứng minh A(n) chia hết cho m ta xét mọi trường hợp về số dư khi chia A(n) cho m

+ Với mọi số nguyên a, b và số tự nhiên n thì:

+) $a^n - b^n$ chia h□t cho a - b ($a \neq - b$) +) $(a + 1)^n$ là BS(a)+ 1

+) $a^{2n+1} + b^{2n+1}$ chia h□t cho a + b +)$(a - 1)^{2n}$ là B(a) + 1

+ $(a + b)^n = B(a) + b^n$ +) $(a - 1)^{2n+1}$ là B(a) - 1

2. Bài tập:

2. Các bài toán

<u>Bài 1</u>: chứng minh rằng

a) $2^{51} - 1$ chia hết cho 7 b) $2^{70} + 3^{70}$ chia hết cho 13

c) $17^{19} + 19^{17}$ chi hết cho 18 d) $36^{63} - 1$ chia hết cho 7 nhưng không chia hết cho 37

e) $2^{4n} - 1$ chia hết cho 15 với $n \in N$

Giải

a) $2^{51} - 1 = (2^3)^{17} - 1 \vdots 2^3 - 1 = 7$

b) $2^{70} + 3^{70} (2^2)^{35} + (3^2)^{35} = 4^{35} + 9^{35} \vdots 4 + 9 = 13$

c) $17^{19} + 19^{17} = (17^{19} + 1) + (19^{17} - 1)$

$17^{19} + 1 \vdots 17 + 1 = 18$ và $19^{17} - 1 \vdots 19 - 1 = 18$ nên $(17^{19} + 1) + (19^{17} - 1)$

hay $17^{19} + 19^{17} \vdots 18$

d) $36^{63} - 1 \vdots 36 - 1 = 35 \vdots 7$

$36^{63} - 1 = (36^{63} + 1) - 2$ chi cho 37 dư - 2

e) $2^{4n} - 1 = (2^4)^n - 1 \vdots 2^4 - 1 = 15$

<u>Bài 2</u>: chứng minh rằng

a) $n^5 - n$ chia hết cho 30 với $n \in N$;

b) $n^4 - 10n^2 + 9$ chia hết cho 384 với mọi n lẻ $n \in Z$

c) $10^n + 18n - 28$ chia hết cho 27 với $n \in N$;

Giải:

a) $n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1) = (n - 1).n.(n + 1)(n^2 + 1)$ chia hết cho 6 vì $(n - 1).n.(n+1)$ là tích của ba số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 2 và 3 (*)

Mặt khác $n^5 - n = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n(n^2 - 1).(n^2 - 4 + 5) = n(n^2 - 1).(n^2 - 4) + 5n(n^2 - 1)$

$= (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2) + 5n(n^2 - 1)$

Vì $(n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)$ là tích của 5 số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 5

$5n(n^2 - 1)$ chia hết cho 5

Suy ra $(n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2) + 5n(n^2 - 1)$ chia hết cho 5 (**)

Từ (*) và (**) suy ra đpcm

b) Đặt $A = n^4 - 10n^2 + 9 = (n^4 - n^2) - (9n^2 - 9) = (n^2 - 1)(n^2 - 9) = (n - 3)(n - 1)(n + 1)(n + 3)$

Vì n lẻ nên đặt $n = 2k + 1$ ($k \in Z$) thì

$A = (2k - 2).2k.(2k + 2)(2k + 4) = 16(k - 1).k.(k + 1).(k + 2) \Rightarrow$ A chia hết cho 16 (1)

Và $(k - 1).k.(k + 1).(k + 2)$ là tích của 4 số nguyên liên tiếp nên A có chứa bội của 2, 3, 4 nên A là bội của 24 hay A chia hết cho 24 (2)

Từ (1) và (2) suy ra A chia hết cho 16. 24 = 384

c) $10^n + 18n - 28 = (10^n - 9n - 1) + (27n - 27)$

+ Ta có: $27n - 27 \vdots 27$ (1)

+ $10^n - 9n - 1 = [(\underbrace{9...9}_{n} + 1) - 9n - 1] = \underbrace{9...9}_{n} - 9n = 9(\underbrace{1...1}_{n} - n) \vdots 27$ (2)

vì $9 \vdots 9$ và $\underbrace{1...1}_{n} - n \vdots 3$ do $\underbrace{1...1}_{n} - n$ là một số có tổng các chữ số chia hết cho 3

Từ (1) và (2) suy ra đpcm

3. Bài 3: Chứng minh rằng với mọi số nguyên a thì

a) $a^3 - a$ chia hết cho 3

b) $a^7 - a$ chia hết cho 7

Giải

a) $a^3 - a = a(a^2 - 1) = (a - 1) a (a + 1)$ là tích của ba số nguyên liên tiếp nên tồn tại một số là bội của 3 nên $(a - 1) a (a + 1)$ chia hết cho 3

b)) $a^7 - a = a(a^6 - 1) = a(a^2 - 1)(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$

Nếu $a = 7k$ ($k \in Z$) thì a chia hết cho 7

Nếu $a = 7k + 1$ ($k \in Z$) thì $a^2 - 1 = 49k^2 + 14k$ chia hết cho 7

Nếu $a = 7k + 2$ ($k \in Z$) thì $a^2 + a + 1 = 49k^2 + 35k + 7$ chia hết cho 7

Nếu $a = 7k + 3$ ($k \in Z$) thì $a^2 - a + 1 = 49k^2 + 35k + 7$ chia hết cho 7

Trong trường hợp nào cũng có một thừa số chia hết cho 7

Vậy: $a^7 - a$ chia hết cho 7

Bài 4: Chứng minh rằng $A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ...+ 100^3$ chia hết cho $B = 1 + 2 + 3 + ... + 100$

Giải

Ta có: $B = (1 + 100) + (2 + 99) + ...+ (50 + 51) = 101. 50$

Để chứng minh A chia hết cho B ta chứng minh A chia hết cho 50 và 101

Ta có: $A = (1^3 + 100^3) + (2^3 + 99^3) + ... +(50^3 + 51^3)$

$= (1 + 100)(1^2 + 100 + 100^2) + (2 + 99)(2^2 + 2. 99 + 99^2) + ... + (50 + 51)(50^2 + 50. 51 + 51^2) = 101(1^2 + 100 + 100^2 + 2^2 + 2. 99 + 99^2 + ... + 50^2 + 50. 51 + 51^2)$ chia hết cho 101 (1)

Lại có: $A = (1^3 + 99^3) + (2^3 + 98^3) + ... + (50^3 + 100^3)$

Mỗi số hạng trong ngoặc đều chia hết cho 50 nên A chia hết cho 50 (2)

Từ (1) và (2) suy ra A chia hết cho 101 và 50 nên A chi hết cho B

Bài tập về nhà

Chứng minh rằng:

a) $a^5 – a$ chia hết cho 5

b) $n^3 + 6n^2 + 8n$ chia hết cho 48 với mọi n chẵn

c) Cho a l à số nguyên tố lớn hơn 3. Cmr $a^2 – 1$ chia hết cho 24

d) Nếu $a + b + c$ chia hết cho 6 thì $a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho 6

e) 2009^{2010} không chia hết cho 2010

f) $n^2 + 7n + 22$ không chia hết cho 9

Dạng 2: Tìm số dư của một phép chia

Bài 1:

Tìm số dư khi chia 2^{100}

a)cho 9, b) cho 25, c) cho 125

Giải

a) Luỹ thừa của 2 sát với bội của 9 là $2^3 = 8 = 9 - 1$

Ta có : $2^{100} = 2. (2^3)^{33} = 2.(9 - 1)^{33} = 2.[B(9) - 1] = B(9) - 2 = B(9) + 7$

Vậy: 2^{100} chia cho 9 thì dư 7

b) Tương tự ta có: $2^{100} = (2^{10})^{10} = 1024^{10} = [B(25) - 1]^{10} = B(25) + 1$

Vậy: 2^{100} chia chop 25 thì dư 1

c)Sử dụng công thức Niutơn:

$2^{100} = (5 - 1)^{50} = (5^{50} - 5.\ 5^{49} + \ldots + \frac{50.49}{2}.\ 5^2 - 50\ .\ 5\ ) + 1$

Không kể phần hệ số của khai triển Niutơn thì 48 số hạng đầu đã chứa thừa số 5 với số mũ lớn hơn hoặc bằng 3 nên đều chia hết cho $5^3 = 125$, hai số hạng tiếp theo: $\frac{50.49}{2}.\ 5^2 - 50.5$ cũng chia hết cho 125 , số hạng cuối cùng là 1

Vậy: 2^{100} = B(125) + 1 nên chia cho 125 thì dư 1

Bài 2:

Viết số 1995^{1995} thành tổng của các số tự nhiên . Tổng các lập phương đó chia cho 6 thì dư bao nhiêu?

Giải

Đặt $1995^{1995} = a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Gọi $S = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \ldots + a_n^3 = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \ldots + a_n^3 + a - a$

$= (a_1^3 - a_1) + (a_2^3 - a_2) + \ldots + (a_n^3 - a_n) + a$

Mỗi dấu ngoặc đều chia hết cho 6 vì mỗi dấu ngoặc là tích của ba số tự nhiên liên tiếp. Chỉ cần tìm số dư khi chia a cho 6

1995 là số lẻ chia hết cho 3, nên a củng là số lẻ chia hết cho 3, do đó chia cho 6 dư 3

Bài 3: Tìm ba chữ số tận cùng của 2^{100} viết trong hệ thập phân

giải

Tìm 3 chữ số tận cùng là tìm số dư của phép chia 2^{100} cho 1000

Trước hết ta tìm số dư của phép chia 2^{100} cho 125

Vận dụng bài 1 ta có 2^{100} = B(125) + 1 mà 2^{100} là số chẵn nên 3 chữ số tận cùng của nó chỉ có thể là 126, 376, 626 hoặc 876

Hiển nhiên 2^{100} chia hết cho 8 vì $2^{100} = 16^{25}$ chi hết cho 8 nên ba chữ số tận cùng của nó chia hết cho 8

trong các số 126, 376, 626 hoặc 876 chỉ có 376 chia hết cho 8

Vậy: 2^{100} viết trong hệ thập phân có ba chữ số tận cùng là 376

Tổng quát: Nếu n là số chẵn không chia hết cho 5 thì 3 chữ số tận cùng của nó là 376

Bài 4: Tìm số dư trong phép chia các số sau cho 7

a) $22^{22} + 55^{55}$ b) 3^{1993}

c) $1992^{1993} + 1994^{1995}$ d) $3^{2^{1930}}$

Giải

a) ta có: $22^{22} + 55^{55} = (21 + 1)^{22} + (56 – 1)^{55} = (BS\ 7 +1)^{22} + (BS\ 7 – 1)^{55}$

$= BS\ 7 + 1 + BS\ 7 - 1 = BS\ 7$ nên $22^{22} + 55^{55}$ chia 7 dư 0

b) Luỹ thừa của 3 sát với bội của 7 là $3^3 = BS\ 7 – 1$

Ta thấy $1993 = BS\ 6 + 1 = 6k + 1$, do đó:

$3^{1993} = 3^{6k + 1} = 3.(3^3)^{2k} = 3(BS\ 7 – 1)^{2k} = 3(BS\ 7 + 1) = BS\ 7 + 3$

c) Ta thấy 1995 chia hết cho 7, do đó:

$1992^{1993} + 1994^{1995} = (BS\ 7 – 3)^{1993} + (BS\ 7 – 1)^{1995} = BS\ 7 – 3^{1993} + BS\ 7 – 1$

Theo câu b ta có $3^{1993} = BS\ 7 + 3$ nên

$1992^{1993} + 1994^{1995} = BS\ 7 – (BS\ 7 + 3) – 1 = BS\ 7 – 4$ nên chia cho 7 thì dư 3

d) $3^{2^{1930}} = 3^{2860} = 3^{3k + 1} = 3.3^{3k} = 3(BS\ 7 – 1) = BS\ 7 – 3$ nên chia cho 7 thì dư 4

Bài tập về nhà

Tìm số d ư khi:

a) 2^{1994} cho 7

b) $3^{1998} + 5^{1998}$ cho 13

c) $A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ...+ 99^3$ chia cho $B = 1 + 2 + 3 + ... + 99$

Dạng 3: Tìm điều kiện để xảy ra quan hệ chia hết

Bài 1: Tìm $n \in Z$ để giá trị của biểu thức $A = n^3 + 2n^2 - 3n + 2$ chia hết cho giá trị của biểu thức $B = n^2 - n$

Giải

Chia A cho B ta có: $n^3 + 2n^2 - 3n + 2 = (n + 3)(n^2 - n) + 2$

Để A chia hết cho B thì 2 phải chia hết cho $n^2 - n = n(n - 1)$ do đó 2 chia hết cho n, ta có:

n	1	- 1	2	- 2
n - 1	0	- 2	1	- 3

n(n - 1)	0	2	2	6
	loại			loại

Vậy: Để giá trị của biểu thức A = $n^3 + 2n^2 - 3n + 2$ chia hết cho giá trị của biểu thức B = $n^2 - n$ thì n $\in \{-1; 2\}$

Bài 2:

a) Tìm n $\in$ N để $n^5 + 1$ chia hết cho $n^3 + 1$

b) Giải bài toán trên nếu n $\in$ Z

Giải

Ta có: $n^5 + 1 \vdots n^3 + 1 \Leftrightarrow n^2(n^3 + 1) - (n^2 - 1) \vdots n^3 + 1 \Leftrightarrow (n + 1)(n - 1) \vdots n^3 + 1$

$\Leftrightarrow (n + 1)(n - 1) \vdots (n + 1)(n^2 - n + 1) \Leftrightarrow n - 1 \vdots n^2 - n + 1$ (Vì $n + 1 \neq 0$)

a) Nếu n = 1 thì $0 \vdots 1$

Nếu n > 1 thì $n - 1 < n(n - 1) + 1 < n^2 - n + 1$ nên không thể xẩy ra $n - 1 \vdots n^2 - n + 1$

Vậy giá trụ của n tìm được là n = 1

b) $n - 1 \vdots n^2 - n + 1 \Rightarrow n(n - 1) \vdots n^2 - n + 1 \Leftrightarrow (n^2 - n + 1) - 1 \vdots n^2 - n + 1$

$\Rightarrow 1 \vdots n^2 - n + 1$. Có hai trường hợp xẩy ra:

+ $n^2 - n + 1 = 1 \Leftrightarrow n(n - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 0 \\ n = 1 \end{array}\right.$ (Tm đề bài)

+ $n^2 - n + 1 = -1 \Leftrightarrow n^2 - n + 2 = 0$ (Vô nghiệm)

Bài 3: Tìm số nguyên n sao cho:

a) $n^2 + 2n - 4 \vdots 11$

b) $2n^3 + n^2 + 7n + 1 \vdots 2n - 1$

c) $n^4 - 2n^3 + 2n^2 - 2n + 1 \vdots n^4 - 1$

d) $n^3 - n^2 + 2n + 7 \vdots n^2 + 1$

Giải

a) Tách $n^2 + 2n - 4$ thành tổng hai hạng tử trong đó có một hạng tử là B(11)

$n^2 + 2n - 4 \vdots 11 \Leftrightarrow (n^2 - 2n - 15) + 11 \vdots 11 \Leftrightarrow (n - 3)(n + 5) + 11 \vdots 11$

$\Leftrightarrow (n - 3)(n + 5) \vdots 11 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n - 3 \vdots 11 \\ n + 5 \vdots 11 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = B(11) + 3 \\ n = B(11) - 5 \end{array}\right.$

b) $2n^3 + n^2 + 7n + 1 = (n^2 + n + 4)(2n - 1) + 5$

Để $2n^3 + n^2 + 7n + 1 \vdots 2n - 1$ thì $5 \vdots 2n - 1$ hay $2n - 1$ là Ư(5) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2n - 1 = -5 \\ 2n - 1 = -1 \\ 2n - 1 = 1 \\ 2n - 1 = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = -2 \\ n = 0 \\ n = 1 \\ n = 3 \end{array}\right.$

Vậy: $n \in \{-2; 0; 1; 3\}$ thì $2n^3 + n^2 + 7n + 1 \vdots 2n - 1$

c) $n^4 - 2n^3 + 2n^2 - 2n + 1 \vdots n^4 - 1$

Đặt A = $n^4 - 2n^3 + 2n^2 - 2n + 1 = (n^4 - n^3) - (n^3 - n^2) + (n^2 - n) - (n - 1)$

$= n^3(n - 1) - n^2(n - 1) + n(n - 1) - (n - 1) = (n - 1)(n^3 - n^2 + n - 1) = (n - 1)^2(n^2 + 1)$

$B = n^4 - 1 = (n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)$

A chia hết cho b nên $n \neq \pm 1 \Rightarrow$ A chia hết cho B $\Leftrightarrow n - 1 \vdots n + 1 \Leftrightarrow (n + 1) - 2 \vdots n + 1$

$\Leftrightarrow 2 \vdots n + 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n + 1 = -2 \\ n + 1 = -1 \\ n + 1 = 1 \\ n + 1 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = -3 \\ n = -2 \\ n = 0 \\ n = 1 \text{ (không Tm)} \end{array}\right.$

Vậy: $n \in \{-3; -2; 0\}$ thì $n^4 - 2n^3 + 2n^2 - 2n + 1 \vdots n^4 - 1$

d) Chia $n^3 - n^2 + 2n + 7$ cho $n^2 + 1$ được thương là $n - 1$, dư $n + 8$

Để $n^3 - n^2 + 2n + 7 \vdots n^2 + 1$ thì $n + 8 \vdots n^2 + 1 \Rightarrow (n + 8)(n - 8) \vdots n^2 + 1 \Leftrightarrow 65 \vdots n^2 + 1$

Lần lượt cho $n^2 + 1$ bằng 1; 5; 13; 65 ta được n bằng 0; ± 2; ± 8

Thử lại ta có n = 0; n = 2; n = 8 (T/m)

Vậy: $n^3 - n^2 + 2n + 7 \vdots n^2 + 1$ khi n = 0, n = 8

Bài tập về nhà:

Tìm số nguyên n để:

a) $n^3 – 2$ chia hết cho $n – 2$

b) $n^3 – 3n^2 – 3n – 1$ chia hết cho $n^2 + n + 1$

c) $5^n – 2^n$ chia hết cho 63

Dạng 4: Tồn tại hay không tồn tại sự chia hết

Bài 1: Tìm $n \in N$ sao cho $2^n – 1$ chia hết cho 7

Giải

Nếu n = 3k ($k \in N$) thì $2^n – 1 = 2^{3k} – 1 = 8^k - 1$ chia hết cho 7

Nếu n = 3k + 1 (k $\in$ N) thì $2^n - 1 = 2^{3k+1} - 1 = 2(2^{3k} - 1) + 1$ = BS 7 + 1

Nếu n = 3k + 2 (k $\in$ N) thì $2^n - 1 = 2^{3k+2} - 1 = 4(2^{3k} - 1) + 3$ = BS 7 + 3

V ậy: $2^n - 1$ chia hết cho 7 khi n = BS 3

Bài 2: Tìm n $\in$ N để:

a) $3^n - 1$ chia hết cho 8

b) $A = 3^{2n+3} + 2^{4n+1}$ chia hết cho 25

c) $5^n - 2^n$ chia hết cho 9

Giải

a) Khi n = 2k (k$\in$ N) thì $3^n - 1 = 3^{2k} - 1 = 9^k - 1$ chia hết cho 9 – 1 = 8

Khi n = 2k + 1 (k$\in$ N) thì $3^n - 1 = 3^{2k+1} - 1 = 3.(9^k - 1) + 2$ = BS 8 + 2

Vậy : $3^n - 1$ chia hết cho 8 khi n = 2k (k$\in$ N)

b) $A = 3^{2n+3} + 2^{4n+1} = 27 . 3^{2n} + 2.2^{4n} = (25 + 2) 3^{2n} + 2.2^{4n} = 25. 3^{2n} + 2.3^{2n} + 2.2^{4n}$

= BS 25 + $2(9^n + 16^n)$

Nếu n = 2k +1(k$\in$ N) thì $9^n + 16^n = 9^{2k+1} + 16^{2k+1}$ chia hết cho 9 + 16 = 25

Nếu n = 2k (k$\in$ N) thì 9^n có chữ số tận cùng bằng 1 , còn 16^n có chữ số tận cùng bằng 6 suy ra $2((9^n + 16^n)$ có chữ số tận cùng bằng 4 nên A không chia hết cho 5 nên không chia hết cho 25

c) Nếu n = 3k (k$\in$ N) thì $5^n - 2^n = 5^{3k} - 2^{3k}$ chia hết cho $5^3 - 2^3 = 117$ nên chia hết cho 9

Nếu n = 3k + 1 thì $5^n - 2^n = 5.5^{3k} - 2.2^{3k} = 5(5^{3k} - 2^{3k}) + 3. 2^{3k}$ = BS 9 + $3. 8^k$

= BS 9 + 3(BS 9 – 1)^k = BS 9 + BS 9 + 3

Tương tự: nếu n = 3k + 2 thì $5^n - 2^n$ không chia hết cho 9

CHUYEÂN ÑEÀ 5: SOÁ CHÍNH PHÖÔNG

I. Soá chính phöông:

A. Moät soá kieán thöùc:

Soá chính phöông: soá baèng bình phöông cuûa moät soá khaùc

Ví duï:

$4 = 2^2$; $9 = 3^2$

$A = 4n^2 + 4n + 1 = (2n + 1)^2 = B^2$

+ Số chính phương không tận cng bởi cc chữ số: 2, 3, 7, 8

+ Số chính phương chia hết cho 2 thì chia hết cho 4, chia hết cho 3 thì chia hết cho 9, chia hết cho 5 thì chia hết cho 25, chia hết cho 2^3 thì chia hết cho 2^4,

+ Số $\underbrace{11...1}_{n}$ = a thì $\underbrace{99...9}_{n} = 9a \Rightarrow 9a + 1 = \underbrace{99...9}_{n} + 1 = 10^n$

B. Moät soá baøi toaùn:

1. Baøi 1:

Chöùng minh raèng: Moät soá chính phöông chia cho 3, cho 4 chæ coù theå dö 0 hoaëc 1

Giaûi

Goïi $A = n^2$ $(n \in N)$

a) xeùt $n = 3k$ $(k \in N) \Rightarrow A = 9k^2$ neân chia heát cho 3

$n = 3k \pm 1$ $(k \in N) \Rightarrow A = 9k^2 \pm 6k + 1$, chia cho 3 dö 1

Vaäy: soá chính phöông chia cho 3 dö 0 hoaëc 1

b) $n = 2k$ $(k \in N)$ thì $A = 4k^2$ chia heát cho 4

$n = 2k +1$ $(k \in N)$ thì $A = 4k^2 + 4k + 1$ chia cho 4 dö 1

Vaäy: soá chính phöông chia cho 4 dö 0 hoaëc 1

Chuù yù: + Soá chính phöông chaün thì chia heát cho 4

+ Soá chính phöông leû thì chia cho 4 thì dö 1(Chia 8 cuõng dö 1)

2. Bai 2: Soi nao trong cac soi sau la soi chính phöông

a) $M = 1992^2 + 1993^2 + 1994^2$

b) $N = 1992^2 + 1993^2 + 1994^2 + 1995^2$

c) $P = 1 + 9^{100} + 94^{100} + 1994^{100}$

d) $Q = 1^2 + 2^2 + ...+ 100^2$

e) $R = 1^3 + 2^3 + ... + 100^3$

Giai

a) cac soi 1993^2, 1994^2 chia cho 3 dö 1, con 1992^2 chia het cho 3 $\Rightarrow$ M chia cho 3 dö 2 do ñoi M khong la soi chính phöông

b) $N = 1992^2 + 1993^2 + 1994^2 + 1995^2$ gom tong hai soi chính phöông chan chia het cho 4, va hai soi chính phöông lei nen chia 4 dö 2 suy ra N khong la so chính phöông

c) $P = 1 + 9^{100} + 94^{100} + 1994^{100}$ chia 4 dö 2 nen khong la soi chính phöông

d) $Q = 1^2 + 2^2 + ...+ 100^2$

Soi Q gom 50 soi chính phöông chan chia het cho 4, 50 soi chính phöông le, moi soi chia 4 dö 1 nen tong 50 soi lei ñoi chia 4 thì dö 2 do ñoi Q chia 4 thì dö 2 nen Q khong la soi chính phöông

e) $R = 1^3 + 2^3 + ... + 100^3$

Goi $A_k = 1 + 2 +... + k = \frac{k(k + 1)}{2}$, $A_{k-1} = 1 + 2 +... + k = \frac{k(k - 1)}{2}$

Ta co: $A_k^2 – A_{k-1}^2 = k^3$ khi ñoi:

$1^3 = A_1^2$

$2^3 = A_2^2 – A_1^2$

....

$n^3 = A_n^2 = A_{n-1}^2$

Cong vei theo vei cac ñang thöc tren ta co:

$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = A_n^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \left[\frac{100(100+1)}{2}\right]^2 = (50.101)^2$ laø soá chính phöông

3. Baøi 3:

CMR: Với mọi $n \in N$ thì caùc soá sau laø số chính phương.

a) $A = (10^n + 10^{n-1} + ... + .10 + 1)(10^{n+1} + 5) + 1$

$A = (\underbrace{11.....1}_{n})(10^{n+1} + 5) + 1 = \frac{10^{n+1} - 1}{10 - 1}.(10^{n+1} + 5) + 1$

Đặt $a = 10^{n+1}$ thì $A = \frac{a - 1}{9}(a + 5) + 1 = \frac{a^2 + 4a - 5 + 9}{9} = \frac{a^2 + 4a + 4}{9} = \left(\frac{a + 2}{3}\right)^2$

b) $B = \underbrace{111.....1}_{n}\underbrace{555.....5}_{n-1}6$ (coù n số 1 vaø n-1 số 5)

$B = \underbrace{111.....1}_{n}\underbrace{555.....5}_{n} + 1 = \underbrace{111.....1}_{n}.\ 10^n + \underbrace{555.....5}_{n} + 1 = \underbrace{111.....1}_{n}.\ 10^n + 5\left(\underbrace{111.....1}_{n}\right) + 1$

Ñaët $\underbrace{11.....1}_{n} = a$ thì $10^n = 9a + 1$ neân

$B = a(9a + 1) + 5a + 1 = 9a^2 + 6a + 1 = (3a + 1)^2 = \underbrace{33....3}_{n-1}4^2$

c) $C = \underbrace{11.....1}_{2n}. + \underbrace{44.....4}_{n} + 1$

Ñaët $a = \underbrace{11.....1}_{n}$ Thì $C = \underbrace{11.....1}_{n}\underbrace{11.....1}_{n} + 4.\ \underbrace{11.....1}_{n} + 1 = a.\ 10^n + a + 4a + 1$

$= a(9a + 1) + 5a + 1 = 9a^2 + 6a + 1 = (3a + 1)^2$

d) $D = \underbrace{99....9}_{n}8\underbrace{00.....0}_{n}1$. Ñaët $\underbrace{99....9}_{n} = a \Rightarrow 10^n = a + 1$

$D = \underbrace{99....9}_{n}.\ 10^{n+2} + 8.\ 10^{n+1} + 1 = a\ .\ 100\ .\ 10^n + 80.\ 10^n + 1$

$= 100a(a + 1) + 80(a + 1) + 1 = 100a^2 + 180a + 81 = (10a + 9)^2 = (\underbrace{99....9}_{n+1})^2$

e) $E = \underbrace{11.....1}_{n}\underbrace{22.....2}_{n+1}5 = \underbrace{11.....1}_{n}\underbrace{22.....2}_{n+1}00 + 25 = \underbrace{11.....1}_{n}.10^{n+2} + 2.\ \underbrace{11.....1}_{n}00 + 25$

$= [a(9a + 1) + 2a]100 + 25 = 900a^2 + 300a + 25 = (30a + 5)^2 = (\underbrace{33.....3}_{n}5)^2$

f) F = $\underbrace{44.....4}_{100}$ = 4.$\underbrace{11.....1}_{100}$ la so chính phöông thì $\underbrace{11.....1}_{100}$ la so chính phöông

So $\underbrace{11.....1}_{100}$ la so le nen no la so chính phöông thì chia cho 4 phai dö 1

That vay: $(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$ chia 4 dö 1

$\underbrace{11.....1}_{100}$ co hai chö so tan cung la 11 nen chia cho 4 thì dö 3

vay $\underbrace{11.....1}_{100}$ khong la so chính phöông nen F = $\underbrace{44.....4}_{100}$ khong la so chính phöông

Baøi 4:

a) Cho cc số A = $\underbrace{11........11}_{2m}$; B = $\underbrace{11.......11}_{m+1}$; C = $\underbrace{66.....66}_{m}$

CMR: A + B + C + 8 l số chính phương .

Ta co: A $\frac{10^{2m}-1}{9}$; B = $\frac{10^{m+1}-1}{9}$; C = $6.\frac{10^m-1}{9}$ Nen:

A + B + C + 8 = $\frac{10^{2m}-1}{9}$ + $\frac{10^{m+1}-1}{9}$ + $6.\frac{10^m-1}{9}$ + 8 = $\frac{10^{2m}-1+10^{m+1}-1+6(10^m-1)+72}{9}$

$$= \frac{10^{2m}-1+10.10^m-1+6.10^m-6+72}{9} = \frac{\left(10^m\right)^2+16.10^m+64}{9} = \left(\frac{10^m+8}{3}\right)^2$$

b) CMR: Với mọi x,y $\in$ Z thì A = $(x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y) + y^4$ la số chính phương.

$A = (x^2 + 5xy + 4y^2)(x^2 + 5xy + 6y^2) + y^4$

$= (x^2 + 5xy + 4y^2)[(x^2 + 5xy + 4y^2) + 2y^2) + y^4$

$= (x^2 + 5xy + 4y^2)^2 + 2(x^2 + 5xy + 4y^2).y^2 + y^4 = [(x^2 + 5xy + 4y^2) + y^2)^2$

$= (x^2 + 5xy + 5y^2)^2$

Baøi 5: Tìm so nguyen döông n ñe cac bieu thöc sau la so chính phöông

a) $n^2 - n + 2$ b) $n^5 - n + 2$

Giai

a) Vôi n = 1 thì $n^2 - n + 2 = 2$ khong la so chính phöông

Vôi n = 2 thì $n^2 - n + 2 = 4$ la so chính phöông

Vôi n > 2 thì $n^2 – n + 2$ khong la so chính phöông Vì

$(n – 1)^2 = n^2 – (2n – 1) < n^2 – (n - 2) < n^2$

b) Ta co $n^5 – n$ chia het cho 5 Vì

$n^5 – n = (n^2 – 1).n.(n^2 + 1)$

Vôi n = 5k thì n chia het cho 5

Vôi n = 5k $\pm$ 1 thì $n^2 – 1$ chia het cho 5

Vôi n = 5k $\pm$ 2 thì $n^2 + 1$ chia het cho 5

Nen $n^5 – n + 2$ chia cho 5 thì dö 2 nen $n^5 – n + 2$ co chö so tan cung la 2 hoac 7 nen $n^5 – n + 2$ khong la so chính phöông

Vay : Khong co gia trò nao cua n thoa man bai toan

Baøi 6 :

a)Chöng minh rang : Moi so le ñeu viet ñöôc döôi dang hieu cua hai so chính phöông

b) Mot so chính phöông co chö so tan cung bang 9 thì chö so hang chuc la chö so chan

Giai

Moi so le ñeu co dang a = 4k + 1 hoac a = 4k + 3

Vôi a = 4k + 1 thì $a = 4k^2 + 4k + 1 – 4k^2 = (2k + 1)^2 – (2k)^2$

Vôi a = 4k + 3 thì $a = (4k^2 + 8k + 4) – (4k^2 + 4k + 1) = (2k + 2)^2 – (2k + 1)^2$

b)A la so chính phöông co chö so tan cung bang 9 nen

$A = (10k \pm 3)^2 = 100k^2 \pm 60k + 9 = 10.(10k^2 \pm 6) + 9$

So chuc cua A la $10k^2 \pm 6$ la so chan (ñpcm)

Baøi 7:

Mot so chính phöông co chö so hang chuc la chö so le. Tìm chö so hang ñôn vò

Giai

Goi $n^2 = (10a + b)^2 = 10.(10a^2 + 2ab) + b^2$ nen chö so hang ñôn vò can tìm la chö so tan cung cua b^2

Theo ñeà baøi , chöõ soá haøng chuïc cuûa n^2 laø chöõ soá leû neân chöõ soá haøng chuïc cuûa b^2 phaûi leû

Xeùt caùc giaù trò cuûa b töø 0 ñeán 9 thì chæ coù $b^2 = 16$, $b^2 = 36$ coù chöõ soá haøng chuïc laø chöõ soá leû, chuùng ñeàu taän cuøng baèng 6

Vaäy : n^2 coù chöõ soá haøng ñôn vò laø 6

Baøi taäp veà nhaø

Baøi 1: Caùc soá sau ñaây, soá naøo laø soá chính phöông

a) A = $\underbrace{22.....2}_{50}4$ b) B = 11115556 c) C = $\underbrace{99....9}_{n}\underbrace{00....0}_{n}25$

d) D = $\underbrace{44.....4}_{n}\underbrace{88....8}_{n-1}9$ e) M = $\underbrace{11.....1}_{2n} - \underbrace{22....2}_{n}$ f) N = $1^2 + 2^2 + ... + 56^2$

Baøi 2: Tìm soá töï nhieân n ñeå caùc bieåu thöùc sau laø soá chính phöông

a) $n^3 – n + 2$

b) $n^4 – n + 2$

Baøi 3: Chöùng minh raèng

a)Toång cuûa hai soá chính phöông leû khoâng laø soá chính phöông

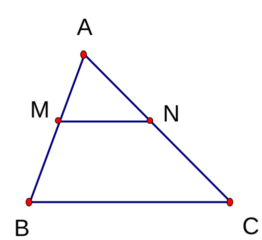
b) Moät soá chính phöông coù chöõ soá taän cuøng baèng 6 thì chöõ soá haøng chuïc laø chöõ soá leû

Baøi 4: Moät soá chính phöông coù chöõ soá haøng chuïc baèng 5. Tìm chöõ soá haøng ñôn vò

CHUYEÂN ÑEÀ 6 - CAÙC BAØI TOAÙN VEÀ ÑÒNH LÍ TA-LEÙT

A.Kieán thöùc:

1. Ñònh lí Ta-leùt:



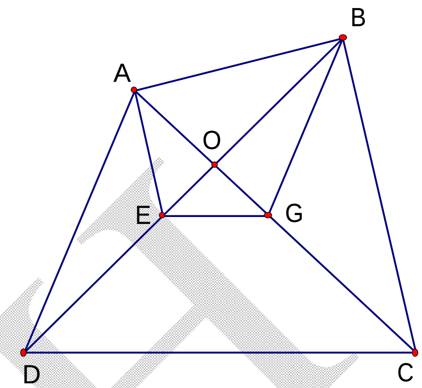
* §Þnh lý Ta-lÐt: $\left.\begin{array}{l}\Delta ABC \\ MN // BC\end{array}\right\} \Leftrightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

* HÖ qu¶: MN // BC $\Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

B. Baøi taäp aùp duïng:

1. Bai 1:

Cho tö giac ABCD, ñöôøng thang qua A song song vôi BC cat BD ô E, ñöôøng thang qua B song song vôi AD cat AC ô G



a) chöng minh: EG // CD

b) Gia sö AB // CD, chöng minh rang AB^2 = CD. EG

Giai

Goi O la giao ñiem cua AC va BD

a) Vì AE // BC $\Rightarrow \frac{OE}{OB} = \frac{OA}{OC}$ (1)

BG // AC $\Rightarrow \frac{OB}{OD} = \frac{OG}{OA}$ (2)

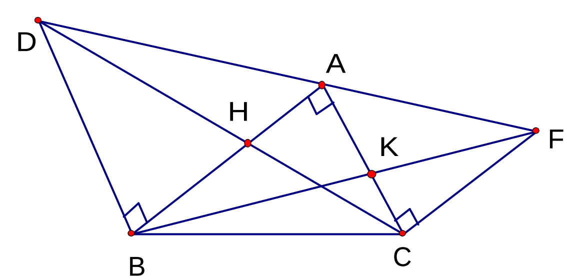
Nhan (1) vôi (2) ve theo ve ta co: $\frac{OE}{OD} = \frac{OG}{OC}$ $\Rightarrow$ EG // CD

b) Khi AB // CD thì EG // AB // CD, BG // AD nen

$$\frac{AB}{EG} = \frac{OA}{OG} = \frac{OD}{OB} = \frac{CD}{AB} \Rightarrow \frac{AB}{EG} = \frac{CD}{AB} \Rightarrow AB^2 = CD.\,EG$$

Bai 2:

Cho ABC vuong tai A, Ve ra phía ngoai tam giac ño cac tam giac ABD vuong can ô B, ACF vuong can ô C. Goi H la giao ñiem cua AB va CD, K la giao ñiem cua Ac va BF. Chöng minh rang:



a) AH = AK

b) AH^2 = BH. CK

Giai

Ñat AB = c, AC = b.

BD // AC (cung vuong goc vôi AB)

nen $\frac{AH}{HB} = \frac{AC}{BD} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{AH}{HB} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{AH}{HB + AH} = \frac{b}{b + c}$

Hay $\frac{AH}{AB} = \frac{b}{b+c} \Rightarrow \frac{AH}{c} = \frac{b}{b+c} \Rightarrow AH = \frac{b.c}{b+c}$ (1)

AB // CF (cung vuong goc vôi AC) nen $\frac{AK}{KC} = \frac{AB}{CF} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{AK}{KC + AK} = \frac{c}{b+c}$

Hay $\frac{AK}{AC} = \frac{b}{b+c} \Rightarrow \frac{AK}{b} = \frac{c}{b+c} \Rightarrow AK = \frac{b.c}{b+c}$ (2)

Tö (1) va (2) suy ra: AH = AK

b) Tö $\frac{AH}{HB} = \frac{AC}{BD} = \frac{b}{c}$ va $\frac{AK}{KC} = \frac{AB}{CF} = \frac{c}{b}$ suy ra $\frac{AH}{HB} = \frac{KC}{AK} \Rightarrow \frac{AH}{HB} = \frac{KC}{AH}$ (Vì AH = AK)

$\Rightarrow AH^2 = BH . KC$

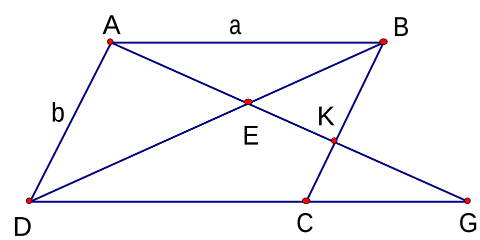
3. Bai 3: Cho hình bình hanh ABCD, ñöông thang a ñi qua A lan löôt cat BD, BC, DC theo thö tö tai E, K, G. Chöng minh rang:

a) $AE^2 = EK. EG$

b) $\frac{1}{AE} = \frac{1}{AK} + \frac{1}{AG}$

c) Khi ñöông thang a thay ñoi vò trí nhöng van qua A thì tích BK. DG co gia trò khong ñoi

Giai



a) Vì ABCD la hình bình hanh va K $\in$ BC nen AD // BK, theo he qua cua ñònh lí Ta-let ta co:

$\frac{EK}{AE} = \frac{EB}{ED} = \frac{AE}{EG} \Rightarrow \frac{EK}{AE} = \frac{AE}{EG} \Rightarrow AE^2 = EK.EG$

b) Ta co: $\frac{AE}{AK} = \frac{DE}{DB}$; $\frac{AE}{AG} = \frac{BE}{BD}$ nen

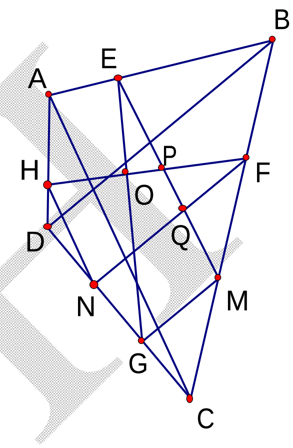
$\frac{AE}{AK} + \frac{AE}{AG} = \frac{BE}{BD} + \frac{DE}{DB} = \frac{BD}{BD} = 1 \Rightarrow AE\left(\frac{1}{AK} + \frac{1}{AG}\right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{AE} = \frac{1}{AK} + \frac{1}{AG}$ (ñpcm)

c) Ta co: $\frac{BK}{KC} = \frac{AB}{CG} \Rightarrow \frac{BK}{KC} = \frac{a}{CG}$ (1); $\frac{KC}{AD} = \frac{CG}{DG} \Rightarrow \frac{KC}{b} = \frac{CG}{DG}$ (2)

Nhan (1) vôi (2) ve theo ve ta co: $\frac{BK}{b} = \frac{a}{DG} \Rightarrow BK.\,DG = ab$ khong ñoi (Vì a = AB; b = AD la ño dai hai canh cua hình bình hanh ABCD khong ñoi)

4. Bai 4:

Cho tö giac ABCD, cac ñiem E, F, G, H theo thö tö chia trong cac canh AB, BC, CD, DA theo tæ so 1:2. Chöng minh rang:



a) EG = FH

b) EG vuong goc vôi FH

Giai

Goi M, N theo thö tö la trung ñiem cua CF, DG

Ta co CM = $\frac{1}{2}$ CF = $\frac{1}{3}$BC $\Rightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{BE}{BA} = \frac{BM}{BC} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow$EM // AC $\Rightarrow \frac{EM}{AC} = \frac{BM}{BE} = \frac{2}{3} \Rightarrow EM = \frac{2}{3}AC$ (1)

Tương tự, ta có: NF // BD $\Rightarrow \frac{NF}{BD} = \frac{CF}{CB} = \frac{2}{3} \Rightarrow NF = \frac{2}{3}BD$ (2)

mµ AC = BD (3)

Tõ (1), (2), (3) suy ra : EM = NF (a)

Tương tự như trên ta có: MG // BD, NH // AC và MG = NH = $\frac{1}{3}$AC (b)

MÆt kh¸c EM // AC; MG // BD Vµ AC $\perp$ BD $\Rightarrow$EM $\perp$ MG $\Rightarrow \widehat{EMG} = 90^0$ (4)

Tương tự, ta có: $\widehat{FNH} = 90^0$ (5)

Tõ (4) vµ (5) suy ra $\widehat{EMG} = \widehat{FNH} = 90^0$ (c)

Tõ (a), (b), (c) suy ra ΔEMG = ΔFNH (c.g.c) $\Rightarrow$ EG = FH

b) Gäi giao ®iÓm cña EG vµ FH lµ O; cña EM vµ FH lµ P; cña EM vµ FN lµ Q th×

$\widehat{PQF} = 90^0 \Rightarrow \widehat{QPF} + \widehat{QFP} = 90^0$ mµ $\widehat{QPF} = \widehat{OPE}$ (®èi ®Ønh), $\widehat{OEP} = \widehat{QFP}$ (ΔEMG = ΔFNH)

Suy ra $\widehat{EOP} = \widehat{PQF} = 90^0 \Rightarrow$ EO $\perp$ OP $\Rightarrow$ EG $\perp$ FH

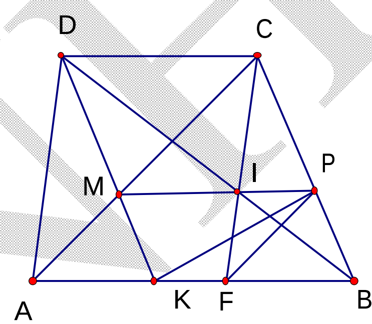
5. Bµi 5:

Cho h×nh thang ABCD cã ®¸y nhá CD. Tõ D vẽ đường thẳng song song với BC, cắt AC tại M và AB tại K, Từ C vẽ đường thẳng song song với AD, cắt AB tại F, qua F ta lại vẽ đường th¼ng song song víi AC, c¾t BC t¹i P. Chøng minh r»ng

a) MP // AB

b) Ba đường thẳng MP, CF, DB đồng quy

Gi¶i



a) EP // AC $\Rightarrow \frac{CP}{PB} = \frac{AF}{FB}$ (1)

AK // CD $\Rightarrow \frac{CM}{AM} = \frac{DC}{AK}$ (2)

c¸c tø gi¸c AFCD, DCBK la c¸c h×nh b×nh hµnh nªn

AF = DC, FB = AK (3)

KÕt hîp (1), (2) vµ (3) ta cã $\frac{CP}{PB} = \frac{CM}{AM} \Rightarrow$ MP // AB

(§Þnh lý Ta-lÐt ®¶o) (4)

b) Gäi I lµ giao ®iÓm cña BD vµ CF, ta cã: $\frac{CP}{PB} = \frac{CM}{AM} = \frac{DC}{AK} = \frac{DC}{FB}$

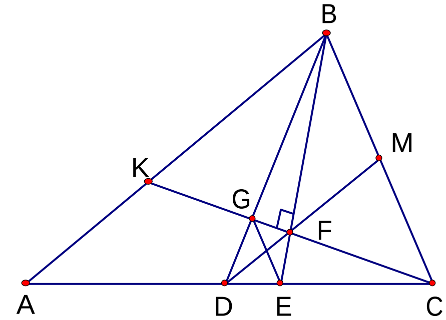
Mµ $\frac{DC}{FB} = \frac{DI}{IB}$ (Do FB // DC) $\Rightarrow \frac{CP}{PB} = \frac{DI}{IB} \Rightarrow$ IP // DC // AB (5)

Từ (4) và (5) suy ra : qua P có hai đường thẳng IP, PM cùng song song với AB // DC nên theo tiªn ®Ò ¥clÝt th× ba ®iÓm P, I, M th¼ng hang hay MP ®i qua giao ®iÓm cña CF vµ DB hay ba đường thẳng MP, CF, DB ®ång quy

6. Bµi 6:

Cho ΔABC có BC < BA. Qua C kẻ đường thẳng vuông goác với tia phân giác BE của $\widehat{ABC}$; đường thẳng này cắt BE tại F và cắt trung tuyến BD tại G. Chøng minh r»ng ®o¹n th¼ng EG bÞ ®o¹n th¼ng DF chia lµm hai phÇn b»ng nhau

Gi¶i



Gäi K lµ giao ®iÓm cña CF vµ AB; M lµ giao ®iÓm cña DF vµ BC

ΔKBC có BF vừa là phân giác vừa là đường cao nên

ΔKBC c©n t¹i B $\Rightarrow$ BK = BC vµ FC = FK

Mặt khác D là trung điểm AC nên DF là đường trung bình của ΔAKC $\Rightarrow$ DF // AK hay DM // AB

Suy ra M lµ trung ®iÓm cña BC

DF = $\frac{1}{2}$AK (DF là đường trung bình của ΔAKC), ta cã

$\frac{BG}{GD} = \frac{BK}{DF}$(do DF // BK) $\Rightarrow \frac{BG}{GD} = \frac{BK}{DF} = \frac{2BK}{AK}$ (1)

Mæt kh¸c $\frac{CE}{DE} = \frac{DC - DE}{DE} = \frac{DC}{DE} - 1 = \frac{AD}{DE} - 1$ (V× AD = DC) $\Rightarrow \frac{CE}{DE} = \frac{AE - DE}{DE} = \frac{DC}{DE} - 1 = \frac{AD}{DE} - 1$

Hay $\frac{CE}{DE} = \frac{AE - DE}{DE} - 1 = \frac{AE}{DE} - 2 = \frac{AB}{DF} - 2$ (v× $\frac{AE}{DE} = \frac{AB}{DF}$: Do DF // AB)

Suy ra $\frac{CE}{DE} = \frac{AK + BK}{DE} - 2 = \frac{2(AK + BK)}{AK} - 2$ (Do DF = $\frac{1}{2}$AK) $\Rightarrow \frac{CE}{DE} = \frac{2(AK + BK)}{AK} - 2 = \frac{2BK}{AK}$ (2)

Tõ (1) vµ (2) suy ra $\frac{BG}{GD} = \frac{CE}{DE} \Rightarrow$ EG // BC

Gäi giao ®iÓm cña EG vµ DF lµ O ta cã $\frac{OG}{MC} = \frac{OE}{MB}\left(= \frac{FO}{FM}\right) \Rightarrow$ OG = OE

Bµi tËp vÒ nhµ

Bµi 1:

Cho tø gi¸c ABCD, AC vµ BD c¾t nhau t¹i O. Đường thẳng qua O và song song với BC cắt AB ở E; đường thẳng song song với CD qua O cắt AD tại F

a) Chøng minh FE // BD

b) Từ O kẻ các đường thẳng song song với AB, AD cắt BD, CD tại G và H.

Chøng minh: CG. DH = BG. CH

Bµi 2:

Cho h×nh b×nh hµnh ABCD, ®iÓm M thuéc c¹nh BC, ®iÓm N thuéc tia ®èi cña tia BC sao cho BN = CM; các đường thẳng DN, DM cắt AB theo thứ tự tại E, F.

Chøng minh:

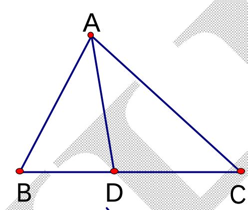
a) AE^2 = EB. FE

b) EB = $\left(\frac{AN}{DF}\right)^2$. EF

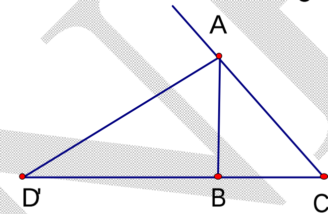
CHUYEN ÑE 7 – CAC BAI TOAN SÖ DUNG ÑÒNH LÍ TALET VA TÍNH CHAT ÑÖÔNG PHAN GIAC

A. Kien thöc:

2. Tính chat ñöông phan giac:



$\triangle$ABC ,AD la phan giac goc A $\Rightarrow \dfrac{BD}{CD} = \dfrac{AB}{AC}$



AD'la phan giac goc ngoai tai A: $\dfrac{BD'}{CD'} = \dfrac{AB}{AC}$

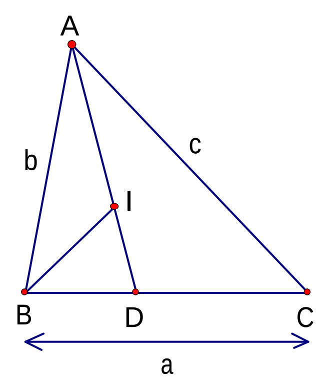
B. Bai tap van dung

1. Bai 1:

Cho $\triangle$ABC co BC = a, AB = b, AC = c, phan giac AD

a) Tính ño dai BD, CD

b) Tia phan giac BI cua goc B cat AD ô I; tính tæ so: $\dfrac{AI}{ID}$



Giai

a) AD la phan giac cua $\widehat{BAC}$ nen $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{c}{b}$

$\Rightarrow \dfrac{BD}{CD + BD} = \dfrac{c}{b + c} \Rightarrow \dfrac{BD}{a} = \dfrac{c}{b + c} \Rightarrow BD = \dfrac{ac}{b + c}$

Do ño CD = a - $\dfrac{ac}{b + c} = \dfrac{ab}{b + c}$

b) BI la phan giac cua $\widehat{ABC}$ nen $\dfrac{AI}{ID} = \dfrac{AB}{BD} = c : \dfrac{ac}{b + c} = \dfrac{b + c}{a}$

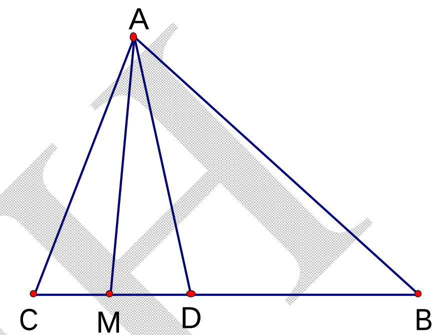
2. Bai 2:

Cho ΔABC, co $\hat{B} < 60^0$ phan giac AD

a) Chöng minh AD < AB

b) Goi AM la phan giac cua ΔADC. Chöng minh rang

BC > 4 DM



Giai

a)Ta co $\widehat{ADB} = \hat{C} + \frac{\hat{A}}{2} > \frac{\hat{A} + \hat{C}}{2} = \frac{180^0 - \hat{B}}{2} = 60^0$

$\Rightarrow \widehat{ADB} > \hat{B} \Rightarrow$ AD < AB

b) Goi BC = a, AC = b, AB = c, AD = d

Trong ΔADC, AM la phan giac ta co

$$\frac{DM}{CM} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow \frac{DM}{CM + DM} = \frac{AD}{AD + AC} \Rightarrow \frac{DM}{CD} = \frac{AD}{AD + AC}$$

$\Rightarrow$ DM = $\frac{CD.AD}{AD + AC} = \frac{CD.\ d}{b + d}$; CD = $\frac{ab}{b + c}$ (Van dung bai 1) $\Rightarrow$ DM = $\frac{abd}{(b + c)(b + d)}$

Ñe c/m BC > 4 DM ta c/m a > $\frac{4abd}{(b + c)(b + d)}$ hay (b + d)(b + c) > 4bd (1)

That vay : do c > d $\Rightarrow$ (b + d)(b + c) > $(b + d)^2 \geq$ 4bd . Bat ñang thöc (1) ñöôc c/m

Bai 3:

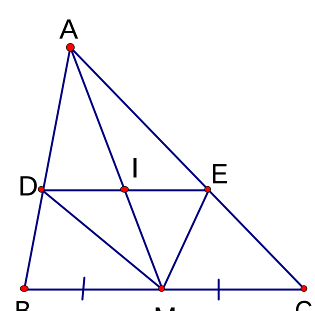
Cho ΔABC, trung tuyen AM, cac tia phan giac cua cac goc AMB , AMC cat AB, AC theo thö tö ô D va E

a) Chöng minh DE // BC

b) Cho BC = a, AM = m. Tính ñoi dai DE

c) Tìm tap hôp cac giao diem I cua AM va DE neu ΔABC co BC co ñònh, AM = m khong ñoi

d) ΔABC co ñieu kien gì thì DE la ñöôøng trung bình cua no



Giai

a) MD la phan giac cua $\widehat{AMB}$ nen $\frac{DA}{DB} = \frac{MB}{MA}$ (1)

ME la phan giac cua $\widehat{AMC}$ nen $\frac{EA}{EC} = \frac{MC}{MA}$ (2)

Tö (1), (2) va gia thiet MB = MC ta suy ra $\frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EC}$ $\Rightarrow$ DE // BC

b) DE // BC $\Rightarrow$ $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AI}{AM}$. Ñat DE = x $\Rightarrow$ $\frac{x}{a} = \frac{m - \frac{x}{2}}{m} \Rightarrow x = \frac{2a.m}{a + 2m}$

c) Ta co: MI = $\frac{1}{2}$ DE = $\frac{a.m}{a + 2m}$ khong ñoi $\Rightarrow$ I luon cach M mot ñoan khong ñoi nen tap hôp cac ñiem I la ñöông tron tam M, ban kính MI = $\frac{a.m}{a + 2m}$ (Trö giao ñiem cua no vôi BC

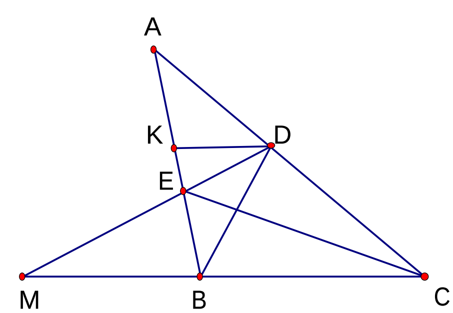
d) DE la ñöông trung bình cua ΔABC $\Leftrightarrow$ DA = DB $\Leftrightarrow$ MA = MB $\Leftrightarrow$ ΔABC vuong ô A

4. Bai 4:

Cho ΔABC (AB < AC) cac phan giac BD, CE

a) Ñöông thang qua D va song song vôi BC cat AB ô K, chöng minh E nam giöa B va K

b) Chöng minh: CD > DE > BE



Giai

a) BD la phan giac nen

$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} < \frac{AC}{BC} = \frac{AE}{EB} \Rightarrow \frac{AD}{DC} < \frac{AE}{EB}$ (1)

Mat khac KD // BC nen $\frac{AD}{DC} = \frac{AK}{KB}$ (2)

Tö (1) va (2) suy ra $\frac{AK}{KB} < \frac{AE}{EB} \Rightarrow \frac{AK + KB}{KB} < \frac{AE + EB}{EB}$

$\Rightarrow \frac{AB}{KB} < \frac{AB}{EB} \Rightarrow KB > EB$ $\Rightarrow$ E nam giöa K va B

b) Goi M la giao ñiem cua DE va CB. Ta co $\widehat{CBD} = \widehat{KDB}$ (Goc so le trong) $\Rightarrow \widehat{KBD} = \widehat{KDB}$

ma E nam giöa K va B nen $\widehat{KDB} > \widehat{EDB} \Rightarrow \widehat{KBD} > \widehat{EDB} \Rightarrow \widehat{EBD} > \widehat{EDB} \Rightarrow$ EB < DE

Ta lai co $\widehat{CBD} + \widehat{ECB} = \widehat{EDB} + \widehat{DEC} \Rightarrow \widehat{DEC} > \widehat{ECB} \Rightarrow \widehat{DEC} > \widehat{DCE}$ (Vì $\widehat{DCE} = \widehat{ECB}$)

Suy ra CD > ED $\Rightarrow$ CD > ED > BE

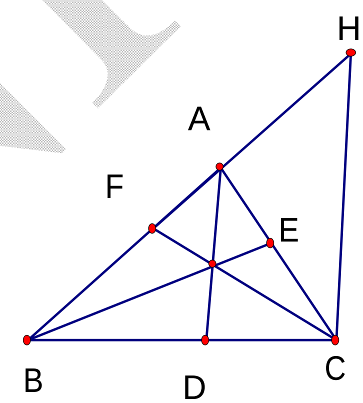
5. Bai 5:

Cho $\triangle$ABC vôi ba ñöôøng phan giac AD, BE, CF. Chöùng minh

a. $\dfrac{DB}{DC}.\dfrac{EC}{EA}.\dfrac{FA}{FB} = 1$.

b. $\dfrac{1}{AD} + \dfrac{1}{BE} + \dfrac{1}{CF} > \dfrac{1}{BC} + \dfrac{1}{CA} + \dfrac{1}{AB}$.

Giai



a)AD la ñöôøng phan giac cua $\widehat{BAC}$ nen ta co: $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$ (1)

Töông tö: vôi cac phan giac BE, CF ta co: $\dfrac{EC}{EA} = \dfrac{BC}{BA}$ (2) ;

$\dfrac{FA}{FB} = \dfrac{CA}{CB}$ (3)

Töø (1); (2); (3) suy ra: $\dfrac{DB}{DC}.\dfrac{EC}{EA}.\dfrac{FA}{FB} = \dfrac{AB}{AC}.\dfrac{BC}{BA}.\dfrac{CA}{CB} = 1$

b) §Æt AB = c , AC = b , BC = a , AD = d_a.

Qua C kẻ đường thẳng song song với AD , cắt tia BA ở H.

Theo §L TalÐt ta cã: $\dfrac{AD}{CH} = \dfrac{BA}{BH} \Rightarrow AD = \dfrac{BA.CH}{BH} = \dfrac{c.CH}{BA + AH} = \dfrac{c}{b + c}.CH$

Do CH < AC + AH = 2b nªn: $d_a < \dfrac{2bc}{b+c} \Rightarrow \dfrac{1}{d_a} > \dfrac{b+c}{2bc} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) \Leftrightarrow \dfrac{1}{d_a} > \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)$

Chứng minh tương tự ta có : $\dfrac{1}{d_b} > \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c}\right)$ Vµ $\dfrac{1}{d_c} > \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)$ Nªn:

$$\frac{1}{d_a} + \frac{1}{d_b} + \frac{1}{d_c} > \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\right] \Leftrightarrow \frac{1}{d_a} + \frac{1}{d_b} + \frac{1}{d_c} > \frac{1}{2}.2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

$\Leftrightarrow \frac{1}{d_a}+\frac{1}{d_b}+\frac{1}{d_c}>\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ (®pcm)

Bµi tËp vÒ nhµ

Cho ΔABC co BC = a, AC = b, AB = c (b > c), cac phan giac BD, CE

a) Tính ño dai CD, BE roi suy ra CD > BE

b) Ve hình bình hanh BEKD. Chöng minh: CE > EK

c) Chöng minh CE > BD

CHUYEN ÑE 8 – CHÖ SO TAN CUNG

A. Kien thöc:

1. Mot so tính chat:

a) Tính chat 1:

+ Cac so co chö so tan cung la 0; 1; 5; 6khi nang len luy thöa bac bat ky nao thì chö so tan cung khong thay ñoi

+ Cac so co chö so tan cung la 4; 9 khi nang len luy thöa bac le thì chö so tan cung khong thay ñoi

+ Cac so co chö so tan cung la 3; 7; 9 khi nang len luy thöa bac 4n (n $\in$N) thì chö so tan cung la 1

+ Cac so co chö so tan cung la 2; 4; 8 khi nang len luy thöa bac 4n (n $\in$N) thì chö so tan cung la 6

b) Tính chat 2: Mot so tö nhien bat ky khi nang len luy thöa bac 4n + 1 (n $\in$N) thì chö so tan cung khong thay ñoi

c) Tính chat 3:

+ Cac so co chö so tan cung la 3 khi nang len luy thöa bac 4n + 3 ($n \in N$) thì chö so tan cung la 7; Cac so co chö so tan cung la 7 khi nang len luy thöa bac 4n + 3 ($n \in N$) thì chö so tan cung la 3

+ Cac so co chö so tan cung la 2 khi nang len luy thöa bac 4n + 3 ($n \in N$) thì chö so tan cung la 8; Cac so co chö so tan cung la 8 khi nang len luy thöa bac 4n + 3 ($n \in N$) thì chö so tan cung la 2

+ Cac so co chö so tan cung la 0; 1; 4; 5; 6; 9 khi nang len luy thöa bac 4n + 3 ($n \in N$) thì chö so tan cung la khong ñoi

2. Mot so phöông phap:

+ Tìm chö so tan cung cua $x = a^m$ thì ta xet chö so tan cung cua a:

- Neu chö so tan cung cua a la cac chö so: 0; 1; 5; 6 thì chö so tan cung cua x la 0; 1; 5; 6

- Neu chö so tan cung cua a la cac chö so: 3; 7; 9 thì :

* Vì $a^m = a^{4n+r} = a^{4n} . a^r$

Neu r la 0; 1; 2; 3 thì chö so tan cung cua x la chö so tan cung cua a^r

Neu r la 2; 4; 8 thì chö so tan cung cua x la chö so tan cung cua $6.a^r$

B. Mot so ví du:

Bai 1:

Tìm chö so tan cung cua

a) 243^6 ; 167^{2010}

b) $\left(7^9\right)^9$; $\left(14^{14}\right)^{14}$; $\left[\left(4^5\right)^6\right]^7$

Giai

a) $243^6 = 243^{4+2} = 243^4 . 243^2$

243^2 co chö so tan cung la 9 nen chö so tan cung cua 243^6 la 9

Ta co 2010 = 4.502 + 2 nen $167^{2010} = 167^{4.502+2} = 167^{4.502}.167^2$

$167^{4.502}$ co chöõ so tan cung la 6; 167^2 co chöõ so tan cung la 9 nen chöõ so tan cung cua 167^{2010} la chöõ so tan cung cua tích 6.9 la 4

b) Ta co:

+) $9^9 - 1 = (9 – 1)(9^8 + 9^7 + ...+ 9 + 1) = 4k$ ($k \in N$) $\Rightarrow 9^9 = 4k + 1 \Rightarrow \left(7^9\right)^9 = 7^{4k + 1}$ $= 7^{4k}.7$ nen co chöõ so tan cung la 7

$14^{14} = (12 + 2)^{14} = 12^{14} + 12.14^{13}.2 + ...+ 12.12.2^{13} + 2^{14}$ chia het cho 4, vì cac hang töû tröôc 2^{14} ñeu co nhan töû 12 nen chia het cho 4; hang töû $2^{14} = 4^7$ chia het cho 4 hay $14^{14} = 4k \Rightarrow \left(14^{14}\right)^{14} = 14^{4k}$ co chöõ so tan cung la 6

+) 5^6 co chöõ so tan cung la 5 nen $\left(5^6\right)^7 = 5.(2k + 1) \Rightarrow 5.(2k + 1) – 1 = 4$ q ($k, q \in N$) $\Rightarrow 5.(2k + 1) = 4q + 1 \Rightarrow \left[\left(4^5\right)^6\right]^7 = 4^{4q + 1} = 4^{4q} . 4$ co chöõ so tan cung la chöõ so tan cung tích 6. 4 la 4

Bai 2: Tìm chöõ so tan cung cua

$A = 2^1 + 3^5 + 4^9 + 5^{13} +...... + 2004^{8009}$

Giai

a) Luy thöøa cua moi so hang cua A chia 4 thì dö 1(Cac so hang cua A co dang $n^{4(n – 2) + 1}$ ($n \in \{2; 3; ...; 2004\}$) nen moi so hang cua A va luy thöøa cua no co chöõ so tan cung giong nhau (Tính chat 2) nen chöõ so tan cung cua A la chöõ so tan cung cua tong cac so hang

Töø 2 ñen 2004 co 2003 so hang trong ño co 2000 : 10 = 200 so hang co chöõ so tan cung bang 0,Tong cac chöõ so tan cung cua A la

(2 + 3 + ...+ 9) + 199.(1 + 2 + ... + 9) + 1 + 2 + 3 + 4 = 9009 co chöõ so tan cung la 9

Vay A co chöõ so tan cung la 9

Bai 3: Tìm

a) Hai chöõ soá taän cuøng cuûa 3^{999}; $\left(7^{7}\right)^{7}$

b) Ba chöõ soá taän cuøng cuûa 3^{100}

c) Boán chöõ soá taän cuøng cuûa 5^{1994}

Giaûi

a) $3^{999} = 3.3^{998} = 3.\ 9^{499} = 3.(10 - 1)^{499} = 3.(10^{499} - 499.10^{498} + ... + 499.10 - 1)$

$= 3.[BS(100) + 4989] = ...67$

$7^7 = (8 - 1)^7 = BS(8) - 1 = 4k + 3 \Rightarrow \left(7^{7}\right)^{7} = 7^{4k+3} = 7^3.\ 7^{4k} = 343.(...01)^{4k} = ...43$

b) $3^{100} = 9^{50} = (10 - 1)^{50} = 10^{50} - 50.\ 10^{49} + ... + \frac{50.49}{2}.\ 10^2 - 50.10 + 1$

$= 10^{50} - 50.\ 10^{49} + ... + \frac{49}{2}.\ 5000 - 500 + 1 = BS(1000) + 1 = ...001$

Chuù yù:

+ Neáu n laø soá leû khoâng chi heát cho 5 thì ba chöõ soá taän cuøng cuûa n^{100} laø 001

+ Neáu moät soá töï nhieân n khoâng chia heát cho 5 thì n^{100} chia cho 125 dö 1

HD C/m: n = 5k + 1; n = 5k + 2

+ Neáu n laø soá leû khoâng chia heát cho 5 thì n^{101} vaø n coù ba chöõ soá taän cuøng nhö nhau

c) Caùch 1: $5^4 = 625$

Ta thaáy soá $(...0625)^n = ...0625$

$5^{1994} = 5^{4k+2} = 25.(5^4)^k = 25.(0625)^k = 25.(...0625) = ...5625$

Caùch 2: Tìm soá dö khi chia 5^{1994} cho $10000 = 2^4.\ 5^4$

Ta thaáy $5^{4k} - 1$ chia heát cho $5^4 - 1 = (5^2 - 1)(5^2 + 1)$ chia heát cho 16

Ta coù: $5^{1994} = 5^6.\ (5^{1988} - 1) + 5^6$

Do 5^6 chia heát cho 5^4, coøn $5^{1988} - 1$ chia heát cho 16 neân $5^6(5^{1988} - 1)$ chia heát cho 10000

Ta coù $5^6 = 15625$

Vaäy boán chöõ soá taän cuøng cuûa 5^{1994} laø 5625

Chuù yù: Neáu vieát $5^{1994} = 5^2.\ (5^{1992} - 1) + 5^2$

Ta co: $5^{1992} - 1$ chia het cho 16; nhöng 5^2 khong chia het cho 5^4

Nhö vay trong bai toan nay ta can viet 5^{1994} döôi dang $5^n(5^{1994-n} - 1) + 5^n$; $n \geq 4$ va

1994 – n chia het cho 4

C. Van dung vao cac bai toan khac

Bai 1:

Chöng minh rang: Tong sau khong la so chính phöông

a) $A = 19^k + 5^k + 1995^k + 1996^k$ ($k \in N$, k chan)

b) $B = 2004^{2004k} + 2001$

Giai

a) Ta co:

19^k co chö so tan cung la 1

5^k co chö so tan cung la 5

1995^k co chö so tan cung la 5

1996^k co chö so tan cung la 6

Nen A co chö so tan cung la chö so tan cung cua tong cac chö so tan cung cua tong

1 + 5 + 5 + 6 = 17, co chö so tan cung la 7 nen khong the la so chính phöông

b) Ta co :k chan nen k = 2n ($n \in N$)

$2004^{2004k} = (2004^4)^{501k} = (2004^4)^{1002n} = (...6)^{1002n}$ la luy thöa bac chan cua so co chö so tan cung la 6 nen co chö so tan cung la 6 nen $B = 2004^{2004k} + 2001$ co chö so tan cung la 7, do ño B khong la so chính phöông

Bai 2:

Tìm so dö khi chia cac bieu thöc sau cho 5

a) $A = 2^1 + 3^5 + 4^9 + ... + 2003^{8005}$

b) $B = 2^3 + 3^7 + 4^{11} + ... + 2005^{8007}$

Giai

a) Chöõ soá taän cuøng cuûa A laø chöõ soá taän cuøng cuûa toång

(2 + 3 +... + 9) + 199.(1 + 2 + ... + 9) + 1 + 2 + 3 = 9005

Chöõ soá taän cuøng cuûa A laø 5 neân chia A cho 5 dö 0

b)Töông töï, chöõ soá taän cuøng cuûa B laø chöõ soá taän cuøng cuûa toång

(8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9) + 199.(1 + ...+ 9) + 8 + 7 + 4 + 5 = 9024

B coù chöõ soá taän cuøng laø 4 neân B chia 5 dö 4

Baøi taäp veà nhaø

Baøi 1: Tìm chöõ soá taän cuøng cuûa: 3^{102} ; $\left(7^3\right)^5$; $3^{20} + 2^{30} + 7^{15} - 8^{16}$

Baøi 2: Tìm hai, ba chöõ soá taän cuøng cuûa: 3^{555}; $\left(2^7\right)^9$

Baøi 3: Tìm soá dö khi chia caùc soá sau cho 2; cho 5:

a) 3^8; $14^{15} + 15^{14}$

b) $2009^{2010} - 2008^{2009}$

CHUYEÂN ÑEÀ 9 – ÑOÀNG DÖ

A. Ñònh nghóa:

Neáu hai soá nguyeân a vaø b coù cuøng soá dö trong pheùp chia cho moät soá töï nhieân m $\neq$ 0 thì ta noùi a ñoàng dö vôùi b theo moâñun m, vaø coù ñoàng dö thöùc: a $\equiv$ b (mod m)

Ví duï:7 $\equiv$ 10 (mod 3) , 12 $\equiv$ 22 (mod 10)

+ Chuù yù: a $\equiv$ b (mod m) $\Leftrightarrow$ a – b $\vdots$ m

B. Tính chaát cuûa ñoàng dö thöùc:

1. Tính chaát phaûn xaï: a $\equiv$ a (mod m)

2. Tính chaát ñoái xöùng: a $\equiv$ b (mod m) $\Rightarrow$ b $\equiv$ a (mod m)

3. Tính chaát baéc caàu: a $\equiv$ b (mod m), b $\equiv$ c (mod m) thì a $\equiv$ c (mod m)

4. Coäng , tröø töøng veá: $\begin{cases} a \equiv b \pmod{m} \\ c \equiv d \pmod{m} \end{cases} \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$

Heä quaû:

a) $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a + c \equiv b + c \pmod{m}$

b) $a + b \equiv c \pmod{m} \Rightarrow a \equiv c - b \pmod{m}$

c) $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a + km \equiv b \pmod{m}$

5. Nhaân töøng veá : $\begin{cases} a \equiv b \pmod{m} \\ c \equiv d \pmod{m} \end{cases} \Rightarrow ac \equiv bd \pmod{m}$

Heä quaû:

a) $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{m}$ ($c \in Z$)

b) $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m}$

6. Coù theå nhaân (chia) hai veá vaø moñun cuûa moät ñoàng dö thöùc vôùi moät soá nguyeân döông

$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow ac \equiv bc \pmod{mc}$

Chaúng haïn: $11 \equiv 3 \pmod{4} \Leftrightarrow 22 \equiv 6 \pmod{8}$

7. $\begin{cases} ac \equiv bc \pmod{m} \\ (c, m) = 1 \end{cases} \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$

Chaúng haïn : $\begin{cases} 16 \equiv 2 \pmod{7} \\ (2, 7) = 1 \end{cases} \Rightarrow 8 \equiv 1 \pmod{7}$

C. Caùc ví duï:

1. Ví duï 1:

Tìm soá dö khi chia 92^{94} cho 15

Giaûi

Ta thaáy $92 \equiv 2 \pmod{15} \Rightarrow 92^{94} \equiv 2^{94} \pmod{15}$ (1)

Laïi coù $2^4 \equiv 1 \pmod{15} \Rightarrow (2^4)^{23}.\, 2^2 \equiv 4 \pmod{15}$ hay $2^{94} \equiv 4 \pmod{15}$ (2)

Töø (1) vaø (2) suy ra $92^{94} \equiv 4 \pmod{15}$ töùc laø 92^{94} chia 15 thì dö 4

2. Ví duï 2:

Chöng minh: trong cac so co dang $2^n - 4 (n \in N)$, co vo so so chia het cho 5

That vay:

Tö $2^4 \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow 2^{4k} \equiv 1 \pmod 5$ (1)

Lai co $2^2 \equiv 4 \pmod 5$ (2)

Nhan (1) vôi (2), ve theo ve ta co: $2^{4k+2} \equiv 4 \pmod 5 \Rightarrow 2^{4k+2} - 4 \equiv 0 \pmod 5$

Hay $2^{4k+2} - 4$ chia het cho 5 vôi moi k = 0, 1, 2, ... hay ta ñöôc vo so so dang $2^n - 4$ $(n \in N)$ chia het cho 5

Chu y: khi giai cac bai toan ve ñong dö, ta thöông quan tam ñen $a \equiv \pm 1 \pmod m$

$a \equiv 1 \pmod m \Rightarrow a^n \equiv 1 \pmod m$

$a \equiv -1 \pmod m \Rightarrow a^n \equiv (-1)^n \pmod m$

3. Ví du 3: Chöng minh rang

a) $20^{15} - 1$ chia het cho 11

b) $2^{30} + 3^{30}$ chi het cho 13

c) $555^{222} + 222^{555}$ chia het cho 7

Giai

a) $2^5 \equiv -1 \pmod{11}$ (1); $10 \equiv -1 \pmod{11} \Rightarrow 10^5 \equiv -1 \pmod{11}$ (2)

Tö (1) va (2) suy ra $2^5 . 10^5 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 20^5 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 20^5 - 1 \equiv 0 \pmod{11}$

b) $2^6 \equiv -1 \pmod{13} \Rightarrow 2^{30} \equiv -1 \pmod{13}$ (3)

$3^3 \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow 3^{30} \equiv 1 \pmod{13}$ (4)

Tö (3) va (4) suy ra $2^{30} + 3^{30} \equiv -1 + 1 \pmod{13} \Rightarrow 2^{30} + 3^{30} \equiv 0 \pmod{13}$

Vay: $2^{30} + 3^{30}$ chi het cho 13

c) $555 \equiv 2 \pmod 7 \Rightarrow 555^{222} \equiv 2^{222} \pmod 7$ (5)

$2^3 \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow (2^3)^{74} \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow 555^{222} \equiv 1 \pmod 7$ (6)

$222 \equiv -2 \pmod 7 \Rightarrow 222^{555} \equiv (-2)^{555} \pmod 7$

Lai co $(-2)^3 \equiv -1 \pmod 7 \Rightarrow [(-2)^3]^{185} \equiv -1 \pmod 7 \Rightarrow 222^{555} \equiv -1 \pmod 7$

Ta suy ra $555^{222} + 222^{555} \equiv 1 - 1 \pmod 7$ hay $555^{222} + 222^{555}$ chia het cho 7

4. Ví duï 4: Chöùng minh raèng soá $2^{2^{4n+1}}$ + 7 chia heát cho 11 vôùi moïi soá töï nhieân n

Thaät vaäy:Ta coù: $2^5 \equiv -1 \pmod{11} \Rightarrow 2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$

Xeùt soá dö khi chia 2^{4n+1} cho 10. Ta coù: $2^4 \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow 2^{4n} \equiv 1 \pmod 5$

$\Rightarrow 2.2^{4n} \equiv 2 \pmod{10} \Rightarrow 2^{4n+1} \equiv 2 \pmod{10} \Rightarrow 2^{4n+1} = 10k + 2$

Neân $2^{2^{4n+1}} + 7 = 2^{10k+2} + 7 = 4.\ 2^{10k} + 7 = 4.(BS\ 11 + 1)^k + 7 = 4.(BS\ 11 + 1^k) + 7$

= BS 11 + 11 chia heát cho 11

Baøi taäp veà nhaø:

Baøi 1: CMR:

a) $2^{28} - 1$ chia heát cho 29

b)Trong caùc soá coù daïng$2^n - 3$ coù voâ soá soá chia heát cho 13

Baøi 2: Tìm soá dö khi chia A = $20^{11} + 22^{12} + 1996^{2009}$ cho 7.

CHUYEÂN ÑEÀ 10 – TÍNH CHIA HEÁT ÑOÁI VÔÙI ÑA THÖÙC

A. Daïng 1: Tìm dö cuûa pheùp chia maø khoâng thöïc hieän pheùp chia

1. Ña thöùc chia coù daïng x – a (a laø haèng)

a) Ñònh lí Bôdu (Bezout, 1730 – 1783):

Soá dö trong pheùp chia ña thöùc f(x) cho nhò thöùc x – a baèng giaù trò cuûa f(x) taïi x = a

Ta coù: f(x) = (x – a). Q(x) + r

Ñaúng thöùc ñuùng vôùi moïi x neân vôùi x = a, ta coù

f(a) = 0.Q(a) + r hay f(a) = r

Ta suy ra: f(x) chia heát cho x – a $\Leftrightarrow$ f(a) = 0

b) f(x) coù toång caùc heä soá baèng 0 thì chia heát cho x – 1

c) f(x) coù toång caùc heä soá cuûa haïng töû baäc chaün baèng toång caùc heä soá cuûa caùc haïng töû baäc leû thì chia heát cho x + 1

Ví du : Khong lam phep chia, hay xet xem $A = x^3 - 9x^2 + 6x + 16$ chia het cho

$B = x + 1$, $C = x - 3$ khong

Ket qua:

A chia het cho B, khong chia het cho C

2. Ña thöc chia co bac hai trô len

Cach 1: Tach ña thöc bò chia thanh tong cua cac ña thöc chia het cho ña thöc chia va dö

Cach 2: Xet gia trò rieng: goi thöông cua phep chia la Q(x), dö la ax + b thì

$f(x) = g(x). Q(x) + ax + b$

Ví du 1: Tìm dö cua phep chia $x^7 + x^5 + x^3 + 1$ cho $x^2 - 1$

Cach 1: Ta biet rang $x^{2n} - 1$ chia het cho $x^2 - 1$ nen ta tach:

$x^7 + x^5 + x^3 + 1 = (x^7 - x) + (x^5 - x) +(x^3 - x) + 3x + 1$

$= x(x^6 - 1) + x(x^4 - 1) + x(x^2 - 1) + 3x + 1$ chia cho $x^2 - 1$ dö $3x + 1$

Cach 2:

Goi thöông cua phep chia la Q(x), dö la ax + b, Ta co:

$x^7 + x^5 + x^3 + 1 = (x -1)(x + 1).Q(x) + ax + b$ vôi moi x

Ñang thöc ñung vôi moi x nen vôi x = 1, ta co 4 = a + b (1)

vôi x = - 1 ta co - 2 = - a + b (2)

Tö (1) va (2) suy ra a = 3, b =1 nen ta ñöôc dö la 3x + 1

Ghi nhô:

$a^n - b^n$ chia het cho $a - b$ ($a \neq -b$)

$a^n + b^n$ (n le) chia het cho $a + b$ ($a \neq -b$)

Ví du 2: Tìm dö cua cac phep chia

a) x^{41} chia cho $x^2 + 1$

b) $x^{27} + x^9 + x^3 + x$ cho $x^2 - 1$

c) $x^{99} + x^{55} + x^{11} + x + 7$ cho $x^2 + 1$

Giai

a) $x^{41} = x^{41} – x + x = x(x^{40} – 1) + x = x[(x^4)^{10} – 1] + x$ chia cho $x^4 – 1$ dö x nen chia cho $x^2 + 1$ dö x

b) $x^{27} + x^9 + x^3 + x = (x^{27} – x) + (x^9 – x) + (x^3 – x) + 4x$

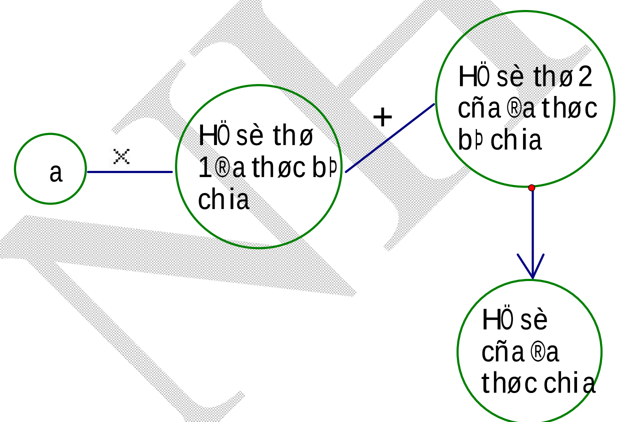
$= x(x^{26} – 1) + x(x^8 – 1) + x(x^2 – 1) + 4x$ chia cho $x^2 – 1$ dö 4x

c) $x^{99} + x^{55} + x^{11} + x + 7 = x(x^{98} + 1) + x(x^{54} + 1) + x(x^{10} + 1) – 2x + 7$

chia cho $x^2 + 1$ dö $– 2x + 7$

B. Sô ñoà HORNÔ

1. Sô ñoà



Ñeå tìm keát quaû cuûa pheùp chia f(x) cho x – a

(a laø haèng soá), ta söû duïng sô ñoà hornô

Neáu ña thöùc bò chia laø $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$,

ña thöùc chia laø x – a ta ñöôïc thöông laø

$b_0x^2 + b_1x + b_2$, dö r thì ta coù

	a_0	a_1	a_2	a_3
a	$b_0 = a_0$	$b_1 = ab_0 + a_1$	$b_2 = ab_1 + a_2$	$r = ab_2 + a_3$

Ví duï:

Ña thöùc bò chia: $x^3 -5x^2 + 8x – 4$, ña thöùc chia x – 2

Ta coù sô ñoà

	1	- 5	8	- 4
2	1	2. 1 + (- 5) = -3	2.(- 3) + 8 = 2	r = 2. 2 +(- 4) = 0

Vaäy: $x^3 -5x^2 + 8x – 4 = (x – 2)(x^2 – 3x + 2) + 0$ laø pheùp chia heát

2. AÙp duïng sô ñoà Hornô ñeå tính giaù trò cuûa ña thöùc taïi x = a

Giaù trò cuûa f(x) taïi x = a laø soá dö cuûa pheùp chia f(x) cho x – a

1. Ví duï 1:

Tính giaù trò cuûa A = $x^3 + 3x^2 - 4$ taïi x = 2010

Ta coù sô ñoà:

	1	3	0	-4
a = 2010	1	2010.1+3 = 2013	2010.2013 + 0 = 4046130	2010.4046130 – 4 = 8132721296

Vaäy: A(2010) = 8132721296

C. Chöùng minh moät ña thöùc chia heát cho moät ña thöùc khaùc

I. Phöông phaùp:

1. Caùch 1: Phaân tích ña thöùc bò chia thaønh nhaân töû coù moät thöøa soá laø ña thöùc chia

2. Caùch 2: bieán ñoåi ña thöùc bò chia thaønh moät toång caùc ña thöùc chia heát cho ña thöùc chia

3. Caùch 3: Bieán ñoåi töông ñöông $f(x) \vdots g(x) \Leftrightarrow f(x) \pm g(x) \vdots g(x)$

4. caùch 4: Chöùng toû moïi nghieäm cuûa ña thöùc chia ñeàu laø nghieäm cuûa ña thöùc bò chia

II. Ví duï

1.Ví duï 1:

Chöùng minh raèng: $x^{8n} + x^{4n} + 1$ chia heát cho $x^{2n} + x^n + 1$

Ta coù: $x^{8n} + x^{4n} + 1 = x^{8n} + 2x^{4n} + 1 - x^{4n} = (x^{4n} + 1)^2 - x^{4n} = (x^{4n} + x^{2n} + 1)(x^{4n} - x^{2n} + 1)$

Ta laïi coù: $x^{4n} + x^{2n} + 1 = x^{4n} + 2x^{2n} + 1 - x^{2n} = (x^{2n} + x^n + 1)(x^{2n} - x^n + 1)$

chia heát cho $x^{2n} + x^n + 1$

Vaäy: $x^{8n} + x^{4n} + 1$ chia heát cho $x^{2n} + x^n + 1$

2. Ví duï 2:

Chöùng minh raèng: $x^{3m+1} + x^{3n+2} + 1$ chia heát cho $x^2 + x + 1$ vôùi moïi m, n $\in$ N

Ta coù: $x^{3m+1} + x^{3n+2} + 1 = x^{3m+1} - x + x^{3n+2} - x^2 + x^2 + x + 1$

$= x(x^{3m} - 1) + x^2(x^{3n} - 1) + (x^2 + x + 1)$

Vì $x^{3m} - 1$ vaø $x^{3n} - 1$ chia heát cho $x^3 - 1$ neân chia heát cho $x^2 + x + 1$

Vay: $x^{3m + 1} + x^{3n + 2} + 1$ chia het cho $x^2 + x + 1$ vôi moi m, n $\in$ N

3. Ví duï 3: Chöùng minh raèng

$f(x) = x^{99} + x^{88} + x^{77} + ... + x^{11} + 1$ chia heát cho $g(x) = x^9 + x^8 + x^7 + ...+ x + 1$

Ta coù: $f(x) – g(x) = x^{99} – x^9 + x^{88} – x^8 + x^{77} – x^7 + ... + x^{11} – x + 1 – 1$

$= x^9(x^{90} – 1) + x^8(x^{80} – 1) + ...+ x(x^{10} – 1)$ chia heát cho $x^{10} – 1$

Maø $x^{10} – 1 = (x – 1)(x^9 + x^8 + x^7 +...+ x + 1)$ chia heát cho $x^9 + x^8 + x^7 +...+ x + 1$

Suy ra f(x) – g(x) chia heát cho $g(x) = x^9 + x^8 + x^7 +...+ x + 1$

Neân $f(x) = x^{99} + x^{88} + x^{77} + ... + x^{11} + 1$ chia heát cho $g(x) = x^9 + x^8 + x^7 + ...+ x + 1$

4. Ví duï 4: CMR: $f(x) = (x^2 + x – 1)^{10} + (x^2 - x + 1)^{10} – 2$ chia heát cho $g(x) = x^2 – x$

Ña thöùc $g(x) = x^2 – x = x(x – 1)$ coù 2 nghieäm laø x = 0 vaø x = 1

Ta coù $f(0) = (-1)^{10} + 1^{10} – 2 = 0 \Rightarrow x = 0$ laø nghieäm cuûa f(x) $\Rightarrow$ f(x) chöùa thöøa soá x

$f(1) = (1^2 + 1 – 1)^{10} + (1^2 – 1 + 1)^{10} – 2 = 0 \Rightarrow x = 1$ laø nghieäm cuûa f(x) f(x) chöùa thöøa soá x – 1, maø caùc thöøa soá x vaø x – 1 khoâng coù nhaân töû chung, do ñoù f(x) chia heát cho x(x – 1)

hay $f(x) = (x^2 + x – 1)^{10} + (x^2 - x + 1)^{10} – 2$ chia heát cho $g(x) = x^2 – x$

5. Ví duï 5: Chöùng minh raèng

a) $A = x^2 – x^9 – x^{1945}$ chia heát cho $B = x^2 – x + 1$

b) $C = 8x^9 – 9x^8 + 1$ chia heát cho $D = (x – 1)^2$

c) $C (x) = (x + 1)^{2n} – x^{2n} – 2x – 1$ chia heát cho $D(x) = x(x + 1)(2x + 1)$

Giaûi

a) $A = x^2 – x^9 – x^{1945} = (x^2 – x + 1) – (x^9 + 1) – (x^{1945} – x)$

Ta coù: $x^2 – x + 1$ chia heát cho $B = x^2 – x + 1$

$x^9 + 1$ chia heát cho $x^3 + 1$ neân chia heát cho $B = x^2 – x + 1$

$x^{1945} – x = x(x^{1944} – 1)$ chia heát cho $x^3 + 1$ (cuøng coù nghieäm laø x = - 1)

neân chia heát cho $B = x^2 – x + 1$

Vay A = $x^2 - x^9 - x^{1945}$ chia het cho B = $x^2 - x + 1$

b) C = $8x^9 - 9x^8 + 1 = 8x^9 - 8 - 9x^8 + 9 = 8(x^9 - 1) - 9(x^8 - 1)$

$= 8(x - 1)(x^8 + x^7 + ...+ 1) - 9(x - 1)(x^7 + x^6 + ...+ 1)$

$= (x - 1)(8x^8 - x^7 - x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1)$

$(8x^8 - x^7 - x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1)$ chia het cho x – 1 vì co tong he so bang 0

suy ra $(x - 1)(8x^8 - x^7 - x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1)$ chia het cho $(x - 1)^2$

c) Ña thöc chia D (x) = x(x + 1)(2x + 1) co ba nghiem la x = 0, x = - 1, x = - $\frac{1}{2}$

Ta co:

$C(0) = (0 + 1)^{2n} - 0^{2n} - 2.0 - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$ la nghiem cua C(x)

$C(-1) = (-1 + 1)^{2n} - (- 1)^{2n} - 2.(- 1) - 1 = 0 \Rightarrow x = - 1$ la nghiem cua C(x)

$C(-\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2} + 1)^{2n} - (-\frac{1}{2})^{2n} - 2.(-\frac{1}{2}) - 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ la nghiem cua C(x)

Moi nghiem cua ña thöc chia la nghiem cua ña thöc bò chia $\Rightarrow$ ñpcm

6. Ví du 6:

Cho f(x) la ña thöc co he so nguyen. Biet f(0), f(1) la cac so le. Chöng minh rang f(x) khong co nghiem nguyen

Gia sö x = a la nghiem nguyen cua f(x) thì f(x) = (x – a). Q(x). Trong ño Q(x) la ña thöc co he so nguyen, do ño f(0) = - a. Q(0), f(1) = (1 – a). Q(1)

Do f(0) la so le nen a la so le, f(1) la so le nen 1 – a la so le, ma 1 – a la hieu cua 2 so le khong the la so le, mau thuan

Vay f(x) khong co nghiem nguyen

Bai tap ve nha:

Bai 1: Tìm so dö khi

a) x^{43} chia cho $x^2 + 1$

b) $x^{77} + x^{55} + x^{33} + x^{11} + x + 9$ cho $x^2 + 1$

Bai 2: Tính gia trò cua ña thöc $x^4 + 3x^3 - 8$ tai x = 2009

Bai 3: Chöng minh rang

a) $x^{50} + x^{10} + 1$ chia het cho $x^{20} + x^{10} + 1$

b) $x^{10} - 10x + 9$ chia het cho $x^2 - 2x + 1$

c) $x^{4n+2} + 2x^{2n+1} + 1$ chia het cho $x^2 + 2x + 1$

d) $(x + 1)^{4n+2} + (x - 1)^{4n+2}$ chia het cho $x^2 + 1$

e) $(x^n - 1)(x^{n+1} - 1)$ chia het cho $(x + 1)(x - 1)^2$

CHUYEN ÑE 11 – CAC BAI TOAN VE BIEU THÖC HÖU TÆ

A. Nhac lai kien thöc:

Cac böôc rut gon bieu thöc höu tæ

a) Tìm ÑKXÑ: Phan tích mau thanh nhan tö, cho tat ca cac nhan tö khac 0

b) Phan tích tö thanh nhan , chia tö va mau cho nhan tö chung

B. Bai tap:

Bai 1: Cho bieu thöc A = $\frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^4 - 10x^2 + 9}$

a) Rut gon A

b) tìm x ñe A = 0

c) Tìm gia trò cua A khi $|2x - 1| = 7$

Giai

a)Ñkxñ :

$$x^4 - 10x^2 + 9 \neq 0 \Leftrightarrow [(x^2)^2 - x^2] - (9x^2 - 9) \neq 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 1) - 9(x^2 - 1) \neq 0$$

$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 9) \neq 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 3) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -1 \\ x \neq 3 \\ x \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ x \neq \pm 3 \end{cases}$

Tö : $x^4 - 5x^2 + 4 = [(x^2)^2 - x^2] - (x^2 - 4) = x^2(x^2 - 1) - 4(x^2 - 1)$

$= (x^2 - 1)(x^2 - 4) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$

Vôi $x \neq \pm 1$; $x \neq \pm 3$ thì

A = $\dfrac{(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)}{(x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 3)} = \dfrac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 3)(x + 3)}$

b) A = 0 $\Leftrightarrow \dfrac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 3)(x + 3)} = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

c) $|2x - 1| = 7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 1 = 7 \\ 2x - 1 = -7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = 8 \\ 2x = -6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -3 \end{array}\right.$

* Vôi x = 4 thì A = $\dfrac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 3)(x + 3)} = \dfrac{(4 - 2)(4 + 2)}{(4 - 3)(4 + 3)} = \dfrac{12}{7}$

* Vôi x = - 3 thì A khong xac ñònh

2. Bai 2:

Cho bieu thöc B = $\dfrac{2x^3 - 7x^2 - 12x + 45}{3x^3 - 19x^2 + 33x - 9}$

a) Rut gon B

b) Tìm x ñe B > 0

Giai

a) Phan tích mau: $3x^3 - 19x^2 + 33x - 9 = (3x^3 - 9x^2) - (10x^2 - 30x) + (3x - 9)$

$= (x - 3)(3x^2 - 10x + 3) = (x - 3)[(3x^2 - 9x) - (x - 3)] = (x - 3)^2(3x - 1)$

Ñkxñ: $(x - 3)^2(3x - 1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$ va $x \neq \dfrac{1}{3}$

b) Phan tích tö, ta co:

$2x^3 - 7x^2 - 12x + 45 = (2x^3 - 6x^2) - (x^2 - 3x) - (15x - 45) = (x - 3)(2x^2 - x - 15)$

$= (x - 3)[(2x^2 - 6x) + (5x - 15)] = (x - 3)^2(2x + 5)$

Vôi x $\neq$ 3 va x $\neq$ $\frac{1}{3}$

Thì B = $\frac{2x^3-7x^2-12x+45}{3x^3-19x^2+33x-9}$ = $\frac{(x-3)^2(2x+5)}{(x-3)^2(3x-1)} = \frac{2x+5}{3x-1}$

c) B > 0 $\Leftrightarrow$ $\frac{2x+5}{3x-1} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x-1>0\\2x+5>0\end{cases}\\\begin{cases}3x-1<0\\2x+5<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>\frac{1}{3}\\x>-\frac{5}{2}\end{cases}\\\begin{cases}x<\frac{1}{3}\\x<-\frac{5}{2}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>\frac{1}{3}\\x<-\frac{5}{2}\end{array}\right.$

3. Bai 3

Cho bieu thöc C = $\left(\frac{1}{1-x}+\frac{2}{x+1}-\frac{5-x}{1-x^2}\right):\frac{1-2x}{x^2-1}$

a) Rut gon bieu thöc C

b) Tìm gia trò nguyen cua x ñe gia trò cua bieu thöc B la so nguyen

Giai

a) Ñkxñ: x $\neq$ $\pm$ 1

C = $\left(\frac{1}{1-x}+\frac{2}{x+1}-\frac{5-x}{1-x^2}\right):\frac{1-2x}{x^2-1} = \left[\frac{1+x+2(1-x)-5}{(1-x)(1+x)}\right].\frac{(x-1)(x+1)}{1-2x} = \frac{-2}{2x-1}$

b) B co gia trò nguyen khi x la so nguyen thì $\frac{-2}{2x-1}$ co gia trò nguyen

$\Leftrightarrow$ 2x – 1 la Ö(2) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-1=1\\2x-1=-1\\2x-1=2\\2x-1=-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=0\\x=1,5\\x=-1\end{array}\right.$

Ñoi chieu Ñkxñ thì chæ co x = 0 thoa man

4. Bai 4

Cho bieu thöc D = $\frac{x^3+x^2-2x}{x|x+2|-x^2+4}$

a) Rut gon bieu thöc D

b) Tìm x nguyen ñe D co gia trò nguyen

c) Tìm gia trò cua D khi x = 6

Giai

a) Neu x + 2 > 0 thì $|x+2|$ = x + 2 nen

D = $\dfrac{x^3+x^2-2x}{x|x+2|-x^2+4}$ = $\dfrac{x^3+x^2-2x}{x(x+2)-x^2+4}=\dfrac{x(x-1)(x+2)}{x(x+2)-(x-2)(x+2)}=\dfrac{x^2-x}{2}$

Neu x + 2 < 0 thì $|x+2|$ = - (x + 2) nen

D = $\dfrac{x^3+x^2-2x}{x|x+2|-x^2+4}$ = $\dfrac{x^3+x^2-2x}{-x(x+2)-x^2+4}=\dfrac{x(x-1)(x+2)}{-x(x+2)-(x-2)(x+2)}=\dfrac{-x}{2}$

Neu x + 2 = 0 $\Leftrightarrow$ x = -2 thì bieu thöc D khong xac ñònh

b) Ñe D co gia trò nguyen thì $\dfrac{x^2-x}{2}$ hoac $\dfrac{-x}{2}$ co gia trò nguyen

+) $\dfrac{x^2-x}{2}$ co gia trò nguyen $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x \;\vdots\; 2 \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x - 1) \;\vdots\; 2 \\ x > -2 \end{cases}$

Vì x(x – 1) la tích cua hai so nguyen lien tiep nen chia het cho 2 vôi moi x > - 2

+) $\dfrac{-x}{2}$ co gia trò nguyen $\Leftrightarrow \begin{cases} x \;\vdots\; 2 \\ x < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k \\ x < -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2k \ (k \in Z;\ k < -1)$

c) Khia x = 6 $\Rightarrow$ x > - 2 nen D = $\dfrac{x^2-x}{2}$ = $\dfrac{6(6-1)}{2}=15$

Bai tap ve nha

Bai 1:

Cho bieu thöc A = $\left(\dfrac{2-x}{x+3}-\dfrac{3-x}{x+2}+\dfrac{2-x}{x^2+5x+6}\right):\left(1-\dfrac{x}{x-1}\right)$

a) Rut gon A

b) Tìm x ñe A = 0; A > 0

Bai 2:

Cho bieu thöc B = $\dfrac{3y^3-7y^2+5y-1}{2y^3-y^2-4y+3}$

a) Rut gon B

b) Tìm so nguyen y ñe $\dfrac{2D}{2y+3}$ co gia trò nguyen

c) Tìm so nguyen y ñe B $\geq$ 1

CHUYEN ÑE 12 – CAC BAI TOAN VE BIEU THÖC (TIEP)

*** Dang 2: Cac bieu thöc co tính quy luat**

Bai 1: Rut gon cac bieu thöc

a) A = $\dfrac{3}{(1.2)^2}+\dfrac{5}{(2.3)^2}+......+\dfrac{2n+1}{\left[n(n+1)\right]^2}$

Phöông phap: Xuat phat tö hang tö cuoi ñe tìm ra quy luat

Ta co $\dfrac{2n+1}{\left[n(n+1)\right]^2}$ = $\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}$ Nen

A = $\dfrac{1}{1^2}-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3^2}-......-\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{(n+1)^2}=\dfrac{n(n+1)}{(n+1)^2}$

b) B = $\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right).\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right).\left(1-\dfrac{1}{4^2}\right)........\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$

Ta co $1-\dfrac{1}{k^2}=\dfrac{k^2-1}{k^2}=\dfrac{(k+1)(k-1)}{k^2}$ Nen

B = $\dfrac{1.3}{2^2}.\dfrac{2.4}{3^2}.\dfrac{3.5}{4^2}...\dfrac{(n-1)(n+1)}{n^2}=\dfrac{1.3.2.4...(n-1)(n+1)}{2^2.3^2.4^2...n^2}=\dfrac{1.2.3...(n-1)}{2.3.4...(n-1)n}.\dfrac{3.4.5...(n+1)}{2.3.4....n}=\dfrac{1}{n}.\dfrac{n+1}{2}=\dfrac{n+1}{2n}$

c) C = $\dfrac{150}{5.8}+\dfrac{150}{8.11}+\dfrac{150}{11.14}+......+\dfrac{150}{47.50}$ = $150.\dfrac{1}{3}.\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{11}+......+\dfrac{1}{47}-\dfrac{1}{50}\right)$

= 50.$\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{50}\right)=50.\dfrac{9}{10}=45$

d) D = $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+......+\frac{1}{(n-1)n(n+1)}$ = $\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}+......+\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right)$

= $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1.2}-\frac{1}{n(n+1)}\right]=\frac{(n-1)(n+2)}{4n(n+1)}$

Bai 2:

a) Cho A = $\frac{m-1}{1}+\frac{m-2}{2}+...+\frac{2}{m-2}+\frac{1}{n-1}$; B = $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+......+\frac{1}{n}$. Tính $\frac{A}{B}$

Ta co

A = $\left(\frac{n}{1}+\frac{n}{2}+...+\frac{n}{n-2}+\frac{n}{n-1}\right)-\left(\underbrace{1+1+...+1}_{n-1}\right)=n\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}\right)-(n-1)$

= $n\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}\right)+1=n\left(\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}\right)=\text{nB}\ \Rightarrow\ \frac{A}{B}$ = n

b) A = $\frac{1}{1.(2n-1)}+\frac{1}{3.(2n-3)}+......+\frac{1}{(2n-3).3}+\frac{1}{(2n-1).1}$; B = 1 + $\frac{1}{3}+......+\frac{1}{2n-1}$

Tính A : B

Giai

A = $\frac{1}{2n}\left[\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n-3}\right)+...+\left(\frac{1}{2n-3}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2n-1}+1\right)\right]$

$=\frac{1}{2n}\left[\left(1+\frac{1}{3}+......+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n-3}\right)+\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n-3}+......+\frac{1}{3}+1\right)\right]$

$=\frac{1}{2n}.2.\left(1+\frac{1}{3}+......+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n-3}\right)=\frac{1}{2n}.2.B\ \Rightarrow\frac{A}{B}=\frac{1}{n}$

Bai tap ve nha

Rut gon cac bieu thöc sau:

a) $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+......+\frac{1}{(n-1)n}$

b) $\frac{1^2}{2^2-1}.\frac{3^2}{4^2-1}.\frac{5^2}{6^2-1}......\frac{n^2}{(n+1)^2-1}$

c) $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+......+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

*** Dang 3: Rut gon; tính gia trò bieu thöc thoa man ñieu kien cua bien**

Bai 1: Cho $x+\frac{1}{x}=3$. TÝnh gi¸ trÞ cña c¸c biÓu thøc sau :

a) $A=x^2+\frac{1}{x^2}$; b) $B=x^3+\frac{1}{x^3}$; c) $C=x^4+\frac{1}{x^4}$; d) $D=x^5+\frac{1}{x^5}$.

Lêi gi¶i

a) $A=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=9-2=7$;

b) $B=x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=27-9=18$;

c) $C=x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2=49-2=47$;

d) $A.B=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=x^5+\frac{1}{x}+x+\frac{1}{x^5}=D+3 \Rightarrow D = 7.18 - 3 = 123.$

Bai 2: Cho $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=2$ (1); $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=2$ (2).

Tính gia trò bieu thöc $D = \left(\frac{a}{x}\right)^2+\left(\frac{b}{y}\right)^2+\left(\frac{c}{z}\right)^2$

Tö (1) suy ra bcx + acy + abz = 0 (3)

Tö (2) suy ra

$\left(\frac{a}{x}\right)^2+\left(\frac{b}{y}\right)^2+\left(\frac{c}{z}\right)^2+2.\left(\frac{ab}{xy}+\frac{ac}{xz}+\frac{bc}{yz}\right)=4 \Rightarrow \left(\frac{a}{x}\right)^2+\left(\frac{b}{y}\right)^2+\left(\frac{c}{z}\right)^2=4-2.\left(\frac{ab}{xy}+\frac{ac}{xz}+\frac{bc}{yz}\right)$ (4)

Thay (3) vao (4) ta co D = 4 – 2.0 = 4

Bai 3

a) Cho abc = 2; rut gon bieu thöc $A = \frac{a}{ab+a+2}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{2c}{ac+2c+2}$

Ta co :

$A = \frac{a}{ab+a+2}+\frac{ab}{abc+ab+a}+\frac{2c}{ac+2c+2}=\frac{a}{ab+a+2}+\frac{ab}{2+ab+a}+\frac{2c}{ac+2c+abc}$

$$= \frac{a}{ab + a + 2} + \frac{ab}{2 + ab + a} + \frac{2c}{c(a + 2 + ab)} = \frac{a}{ab + a + 2} + \frac{ab}{2 + ab + a} + \frac{2}{a + 2 + ab} = \frac{ab + a + 2}{ab + a + 2} = 1$$

b) Cho a + b + c = 0; rut gon bieu thöc B = $\frac{a^2}{a^2 - b^2 - c^2} + \frac{b^2}{b^2 - c^2 - a^2} + \frac{c^2}{c^2 - b^2 - a^2}$

Tö a + b + c = 0 $\Rightarrow a = -(b + c) \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \Rightarrow a^2 - b^2 - c^2 = 2bc$

Töông tö ta co: $b^2 - a^2 - c^2 = 2ac$; $c^2 - b^2 - a^2 = 2ab$ (Hoan vò vong quanh), nen

B = $\frac{a^2}{2bc} + \frac{b^2}{2ac} + \frac{c^2}{2ab} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{2abc}$ (1)

$a + b + c = 0 \Rightarrow -a = (b + c) \Rightarrow -a^3 = b^3 + c^3 + 3bc(b + c) \Leftrightarrow -a^3 = b^3 + c^3 - 3abc$

$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ (2)

Thay (2) vao (1) ta co B = $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{2abc} = \frac{3abc}{2abc} = \frac{3}{2}$ (Vì $abc \neq 0$)

c) Cho a, b, c töng ñoi mot khac nhau thoa man: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Rut gon bieu thöc C = $\frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab}$

Tö $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow ab + ac + bc = 0$

$\Rightarrow a^2 + 2bc = a^2 + 2bc - (ab + ac + bc) = a^2 - ab + bc - ac = (a - b)(a - c)$

Töông tö: $b^2 + 2ac = (b - a)(b - c)$; $c^2 + 2ab = (c - a)(c - b)$

$$C = \frac{a^2}{(a - b)(a - c)} + \frac{b^2}{(b - a)(b - c)} + \frac{c^2}{(c - a)(c - b)} = \frac{a^2}{(a - b)(a - c)} - \frac{b^2}{(a - b)(b - c)} + \frac{c^2}{(a - c)(b - c)}$$

$$= \frac{a^2(b - c)}{(a - b)(a - c)(b - c)} - \frac{b^2(a - c)}{(a - b)(a - c)(b - c)} + \frac{c^2(b - c)}{(a - b)(a - c)(b - c)} = \frac{(a - b)(a - c)(b - c)}{(a - b)(a - c)(b - c)} = 1$$

*** Daïng 4: Chöùng minh ñaúng thöùc thoaû maõn ñieàu kieän cuûa bieán**

1. Baøi 1: Cho $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$ (1); $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 2$ (2).

Chöùng minh raèng: a + b + c = abc

Tö (1) suy ra $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2.\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}\right) = 4 \Rightarrow 2.\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}\right) = 4 - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ac} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{a+b+c}{abc} = 1 \Leftrightarrow$ a + b + c = abc

2. Bai 2: Cho a, b, c ≠ 0 vµ a + b + c ≠ 0 tháa m·n ®iÒu kiÖn $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c}$.

Chøng minh r»ng trong ba sè a, b, c cã hai sè ®èi nhau.

Tõ ®ã suy ra r»ng : $\dfrac{1}{a^{2009}}+\dfrac{1}{b^{2009}}+\dfrac{1}{c^{2009}}=\dfrac{1}{a^{2009}+b^{2009}+c^{2009}}$.

Ta cã : $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c} \Leftrightarrow \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{a+b+c}=0 \Leftrightarrow \dfrac{a+b}{ab}+\dfrac{a+b}{c(a+b+c)}=0$

$$\Leftrightarrow (a+b).\frac{c(a+b+c)+ab}{abc(a+b+c)}=0 \Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=0 \\ b+c=0 \\ c+a=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b \\ b=-c \\ c=-a \end{array}\right.$$

Tõ ®ã suy ra : $\dfrac{1}{a^{2009}}+\dfrac{1}{b^{2009}}+\dfrac{1}{c^{2009}}=\dfrac{1}{a^{2009}}+\dfrac{1}{(-c)^{2009}}+\dfrac{1}{c^{2009}}=\dfrac{1}{a^{2009}}$

$$\frac{1}{a^{2009}+b^{2009}+c^{2009}}=\frac{1}{a^{2009}+(-c)^{2009}+c^{2009}}=\frac{1}{a^{2009}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^{2009}}+\frac{1}{b^{2009}}+\frac{1}{c^{2009}}=\frac{1}{a^{2009}+b^{2009}+c^{2009}}.$$

3. Bai 3: Cho $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} = \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{b} + \dfrac{a}{c}$ (1)

chöng minh rang : trong ba so a, b, c ton tai hai so bang nhau

Tö (1) $\Rightarrow a^2c + ab^2 + bc^2 = b^2c + ac^2 + a^2b \Rightarrow a^2(b - c) - a(c^2 - b^2) + bc(c - b) = 0$

$\Rightarrow (c - b)(a^2 - ac = ab + bc) = 0 \Rightarrow (c - b)(a - b)(a - c) = 0 \Rightarrow$ ñpcm

4. Bai 4: Cho $(a^2 - bc)(b - abc) = (b^2 - ac)(a - abc)$; $abc \neq 0$ va $a \neq b$

Chöng minh rang: $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = a + b + c$

Tö GT $\Rightarrow a^2b - b^2c - a^3bc + ab^2c^2 = ab^2 - a^2c - ab^3c + a^2bc^2$

$\Leftrightarrow (a^2b - ab^2) + (a^2c - b^2c) = abc^2(a - b) + abc(a - b)(a + b)$

$\Leftrightarrow (a - b)(ab + ac + bc) = abc(a - b)(a + b + c)$

$$\Leftrightarrow \frac{ab + ac + bc}{abc} = a + b + c \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = a + b + c$$

5. Bai 5: Cho a + b + c = x + y + z = $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$; Chöng minh rang: $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$

Tö $x + y + z = 0 \Rightarrow x^2 = (y + z)^2$; $y^2 = (x + z)^2$; $z^2 = (y + x)^2$

$\Rightarrow ax^2 + by^2 + cz^2 = a(y + z)^2 + b(x + z)^2 + c\,(y + x)^2 = \ldots$

$= (b + c)x^2 + (a + c)y^2 + (a + b)z^2 + 2(ayz + bxz + cxy)$ (1)

Tö $a + b + c = 0 \Rightarrow - a = b + c; - b = a + c; - c = a + b$ (2)

Tö $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0 \Rightarrow ayz + bxz + cxy = 0$ (3). Thay (2), (3) vao (1); ta co:

$ax^2 + by^2 + cz^2 = -(ax^2 + by^2 + cz^2) \Rightarrow ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$

6. Bai 6: Cho $\frac{a}{b - c} + \frac{b}{c - a} + \frac{c}{a - b} = 0$; chöng minh: $\frac{a}{(b - c)^2} + \frac{b}{(c - a)^2} + \frac{c}{(a - b)^2} = 0$

Tö $\frac{a}{b - c} + \frac{b}{c - a} + \frac{c}{a - b} = 0 \Rightarrow \frac{a}{b - c} = \frac{b}{a - c} + \frac{c}{b - a} = \frac{b^2 - ab + ac - c^2}{(a - b)(c - a)}$

$\Leftrightarrow \frac{a}{(b - c)^2} = \frac{b^2 - ab + ac - c^2}{(a - b)(c - a)(b - c)}$ (1) (Nhan hai ve vôi $\frac{1}{b - c}$)

Töông tö, ta co: $\frac{b}{(c - a)^2} = \frac{c^2 - bc + ba - a^2}{(a - b)(c - a)(b - c)}$ (2) ; $\frac{c}{(a - b)^2} = \frac{a^2 - ac + cb - b^2}{(a - b)(c - a)(b - c)}$ (3)

Cong töng ve (1), (2) va (3) ta co ñpcm

7. Bai 7:

Cho a + b + c = 0; chöng minh: $\left(\frac{a - b}{c} + \frac{b - c}{a} + \frac{c - a}{b}\right)\left(\frac{c}{a - b} + \frac{a}{b - c} + \frac{b}{c - a}\right) = 9$ (1)

Ñat $\frac{a - b}{c} = x$; $\frac{b - c}{a} = y; \frac{c - a}{b} = z \Rightarrow \frac{c}{a - b} = \frac{1}{x}\ \frac{a}{b - c} = \frac{1}{y}; \frac{b}{c - a} = \frac{1}{z}$

(1) $\Leftrightarrow (x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 9$

Ta co: $(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 3 + \left(\frac{y + z}{x} + \frac{x + z}{y} + \frac{x + y}{z}\right)$ (2)

Ta lai co: $\frac{y+z}{x}=\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right).\frac{c}{a-b}=\frac{b^2-bc+ac-a^2}{ab}.\frac{c}{a-b}=\frac{c(a-b)(c-a-b)}{ab(a-b)}=\frac{c(c-a-b)}{ab}$

= $\frac{c\left[2c-(a+b+c)\right]}{ab}=\frac{2c^2}{ab}$ (3)

Töông tö, ta co: $\frac{x+z}{y}=\frac{2a^2}{bc}$ (4) ; $\frac{x+y}{z}=\frac{2b^2}{ac}$ (5)

Thay (3), (4) va (5) vao (2) ta co:

$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3$ + $\frac{2c^2}{ab}+\frac{2a^2}{bc}+\frac{2b^2}{ac}$ = 3 + $\frac{2}{abc}$($a^3+b^3+c^3$) (6)

Tö a + b + c = 0 $\Rightarrow$ $a^3+b^3+c^3=3abc$ (7) ?

Thay (7) vao (6) ta co: $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3$ + $\frac{2}{abc}$. 3abc = 3 + 6 = 9

Bai tap ve nha:

1) cho $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$; tính gia trò bieu thöc A = $\frac{yz}{x^2}+\frac{xz}{y^2}+\frac{xy}{z^2}$

HD: A = $\frac{xyz}{x^3}+\frac{xyz}{y^3}+\frac{xyz}{z^3}$; van dung a + b + c = 0 $\Rightarrow$ $a^3+b^3+c^3=3abc$

2) Cho $a^3+b^3+c^3=3abc$; Tính gia trò bieu thöc A = $\left(\frac{a}{b}+1\right)\left(\frac{b}{c}+1\right)\left(\frac{c}{a}+1\right)$

3) Cho x + y + z = 0; chöng minh rang: $\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}+3=0$

4) Cho a + b + c = $a^2+b^2+c^2=1$; $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$. Chöng minh xy + yz + xz = 0

CHUYEN ÑE 13 – CAC BAI TOAN VE TAM GIAC ÑONG DANG

A. Kien thöc:

* Tam giac ñong dang:

a) tröông hôp thö nhat: (c.c.c)

ΔABC ∽ A'B'C' $\Leftrightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$

b) tröôøng hôïp thöù nhaát: (c.g.c)

ΔABC ∽ A'B'C' $\Leftrightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$; $\widehat{A} = \widehat{A'}$

c. Tröôøng hôïp ñoàng daïng thöù ba (g.g)

ΔABC ∽ A'B'C' $\Leftrightarrow \widehat{A} = \widehat{A'}$; $\widehat{B} = \widehat{B'}$

AH; A'H' laø hai ñöôøng cao töông öùng thì: $\frac{A'H'}{AH}$ = k (Tæ soá ñoàng daïng); $\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = K^2$

B. Baøi taäp aùp duïng

Baøi 1:

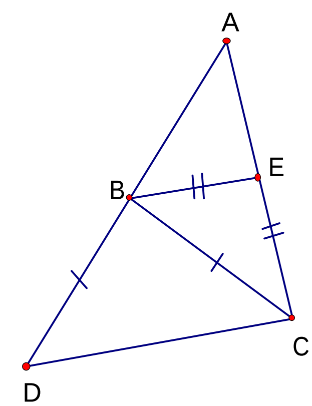
Cho ΔABC coù $\widehat{B} = 2\widehat{C}$, AB = 8 cm, BC = 10 cm.

a)Tính AC

b)Neáu ba caïnh cuûa tam giaùc treân laø ba soá töï nhieân lieân tieáp thì

moãi caïnh laø bao nhieâu?

Giaûi



Caùch 1:

Treân tia ñoái cuûa tia BA laáy ñieåm E sao cho:BD = BC

ΔACD ∽ ΔABC (g.g) $\Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC}$

$\Rightarrow AC^2 = AB.\ AD = AB.(AB + BD)$ = AB(AB + BC)

= 8(10 + 8) = 144 $\Rightarrow$ AC = 12 cm

Caùch 2:

Veõ tia phaân giaùc BE cuûa $\widehat{ABC} \Rightarrow \Delta$ABE ∽ ΔACB

$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{BE}{CB} = \frac{AE + BE}{AB + CB} = \frac{AC}{AB + CB} \Rightarrow AC^2 = AB(AB + CB)$ = 8(8 + 10) = 144

$\Rightarrow$ AC = 12 cm

b) Goi AC = b, AB = a, BC = c thì tö cau a ta co $b^2 = a(a + c)$ (1)

Vì b > anen co the b = a + 1 hoac b = a + 2

+ Neu b = a + 1 thì $(a + 1)^2 = a^2 + ac \Leftrightarrow 2a + 1 = ac \Leftrightarrow a(c - 2) = 1$

$\Rightarrow$ a = 1; b = 2; c = 3(loai)

+ Neu b = a + 2 thì a(c – 4) = 4

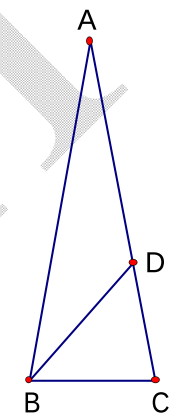
- Vôi a = 1 thì c = 8 (loai)

- Vôi a = 2 thì c = 6 (loai)

- vôi a = 4 thì c = 6 ; b = 5

Vay a = 4; b = 5; c = 6

Bai 2:



Cho ΔABC can tai A, ñöông phan giac BD; tính BD

biet BC = 5 cm; AC = 20 cm

Giai

Ta co $\frac{CD}{AD} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{4} \Rightarrow$ CD = 4 cm va BC = 5 cm

Bai toan trô ve bai 1

Bai 3:

Cho ΔABC can tai A va O la trung ñiem cua BC. Mot ñiem O di ñong tren AB, lay ñiem E tren AC sao cho $CE = \frac{OB^2}{BD}$. Chöng minh rang

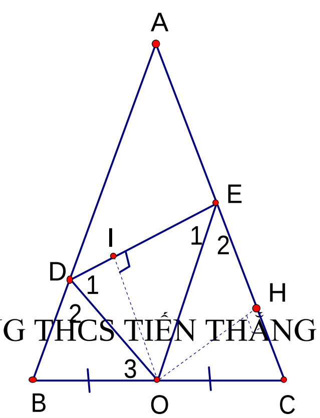
a) $\Delta DBO \backsim \Delta OCE$

b) $\Delta DOE \backsim \Delta DBO \backsim \Delta OCE$

c) DO, EO lan löôt la phan giac cua cac goc BDE, CED

d) khoang cach tö O ñen ñoan ED khong ñoi khi D di ñong tren AB

Giai



a) Tö $CE = \dfrac{OB^2}{BD} \Rightarrow \dfrac{CE}{OB} = \dfrac{OB}{BD}$ va $\hat{B} = \hat{C}$ (gt) $\Rightarrow \Delta DBO \backsim \Delta OCE$

b) Tö cau a suy ra $\hat{O}_3 = \hat{E}_2$ (1)

Vì B, O ,C thang hang nen $\hat{O}_3 + \widehat{DOE} + \widehat{EOC} = 180^0$ (2)

trong tam giac EOC thì $\hat{E}_2 + \hat{C} + \widehat{EOC} = 180^0$ (3)

Tö (1), (2), (3) suy ra $\widehat{DOE} = \hat{B} = \hat{C}$

ΔDOE va ΔDBO co $\dfrac{DO}{DB} = \dfrac{OE}{OC}$ (Do $\Delta DBO \backsim \Delta OCE$)

va $\dfrac{DO}{DB} = \dfrac{OE}{OB}$ (Do OC = OB) va $\widehat{DOE} = \hat{B} = \hat{C}$

nen $\Delta DOE \backsim \Delta DBO \backsim \Delta OCE$

c) Tö cau b suy ra $\hat{D}_1 = \hat{D}_2 \Rightarrow$ DO la phan giac cua cac goc BDE

Cung tö cau b suy ra $\hat{E}_1 = \hat{E}_2$ EO la phan giac cua cac goc CED

c) Goi OH, OI la khoang cach tö O ñen DE, CE thì OH = OI, ma O co ñònh nen OH khong ñoi $\Rightarrow$ OI khong ñoi khi D di ñong tren AB

Bai 4: (Ñe HSG huyen Loc ha – nam 2007 – 2008)

Cho ΔABC can tai A, co BC = 2a, M la trung ñiem BC, lay D, E thuoc AB, AC sao cho $\widehat{DME} = \hat{B}$

a) Chöng minh tích BD. CE khong ñoi

b)Chöng minh DM la tia phan giac cua $\widehat{BDE}$

c) Tính chu vi cua ΔAED neu ΔABC la tam giac ñeu

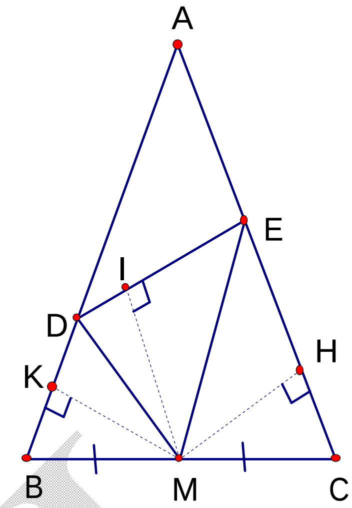
Giai

a) Ta co $\widehat{DMC} = \widehat{DME} + \widehat{CME} = \hat{B} + \widehat{BDM}$, ma $\widehat{DME} = \hat{B}$ (gt)

nen $\widehat{CME} = \widehat{BDM}$, ket hôp vôi $\hat{B} = \hat{C}$ (ΔABC can tai A)

suy ra $\Delta BDM \backsim \Delta CME$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{BD}{CM} = \dfrac{BM}{CE} \Rightarrow BD.\,CE = BM.\,CM = a^2$ khong ñoi



b) $\Delta BDM \backsim \Delta CME \Rightarrow \frac{DM}{ME} = \frac{BD}{CM} \Rightarrow \frac{DM}{ME} = \frac{BD}{BM}$

(do BM = CM) $\Rightarrow \Delta DME \backsim \Delta DBM$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MDE} = \widehat{BMD}$ hay

DM la tia phan giac cua $\widehat{BDE}$

c) chöng minh töông tö ta co EM la tia phan giac cua $\widehat{DEC}$

ke $MH \perp CE$, $MI \perp DE$, $MK \perp DB$ thì MH = MI = MK $\Rightarrow$

$\Delta DKM = \Delta DIM$

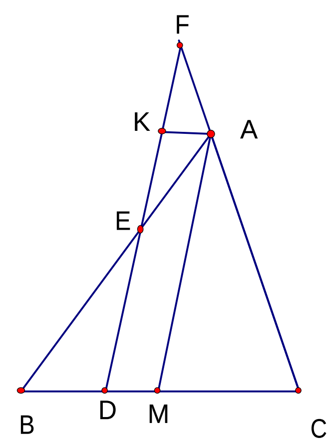
$\Rightarrow$ DK = DI $\Rightarrow \Delta EIM = \Delta EHM \Rightarrow$ EI = EH

Chu vi ΔAED la P_{AED} = AD + DE + EA = AK + AH = 2AH (Vì AH = AK)

ΔABC la tam giac ñeu nen suy ra ΔCME cung la tam giac ñeu CH = $\frac{MC}{2} = \frac{a}{2}$

$\Rightarrow$ AH = 1,5a $\Rightarrow$ P_{AED} = 2 AH = 2. 1,5 a = 3a

Bai 5:



Cho tam giac ABC, trung tuyen AM. Qua ñiem D thuoc canh BC, ve ñöôøng thang song song vôi AM, cat AB, AC tai E va F

a) chöng minh DE + DF khong ñoi khi D di ñong tren BC

b) Qua A ve ñöôøng thang song song vôi BC, cat FE tai K.

Chöng minh rang K la trung ñiem cua FE

Giai

a) DE // AM $\Rightarrow \frac{DE}{AM} = \frac{BD}{BM} \Rightarrow DE = \frac{BD}{BM}.AM$ (1)

DF // AM $\Rightarrow \frac{DF}{AM} = \frac{CD}{CM} \Rightarrow DF = \frac{CD}{CM}.AM = \frac{CD}{BM}.AM$ (2)

Tö (1) va (2) suy ra

DE + DF = $\frac{BD}{BM}.AM + \frac{CD}{BM}.AM = \left(\frac{BD}{BM} + \frac{CD}{BM}\right).AM = \frac{BC}{BM}.AM = 2AM$ khong ñoi

b) AK // BC suy ra $\Delta FKA \backsim \Delta AMC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{FK}{AM} = \frac{KA}{CM}$ (3)

$$\frac{EK}{ED}=\frac{KA}{BD}\Rightarrow\frac{EK}{ED+EK}=\frac{KA}{BD+KA}\Rightarrow\frac{EK}{KD}=\frac{KA}{BD+DM}\Rightarrow\frac{EK}{AM}=\frac{KA}{BM}\Rightarrow\frac{EK}{AM}=\frac{KA}{CM}\ (2)$$

(Vì CM = BM)

Tö (1) va (2) suy ra $\frac{FK}{AM}=\frac{EK}{AM}$ $\Rightarrow$FK = EK hay K la trung ñiem cua FE

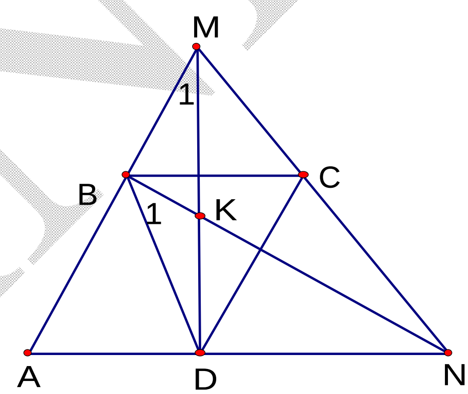
Bai 6: (Ñe HSG huyen Thach ha nam 2003 – 2004)

Cho hình thoi ABCD canh a co $\widehat{A}=60^0$, mot ñöôøng thang bat ky qua C cat tia ñoi cua cac tia BA, DA tai M, N

a) Chöùng minh rang tích BM. DN co gia trò khong ñoi

b) Goi K la giao ñiem cua BN va DM. Tính so ño cua goc BKD

Giai



a) BC // AN $\Rightarrow\frac{MB}{BA}=\frac{CM}{CN}$ (1)

CD// AM $\Rightarrow\frac{CM}{CN}=\frac{AD}{DN}$ (2)

Tö (1) va (2) suy ra

$\frac{MB}{BA}=\frac{AD}{DN}\Rightarrow MB.DN=BA.AD=a.a=a^2$

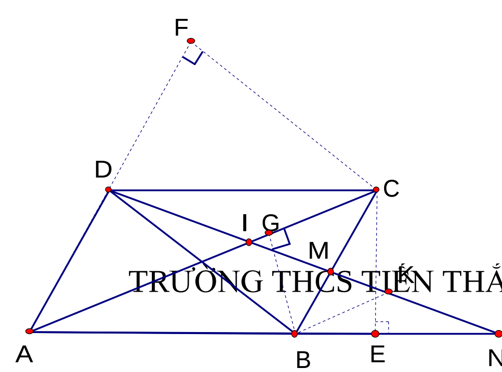
b) ΔMBD va ΔBDN co $\widehat{MBD}=\widehat{BDN}$ = 120^0

$\frac{MB}{BD}=\frac{MB}{BA}=\frac{CM}{CN}=\frac{AD}{DN}=\frac{BD}{DN}$(Do ABCD la hình thoi co $\widehat{A}=60^0$ nen AB = BC = CD = DA) $\Rightarrow\Delta$MBD $\backsim$ ΔBDN

Suy ra $\widehat{M_1}=\widehat{B_1}$. ΔMBD va ΔBKD co $\widehat{BDM}=\widehat{BDK}$ va $\widehat{M_1}=\widehat{B_1}$ nen $\widehat{BKD}=\widehat{MBD}=120^0$

Bai 7:

Cho hình bình hanh ABCD co ñöôøng cheo lôùn AC,tia Dx cat SC, AB, BC lan löôït tai I, M, N. Ve CE vuong goc vôùi AB, CF vuong goc vôùi AD, BG



vuoâng goùc vôùi AC. Goïi K laø ñieåm ñoái xöùng vôùi D qua I. Chöùng minh raèng

a) IM. IN = ID^2

b) $\frac{KM}{KN} = \frac{DM}{DN}$

c) AB. AE + AD. AF = AC^2

Giaûi

a) Töø AD // CM $\Rightarrow \frac{IM}{ID} = \frac{CI}{AI}$ (1)

Töø CD // AN $\Rightarrow \frac{CI}{AI} = \frac{ID}{IN}$ (2)

Töø (1) vaø (2) suy ra $\frac{IM}{ID} = \frac{ID}{IN}$ hay ID^2 = IM. IN

b) Ta coù $\frac{DM}{MN} = \frac{CM}{MB} \Rightarrow \frac{DM}{MN + DM} = \frac{CM}{MB + CM} \Rightarrow \frac{DM}{DN} = \frac{CM}{CB}$ (3)

Töø ID = IK vaø ID^2 = IM. IN suy ra IK^2 = IM. IN

$\Rightarrow \frac{IK}{IM} = \frac{IN}{IK} \Rightarrow \frac{IK - IM}{IM} = \frac{IN - IK}{IK} \Rightarrow \frac{KM}{IM} = \frac{KN}{IK} \Rightarrow \frac{KM}{KN} = \frac{IM}{IK} \Rightarrow \frac{KM}{KN} = \frac{IM}{ID} = \frac{CM}{AD} = \frac{CM}{CB}$ (4)

Töø (3) vaø (4) suy ra $\frac{KM}{KN} = \frac{DM}{DN}$

c) Ta coù $\Delta AGB \backsim \Delta AEC \Rightarrow \frac{AE}{AG} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AB.AE = AC.AG \Rightarrow$ AB. AE = AG(AG + CG) (5)

$\Delta CGB \backsim \Delta AFC \Rightarrow \frac{AF}{AC} = \frac{CG}{CB} = \frac{CG}{AD}$ (vì CB = AD)

$\Rightarrow$ AF . AD = AC. CG $\Rightarrow$ AF . AD = (AG + CG) .CG (6)

Coäng (5) vaø (6) veá theo veá ta coù: AB. AE + AF. AD = (AG + CG) .AG + (AG + CG) .CG

$\Leftrightarrow$ AB. AE + AF. AD = AG^2 +2.AG.CG + CG^2 = $(AG + CG)^2$ = AC^2

Vaäy: AB. AE + AD. AF = AC^2

Baøi taäp veà nhaø

Baøi 1

Cho Hình bình haønh ABCD, moät ñöôøng thaúng caét AB, AD, AC laàn löôït taïi E, F, G

Chöùng minh: $\frac{AB}{AE} + \frac{AD}{AF} = \frac{AC}{AG}$

HD: Keû DM // FE, BN // FE (M, N thuoäc AC)

Baøi 2:

Qua ñænh C cuûa hình bình haønh ABCD, keû ñöôøng thaúng caét BD, AB, AD ôû E, G, F

chöùng minh:

a) $DE^2 = \frac{FE}{EG}$. BE^2

b) CE^2 = FE. GE

(Gôïi yù: Xeùt caùc tam giaùc DFE vaø BCE, DEC vaø BEG)

Baøi 3

Cho tam giaùc ABC vuoâng taïi A, ñöôøng cao AH, trung tuyeán BM, phaân giaùc CD caét nhau taïi moät ñieåm. Chöùng minh raèng

a) $\frac{BH}{HC}.\frac{CM}{MA}.\frac{AD}{BD} = 1$

b) BH = AC

CHUYEÂN ÑEÀ 14 – PHÖÔNG TRÌNH BAÄC CAO

A.Muïc tieâu:

* Cuûng coá, oân taäp kieán thöùc vaø kyõ naêng giaûi caùc Pt baäc cao baèng caùch phaân tích thaønh nhaân töû

* Khaéc saâu kyõ naêng phaân tích ña thöùc thaønh nhaân töû vaø kyõ naêng giaûi Pt

B. Kieán thöùc vaø baøi taäp:

I. Phöông phaùp:

* Cach 1: Ñe giai cac Pt bac cao, ta bien ñoi, rut gon ñe döa Pt ve dang Pt co ve trai la mot ña thöc bac cao, ve phai bang 0, van dung cac phöông phap phan tích ña thöc thanh nhan tö ñe ñöa Pt ve dang pt tích ñe giai

* Cach 2: Ñat an phu

II. Cac ví du:

1.Ví du 1: Giai Pt

a) $(x + 1)^2(x + 2) + (x - 1)^2(x - 2) = 12$

$\Leftrightarrow ... \Leftrightarrow 2x^3 + 10x = 12 \Leftrightarrow x^3 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x^3 - 1) + (5x - 5) \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 6) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x^2 + x + 6 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{23}{4} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 1$ (Vì $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{23}{4} = 0$ vo nghiem)

b) $x^4 + x^2 + 6x - 8 = 0$ (1)

Ve phai cua Pt la mot ña thöc co tong cac he so bang 0, nen co mot nghiem x = 1 nen co nhan tö la x – 1, ta co

(1) $\Leftrightarrow (x^4 - x^3) + (x^3 - x^2) + (2x^2 - 2x) + (8x - 8) = 0$

$\Leftrightarrow ... \Leftrightarrow (x - 1)(x^3 + x^2 + 2x + 8) \Leftrightarrow (x - 1)[(x^3 + 2x^2) - (x^2 + 2x) + (4x - 8)] = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)[x^2(x + 2) - x(x + 2) + 4(x + 2) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 2)(x^2 - x + 4) = 0$ ....

c) $(x - 1)^3 + (2x + 3)^3 = 27x^3 + 8$

$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27 - 27x^3 - 8 = 0$

$\Leftrightarrow -18x^3 + 33x^2 + 57x + 18 = 0 \Leftrightarrow 6x^3 - 11x^2 - 19x - 6 = 0$ (2)

Ta thay Pt co mot nghiem x = 3, nen ve trai co nhan tö x – 3:

(2) $\Leftrightarrow (6x^3 - 18x^2) + (7x^2 - 21x) + (2x - 6) = 0$

$\Leftrightarrow 6x^2(x - 3) + 7x(x - 3) + 2(x - 3) = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(6x^2 + 7x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 3)[(6x^2 + 3x) + (4x + 2)] = 0 \Leftrightarrow (x - 3)[3x(2x + 1) + 2(2x + 1)] = 0$

$\Leftrightarrow$ (x – 3)(2x + 1)(3x + 2) .....

d) $(x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) = 24 \Leftrightarrow [(x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) + 1] - 25 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 5x - 1)^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 5x - 1 + 5)(\,(x^2 + 5x - 1 - 5) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 5x + 4)\,(x^2 + 5x - 6) = 0 \Leftrightarrow [(x^2 + x) + (4x + 4)][(x^2 - x) + (6x - 6)] = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)(x + 4)(x - 1)(x + 6) = 0$ ....

e) $(x^2 + x + 1)^2 = 3(x^4 + x^2 + 1) \Leftrightarrow (x^2 + x + 1)^2 - 3(x^4 + x^2 + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + x + 1)^2 - 3(x^2 + x + 1)(\,x^2 - x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (\,x^2 + x + 1)[\,x^2 + x + 1 - 3(x^2 - x + 1)] = 0 \Leftrightarrow (\,x^2 + x + 1)(\,-2x^2 + 4x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + x + 1)(x^2 - 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow (\,x^2 + x + 1)(x - 1)^2 = 0$...

f) $x^5 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 2 \Leftrightarrow (x^5 - 1) - (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)\,(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) - (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)\,(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$

+) $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

+) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^4 + x^3) + (x + 1) + x^2 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x^3 + 1) + x^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)^2(x^2 - x + 1) + x^2 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2\,[(x^2 - 2.x.\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) + \frac{3}{4}] + x^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)^2\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] + x^2 = 0$ Vo nghiem vì $(x + 1)^2\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] \geq 0$ nhöng

khong xay ra dau bang

Bai 2:

a) $(x^2 + x - 2)(\,x^2 + x - 3) = 12 \Leftrightarrow (x^2 + x - 2)[(\,x^2 + x - 2) - 1] - 12 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + x - 2)^2 - (x^2 + x - 2) - 12 = 0$

Ñat $x^2 + x - 2 = y$ Thì

$(x^2 + x - 2)^2 - (x^2 + x - 2) - 12 = 0 \Leftrightarrow y^2 - y - 12 = 0 \Leftrightarrow (y - 4)(y + 3) = 0$

* $y - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 3x) - (2x + 6) = 0$

$\Leftrightarrow (x + 3)(x - 2) = 0$....

* $y + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0$ (vo nghiem)

b) $(x - 4)(x - 5)(x - 6)(x - 7) = 1680 \Leftrightarrow (x^2 - 11x + 28)(x^2 - 11x + 30) = 1680$

Ñat $x^2 - 11x + 29 = y$, ta co:

$(x^2 - 11x + 28)(x^2 - 11x + 30) = 1680 \Leftrightarrow (y + 1)(y - 1) = 1680 \Leftrightarrow y^2 = 1681 \Leftrightarrow y = \pm 41$

$y = 41 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 29 = 41 \Leftrightarrow x^2 - 11x - 12 = 0$ $(x^2 - x) + (12x - 12) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x + 12) = 0$.....

* $y = - 41 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 29 = - 41 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 70 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x.\frac{11}{2} + \frac{121}{4}) + \frac{159}{4} = 0$

c) $(x^2 - 6x + 9)^2 - 15(x^2 - 6x + 10) = 1$ (3)

Ñat $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 = y \geq 0$, ta co

(3) $\Leftrightarrow y^2 - 15(y + 1) - 1 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 15y - 16 = 0 \Leftrightarrow (y + 1)(y - 15) = 0$

Vôi $y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -1$ (loai)

Vôi $y - 15 = 0 \Leftrightarrow y = 15 \Rightarrow (x - 3)^2 = 16 \Leftrightarrow x - 3 = \pm 4$

+ $x - 3 = 4 \Leftrightarrow x = 7$

+ $x - 3 = - 4 \Leftrightarrow x = - 1$

d) $(x^2 + 1)^2 + 3x(x^2 + 1) + 2x^2 = 0$ (4)

Ñat $x^2 + 1 = y$ thì

(4) $\Leftrightarrow y^2 + 3xy + 2x^2 = 0 \Leftrightarrow (y^2 + xy) + (2xy + 2x^2) = 0 \Leftrightarrow (y + x)(y + 2x) = 0$

+) $x + y = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0$: Vo nghiem

+) $y + 2x = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = - 1$

Bai 3:

a) $(2x + 1)(x + 1)^2(2x + 3) = 18 \Leftrightarrow (2x + 1)(2x + 2)^2(2x + 3) = 72$. (1)

Ñat $2x + 2 = y$, ta co

(1) $\Leftrightarrow (y - 1)y^2(y + 1) = 72 \Leftrightarrow y^2(y^2 - 1) = 72$

$\Leftrightarrow y^4 - y^2 - 72 = 0$

Ñat $y^2 = z \geq 0$ Thì $y^4 - y^2 - 72 = 0 \Leftrightarrow z^2 - z - 72 = 0 \Leftrightarrow (z + 8)(z - 9) = 0$

* $z + 8 = 0 \Leftrightarrow z = -8$ (loai)

* $z - 9 = 0 \Leftrightarrow z = 9 \Leftrightarrow y^2 = 9 \Leftrightarrow y = \pm 3 \Rightarrow x = ...$

b) $(x + 1)^4 + (x - 3)^4 = 82$ (2)

Ñat $y = x - 1 \Rightarrow x + 1 = y + 2$; $x - 3 = y - 2$, ta co

(2) $\Leftrightarrow (y + 2)^4 + (y - 2)^4 = 82$

$\Leftrightarrow y^4 + 8y^3 + 24y^2 + 32y + 16 + y^4 - 8y^3 + 24y^2 - 32y + 16 = 82$

$\Leftrightarrow 2y^4 + 48y^2 + 32 - 82 = 0 \Leftrightarrow y^4 + 24y^2 - 25 = 0$

Ñat $y^2 = z \geq 0 \Rightarrow y^4 + 24y^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow z^2 + 24z - 25 = 0 \Leftrightarrow (z - 1)(z + 25) = 0$

+) $z - 1 = 0 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow x = 0$; $x = 2$

+) $z + 25 = 0 \Leftrightarrow z = -25$ (loai)

Chuù yù: Khi giai Pt bac 4 dang $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$ ta thöông ñat an phu $y = x + \frac{a + b}{2}$

c) $(4 - x)^5 + (x - 2)^5 = 32 \Leftrightarrow (x - 2)^5 - (x - 4)^5 = 32$

Ñat $y = x - 3 \Rightarrow x - 2 = y + 1$; $x - 4 = y - 1$; ta co:

$(x - 2)^5 - (x - 4)^5 = 32 \Leftrightarrow (y + 1)^5 - (y - 1)^5 = 32$

$\Leftrightarrow y^5 + 5y^4 + 10y^3 + 10y^2 + 5y + 1 - (y^5 - 5y^4 + 10y^3 - 10y^2 + 5y - 1) - 32 = 0$

$\Leftrightarrow 10y^4 + 20y^2 - 30 = 0 \Leftrightarrow y^4 + 2y^2 - 3 = 0$

Ñat $y^2 = z \geq 0 \Rightarrow y^4 + 2y^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow z^2 + 2z - 3 = 0 \Leftrightarrow (z - 1)(z + 3) = 0$ ....

d) $(x - 7)^4 + (x - 8)^4 = (15 - 2x)^4$

Ñat $x - 7 = a$; $x - 8 = b$; $15 - 2x = c$ thì $-c = 2x - 15 \Rightarrow a + b = -c$, Nen

$(x - 7)^4 + (x - 8)^4 = (15 - 2x)^4 \Leftrightarrow a^4 + b^4 = c^4 \Leftrightarrow a^4 + b^4 - c^4 = 0 \Leftrightarrow a^4 + b^4 - (a + b)^4 = 0$

$\Leftrightarrow 4ab(a^2 + \frac{3}{2}ab + b^2) = 0 \Leftrightarrow 4ab\left[\left(a + \frac{3}{4}b\right)^2 + \frac{7}{16}b^2\right] = 0 \Leftrightarrow 4ab = 0$

(Vì $\left(a + \frac{3}{4}b\right)^2 + \frac{7}{16}b^2 \geq 0$ nhöng khong xay ra dau bang) $\Leftrightarrow ab = 0 \Leftrightarrow x = 7$; $x = 8$

e) $6x^4 + 7x^3 – 36x^2 – 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow 6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 7\left(x - \frac{1}{x}\right) - 36 = 0$

(Vì x = 0 khong la nghiem). Ñat $x - \frac{1}{x} = y \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + 2$, thì

$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 7\left(x - \frac{1}{x}\right) - 36 = 0 \Leftrightarrow 6(y^2 + 2) + 7y – 36 = 0 \Leftrightarrow 6y^2 + 7y – 24 = 0$

$\Leftrightarrow (6y^2 – 9y) + (16y – 24) = 0 \Leftrightarrow (3y + 8)(2y – 3) = 0$

+) $3y + 8 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{8}{3} \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = -\frac{8}{3} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow (x + 3)(3x – 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 3 = 0 \\ 3x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = \frac{1}{3} \end{array}\right.$

+) $2y – 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow (2x + 1)(x – 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ 2x + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Bai 4: Chöng minh rang: cac Pt sau vo nghiem

a) $x^4 – 3x^2 + 6x + 13 = 0 \Leftrightarrow (x^4 – 4x^2 + 4) + (x^2 + 6x + 9) = 0 \Leftrightarrow (x^2 – 2)^2 + (x + 3)^2 = 0$

Ve trai $(x^2 – 2)^2 + (x + 3)^2 \geq 0$ nhöng khong ñong thôi xay ra $x^2 = 2$ va $x = -3$

b) $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x – 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow x^7 – 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x = 1 khong la nghiem cua Pt $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$

Bai tap ve nha:

Bai 1: Giai cac Pt

a) $(x^2 + 1)^2 = 4(2x – 1)$

HD: Chuyen ve, trien khai $(x^2 + 1)^2$, phan tích thanh nhan tö: $(x – 1)^2(x^2 + 2x + 5) = 0$

b) $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 24$ (Nhan 2 nhan tö vôi nhau, ap dung PP ñat an phu)

c) $(12x + 7)^2(3x + 2)(2x + 1) = 3$ (Nhan 2 ve vôi 24, ñat $12x + 7 = y$)

d) $(x^2 – 9)^2 = 12x + 1$ (Them, bôt $36x^2$)

e) $(x – 1)^4 + (x – 2)^4 = 1$ (Ñat $y = x – 1,5$; Ñs: $x = 1$; $x = 2$)

f) $(x – 1)^5 + (x + 3)^5 = 242(x + 1)$ (Ñat $x + 1 = y$; Ñs:0; -1; -2)

g) $(x + 1)^3 + (x - 2)^3 = (2x – 1)^3$

Ñat x + 1 = a; x – 2 = b; 1 - 2x = c thì a + b + c = 0 $\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

h) $6x^4 + 5x^3 – 38x^2 + 5x + 6 = 0$ (Chia 2 ve cho x^2; Ñat y = $x + \frac{1}{x}$)

i) $x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$ (Ve trai la ña thöc co tong cac he so bac chan bang tong cac he so bac le...)

Bai 2: Chöng minh cac pt sau vo nghiem

a) $2x^4 – 10x^2 + 17 = 0$

(Phan tích ve trai thanh tong cua hai bình phöông)

b) $x^4 – 2x^3 + 4x^2 – 3x + 2 = 0$

(Phan tích ve trai thanh tích cua 2 ña thöc co gia trò khong am....)

CHUYEN ÑE 1 5 – SÖ DUNG CONG THÖC DIEN TÍCH ÑE THIET LAP QUAN HE ÑO DAI CUA CAC ÑOAN THANG

Ngay soan:23 – 3 - 2010

A. Mot so kien thöc:

1. Cong thöc tính dien tích tam giac:

S = $\frac{1}{2}$ a.h (a – ño dai mot canh, h – ño dai ñöôøng cao töông öùng)

2. Mot so tính chat:

Hai tam giac co chung mot canh, co cung ño dai ñöôøng cao thì co cung dien tích

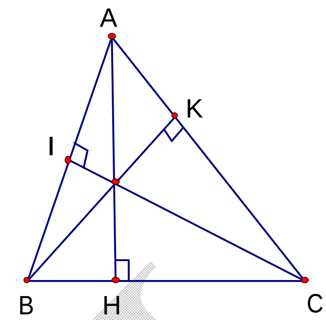
Hai tam giac bang nhau thì co cung dien tích

B. Mot so bai toan:

1. Bai 1:

Cho ΔABC co AC = 6cm; AB = 4 cm; cac ñöôøng cao AH; BK; CI. Biet AH = $\frac{CI + BK}{2}$

Tính BC



Giai

Ta co: BK = $\frac{2S_{ABC}}{AC}$; CI = $\frac{2S_{ABC}}{AB}$

$\Rightarrow$ BK + CI = 2. S_{ABC} $\left(\frac{1}{AC}+\frac{1}{AB}\right)$

$\Leftrightarrow$ 2AH = 2.$\frac{1}{2}$. BC. AH . $\left(\frac{1}{AC}+\frac{1}{AB}\right)$ $\Leftrightarrow$ BC.$\left(\frac{1}{AC}+\frac{1}{AB}\right)$ = 2

$\Rightarrow$ BC = 2 : $\left(\frac{1}{AC}+\frac{1}{AB}\right)$ = 2 :$\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right)$ = 4,8 cm

Bai 2:

Cho ΔABC co ño dai cac canh la a, b, c; ño dai cac ñöông cao töông öng la h_a, h_b, h_c.

Biet rang a + h_a = b + h_b = c + h_c . Chöng minh rang ΔABC la tam giac ñeu

Giai

Goi S_{ABC} = S

Ta xet a + h_a = b + h_b $\Rightarrow$ a – b = h_a – h_b = $\frac{2S}{b}$ - $\frac{2S}{a}$ $= 2S.\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = 2S.$ $\frac{a - b}{ab}$

$\Rightarrow$ a – b = 2S. $\frac{a - b}{ab}$ $\Rightarrow$ (a – b) $\left(1 - \frac{2S}{ab}\right)$ = 0 $\Rightarrow$ ΔABC can ô C hoac vuong ô C (1)

Töông tö ta co: ΔABC can ô A hoac vuong ô A (2); ΔABC can ô B hoac vuong ô B (3)

Tö (1), (2) va (3) suy ra ΔABC can hoac vuong ô ba ñænh (Khong xay ra vuong tai ba ñænh) $\Leftrightarrow$ ΔABC la tam giac ñeu

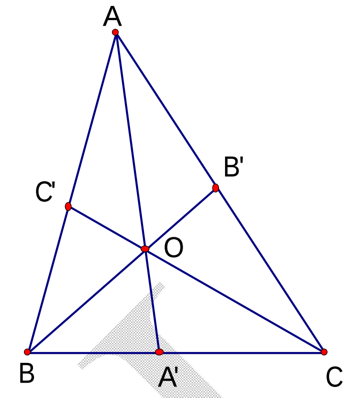
Bai 3:

Cho ñiem O nam trong tam giac ABC, cac tia AO, BO, Co cat cac canh cua tam giac ABC theo thö tö tai A', B', C'. Chöng minh rang:

a) $\frac{OA'}{AA'}+\frac{OB'}{BB'}+\frac{OC'}{CC'}=1$ b) $\frac{OA}{AA'}+\frac{OB}{BB'}+\frac{OC}{CC'}=2$

c) M = $\frac{OA}{OA'}+\frac{OB}{OB'}+\frac{OC}{OC'}=6$. Tìm vò trí cua O ñe tong M co gia trò nho nhat

d) N = $\frac{OA}{OA'}.\frac{OB}{OB'}.\frac{OC}{OC'} = 8$. Tìm vò trí cua O ñe tích N co gia trò nho nhat



Giai

Goi $S_{ABC} = S$, $S_1 = S_{BOC}$, $S_2 = S_{COA}$, $S_3 = S_{AOB}$. Ta co:

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{S_2}{S_{OA'C}} = \frac{S_3}{S_{OA'B}} = \frac{S_2 + S_3}{S_1} \quad (1)$$

$$\frac{OA'}{AA'} = \frac{S_{OA'C}}{S_{AA'C}} = \frac{S_{OA'B}}{S_{AA'B}} = \frac{S_{OA'C} + S_{OA'B}}{S_{AA'C} + S_{AA'B}} = \frac{S_1}{S} \quad (2)$$

Tö (1) va (2) suy ra $\frac{OA}{AA'} = \frac{S_2 + S_3}{S}$

Töông tö ta co $\frac{OB}{OB'} = \frac{S_1 + S_3}{S_2}$; $\frac{OC}{OC'} = \frac{S_1 + S_2}{S_3}$; $\frac{OB'}{BB'} = \frac{S_2}{S}$; $\frac{OC'}{CC'} = \frac{S_3}{S}$

a) $\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = \frac{S_1}{S} + \frac{S_2}{S} + \frac{S_3}{S} = \frac{S}{S} = 1$

b) $\frac{OA}{AA'} + \frac{OB}{BB'} + \frac{OC}{CC'} = \frac{S_2 + S_3}{S} + \frac{S_1 + S_3}{S} + \frac{S_1 + S_2}{S} = \frac{2S}{S} = 2$

c) M = $\frac{OA}{OA'} + \frac{OB}{OB'} + \frac{OC}{OC'} = \frac{S_2 + S_3}{S_1} + \frac{S_1 + S_3}{S_2} + \frac{S_1 + S_2}{S_3} = \left(\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_2}{S_1}\right) + \left(\frac{S_3}{S_2} + \frac{S_2}{S_3}\right) + \left(\frac{S_1}{S_3} + \frac{S_3}{S_1}\right)$

Ap dung Bñt Co si ta co $\left(\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_2}{S_1}\right) + \left(\frac{S_3}{S_2} + \frac{S_2}{S_3}\right) + \left(\frac{S_1}{S_3} + \frac{S_3}{S_1}\right) \geq 2 + 2 + 2 = 6$

Ñang thöc xay ra khi $S_1 = S_2 = S_3$ ⇔ O la trong tam cua tam giac ABC

d) N = $\frac{S_2 + S_3}{S_1}.\frac{S_1 + S_3}{S_2}.\frac{S_1 + S_2}{S_3} = \frac{(S_2 + S_3)(S_1 + S_3)(S_1 + S_2)}{S_1.S_2.S_3}$

$\Rightarrow$ N^2 = $\frac{(S_2 + S_3)^2 (S_1 + S_3)^2 (S_1 + S_2)^2}{(S_1.S_2.S_3)^2} \geq \frac{4S_1S_2.4S_2S_3.4S_1S_3}{(S_1.S_2.S_3)^2} \geq 64$ $\Rightarrow$ N $\geq$ 8

Ñang thöc xay ra khi $S_1 = S_2 = S_3$ ⇔ O la trong tam cua tam giac ABC

Bai 4:

Cho tam giac ñeu ABC, cac ñöông caoAD, BE, CF; goi A’, B’, C’ la hình chieu cua M (nam ben trong tam giac ABC) tren AD, BE, CF. Chöùng minh raèng: Khi M thay ñoåi vò trí trong tam giac ABC thì:

a) A'D + B'E + C'F khong ñoåi

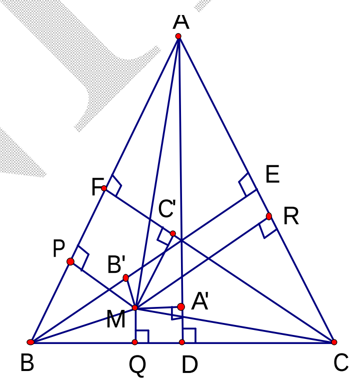
b) AA' + BB' + CC' khong ñoåi

Giai

Goïi h = AH la chieu cao cua tam giac ABC thì h khong ñoåi

Goïi khoang cach töø M ñen cac canh AB; BC; CA la MP; MQ; MR thì A'D + B'E + C'F = MQ + MR + MP

Vì M nam trong tam giac ABC nen



$S_{BMC} + S_{CMA} + S_{BMA} = S_{ABC}$

$\Leftrightarrow$ BC.(MQ + MR + MP) = BC . AH

$\Rightarrow$ MQ + MR + MP = AH $\Rightarrow$ A'D + B'E + C'F = AH = h

Vay: A'D + B'E + C'F = AH = h khong ñoåi

b) AA' + BB' + CC' = (AH – A'D)+(BE – B'E) (CF – C'F)

= (AH + BE + CF) – (A'D + B'E + C'F) = 3h – h = 2h khong ñoåi

Bai 5:

Cho tam giac ABC co BC bang trung bình cong cua AC va AB; Goïi I la giao ñiem cua cac phan giac, G la trong tam cua tam giac. Chöùng minh: IG // BC

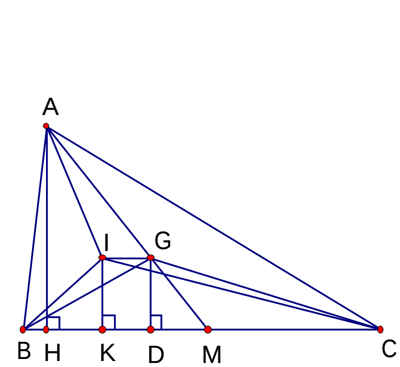
Giai

Goïi khoang cach töø a, I, G ñen BC lan löôït la AH, IK, GD

Vì I la giap ñiem cua ba ñöôøng phan giac nen khoang cach töø I ñen ba canh AB, BC, CA bang nhau va bang IK

Vì I nam trong tam giac ABC nen:

$S_{ABC} = S_{AIB} + S_{BIC} + S_{CIA} \Leftrightarrow$ BC.AH = IK(AB+BC+CA) (1)



Ma BC = $\frac{AB + CA}{2}$ $\Rightarrow$ AB + CA = 2 BC (2)

Thay (2) vao (1) ta co: BC. AH = IK. 3BC $\Rightarrow$ IK = $\frac{1}{3}$AH (a)

Vì G la trong tam cua tam giac ABC nen:

S_{BGC} = $\frac{1}{3}$ S_{ABC} $\Leftrightarrow$ BC . GD = $\frac{1}{3}$ BC. AH $\Rightarrow$ GD = $\frac{1}{3}$ AH (b)

Tö (a) va (b) suy ra IK = GD hay khoang cach tö I, G ñen BC bang nhau nen IG // BC

Bai tap ve nha:

1) Cho C la ñiem thuoc tia phan giac cua $\widehat{xOy} = 60^0$, Mla ñiem bat ky nam tren ñöôøng vuong goc vôi OC tai C va thuoc mien trong cua $\widehat{xOy}$, goi MA, MB thö tö la khoang cach tö M ñen Ox, Oy. Tính ño dai OC theo MA, MB

2) Cho M la ñiem nam trong tam giac ñeu ABC. A', B', C' la hình chieu cua M tren cac canh BC, AC, AB. Cac ñöôøng thang vuong goc vôi BC tai C, vuong goc vôi CA tai A , vuong goc vôi AB tai B cat nhau ô D, E, F. Chöùng minh rang:

a) Tam giac DEF la tam giac ñeu

b) AB' + BC' + CA' khong phu thuoc vò trí cua M trong tam giac ABC

CHUYEN ÑE 16 – BAT ÑANG THÖC

<u>PhÇn I</u> : các kiến thức cần lưu ý

1-<u>§inhnghÜa:</u> $\begin{cases} A \ge B \Leftrightarrow A - B \ge 0 \\ A \le B \Leftrightarrow A - B \le 0 \end{cases}$

2-<u>tÝnh chÊt</u>

+ A>B $\Leftrightarrow B < A$ + A>B vµ B >C $\Leftrightarrow$ A > C + A>B $\Rightarrow$ A + C >B + C + A>B vµ C > D $\Rightarrow$ A +C > B + D	+ A > B > 0 $\Rightarrow$ $A^n > B^n$ $\forall n$ + A > B $\Rightarrow$ $A^n > B^n$ víi n lÎ + $\lvert A\rvert > \lvert B\rvert$ $\Rightarrow$ $A^n > B^n$ víi n ch½n

+ A>B vµ C > 0 $\Rightarrow$ A.C > B.C + A>B vµ C < 0 $\Rightarrow$ A.C < B.C + 0 < A < B vµ 0 < C < D $\Rightarrow$ 0 < A.C < B.D	+ m > n > 0 vµ A > 1 $\Rightarrow$ $A^m > A^n$ + m > n > 0 vµ 0 <A < 1 $\Rightarrow$ $A^m < A^n$ +A < B vµ A.B > 0 $\Rightarrow$ $\frac{1}{A} > \frac{1}{B}$

3 - <u>mét sè h»ng bÊt ®¼ng thøc</u>

+ $A^2 \geq 0$ víi $\forall$ A (dÊu = x¶y ra khi A = 0)

+ $A^n \geq 0$ víi $\forall$ A (dÊu = x¶y ra khi A = 0)

+ $|A| \geq 0$ víi $\forall A$ (dÊu = x¶y ra khi A = 0)

+ -$|A|$ < A = $|A|$

+ $|A+B| \geq |A| + |B|$ (dÊu = x¶y ra khi A.B > 0)

+ $|A-B| \leq |A| - |B|$ (dÊu = x¶y ra khi A.B < 0)

<u>PhÇn II</u> : một số phương pháp chứng minh bất đẳng thức

1) Phương pháp 1: dïng ®Þnh nghÜa

<u>KiÕn thøc</u> : §Ó chøng minh A > B Ta chøng minh A – B > 0

Lưu ý dùng hằng bất đẳng thức $M^2 \geq 0$ víi $\forall$ M

<u>VÝ dô 1</u> $\forall$ x, y, z chøng minh r»ng :

a) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$

b) $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy - 2xz + 2yz$

<u>Gi¶i:</u>

a) Ta xÐt hiÖu : $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{1}{2}.2.(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$= \frac{1}{2}\left[(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2\right] \geq 0$ ®óng víi mäi x;y;z$\in R$

V× $(x-y)^2 \geq 0$ víi$\forall$x ; y .DÊu b»ng x¶y ra khi x = y

$(x-z)^2 \geq 0$ víi$\forall$x ; z . DÊu b»ng x¶y ra khi x = z

$(y-z)^2 \geq 0$ víi$\forall$ z; y . DÊu b»ng x¶y ra khi z = y

VËy $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$. DÊu b»ng x¶y ra khi x = y =z

b)Ta xÐt hiÖu:

$x^2 + y^2 + z^2 - (2xy - 2xz + 2yz) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz = (x - y + z)^2 \geq 0$

®óng víi mäi x;y;z $\in R$

VËy $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy - 2xz + 2yz$ ®óng víi mäi x;y;z $\in R$

DÊu b»ng x¶y ra khi x + y = z

VÝ dô 2: chøng minh r»ng :

a) $\dfrac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$; b) $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^2$ c) H·y tæng qu¸t bµi to¸n

gi¶i

a) Ta xÐt hiÖu

$$\frac{a^2+b^2}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{2\left(a^2+b^2\right)}{4} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{1}{4}\left(2a^2+2b^2-a^2-b^2-2ab\right) = \frac{1}{4}(a-b)^2 \geq 0$$

VËy $\dfrac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$ DÊu b»ng x¶y ra khi a = b

b)Ta xÐt hiÖu: $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3} - \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{9}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right] \geq 0$

VËy $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^2$ DÊu b»ng x¶y ra khi a = b =c

c)Tæng qu¸t: $\dfrac{a_1^2+a_2^2+....+a_n^2}{n} \geq \left(\dfrac{a_1+a_2+....+a_n}{n}\right)^2$

* Tóm lại các bước để chứng minh A $\geq$ B theo ®Þnh nghÜa

Bước 1: Ta xÐt hiÖu H = A - B

Bước 2:Biến đổi H = $(C+D)^2$ hoÆc H=$(C+D)^2$ +....+$(E+F)^2$

Bước 3: KÕt luËn A $\geq$ B

2) phương pháp 2 : Dùng phép biến đổi tương đương

Lưu ý:

Ta biÕn ®æi bÊt ®¼ng thøc cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức đúng hoặc bất đẳng thức đã được chứng minh là đúng.

VÝ dô 1: Cho a, b, c, d,e lµ c¸c sè thùc chøng minh r»ng

a) $a^2 + \dfrac{b^2}{4} \geq ab$ b) $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$ c) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b+c+d+e)$

Gi¶i:

a) $a^2+\frac{b^2}{4}\ge ab \Leftrightarrow 4a^2+b^2\ge 4ab \Leftrightarrow 4a^2-4a+b^2\ge 0 \Leftrightarrow (2a-b)^2\ge 0$ (B®t nµy lu«n ®óng)

VËy $a^2+\frac{b^2}{4}\ge ab$ (dÊu b»ng x¶y ra khi 2a = b)

b) $a^2+b^2+1\ge ab+a+b \Leftrightarrow 2(a^2+b^2+1)>2(ab+a+b)$

$\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2+a^2-2a+1+b^2-2b+1\ge 0 \Leftrightarrow (a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2\ge 0$ (lu«n ®óng)

VËy $a^2+b^2+1\ge ab+a+b$ DÊu b»ng x¶y ra khi a = b = 1

c) $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\ge a(b+c+d+e) \Leftrightarrow 4(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)\ge 4a(b+c+d+e)$

$\Leftrightarrow (a^2-4ab+4b^2)+(a^2-4ac+4c^2)+(a^2-4ad+4d^2)+(a^2-4ac+4c^2)\ge 0$

$\Leftrightarrow (a-2b)^2+(a-2c)^2+(a-2d)^2+(a-2c)^2\ge 0$

<u>VÝ dô 2: </u> Chøng minh r»ng: $(a^{10}+b^{10})(a^2+b^2)\ge (a^8+b^8)(a^4+b^4)$

<u>Gi¶i</u>:

$(a^{10}+b^{10})(a^2+b^2)\ge (a^8+b^8)(a^4+b^4) \Leftrightarrow a^{12}+a^{10}b^2+a^2b^{10}+b^{12}\ge a^{12}+a^8b^4+a^4b^8+b^{12}$

$\Leftrightarrow a^8b^2(a^2-b^2)+a^2b^8(b^2-a^2)\ge 0 \Leftrightarrow a^2b^2(a^2-b^2)(a^6-b^6)\ge 0 \Leftrightarrow a^2b^2(a^2-b^2)^2(a^4+a^2b^2+b^4)\ge 0$

<u>VÝ dô 4:</u> cho ba sè thùc kh¸c kh«ng x, y, z tháa m·n: $\begin{cases} x.y.z=1 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<x+y+z \end{cases}$

Chøng minh r»ng : cã ®óng mét trong ba sè x,y,z lín h¬n 1

Gi¶i: XÐt (x-1)(y-1)(z-1) = xyz + (xy + yz + zx) + x + y + z - 1

= (xyz - 1) + (x + y + z) - xyz($\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$) = x + y + z - ($\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$) >0

(v× $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$< x+y+z theo gt) $\rightarrow$ 2 trong 3 sè x-1 , y-1 , z-1 ©m hoÆc c¶ ba sç-1 , y-1, z-1 lµ dương.

Nếủ trường hợp sau xảy ra thì x, y, z >1 $\rightarrow$x.y.z>1 M©u thuÉn gt x.y.z =1 b¾t buéc ph¶i xảy ra trường hîp trªn tøc lµ cã ®óng 1 trong ba sè x ,y ,z lµ sè lín h¬n 1

3) Phư¬ng ph¸p 3: dïng bÊt ®¼ng thøc quen thuéc

A) mét sè bÊt ®¼ng thøc hay dïng

1) C¸c bÊt ®¼ng thøc phô:

a) $x^2+y^2\ge 2xy$ b) $x^2+y^2\ge |\ xy\ |$ dÊu(=) khi x = y = 0

c) $(x+y)^2 \geq 4xy$ d) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$

2)BÊt ®¼ng thøc C« sy: $\frac{a_1+a_2+a_3+....+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2a_3....a_n}$ Víi $a_i > 0$

3)BÊt ®¼ng thøc Bunhiacopski

$$\left(a_2{}^2+a_2^2+....+a_n^2\right).\left(x_1^2+x_2^2+....+{}_n^2\right) \geq \left(a_1x_1+a_2x_2+....+a_nx_n\right)^2$$

4) BÊt ®¼ng thøc Trª-bư - sÐp:

NÕu $\begin{cases} a \leq b \leq c \\ A \leq B \leq C \end{cases} \Rightarrow \frac{aA+bB+cC}{3} \geq \frac{a+b+c}{3}.\frac{A+B+C}{3}$

NÕu $\begin{cases} a \leq b \leq c \\ A \geq B \geq C \end{cases} \Rightarrow \frac{aA+bB+cC}{3} \leq \frac{a+b+c}{3}.\frac{A+B+C}{3}$

DÊu b»ng x¶y ra khi $\begin{cases} a=b=c \\ A=B=C \end{cases}$

B) c¸c vÝ dô

<u>vÝ dô 1</u>

Cho a, b ,c lµ c¸c sè kh«ng ©m chøng minh r»ng (a+b) (b+c)(c+a) $\geq$ 8abc

<u>Gi¶i</u>: Dïng bÊt ®¼ng thøc phô: $(x+y)^2 \geq 4xy$

Tacã $(a+b)^2 \geq 4ab$; $(b+c)^2 \geq 4bc$; $(c+a)^2 \geq 4ac$

$\Rightarrow (a+b)^2\,(b+c)^2\,(c+a)^2 \geq 64a^2b^2c^2 = (8abc)^2 \Rightarrow$ (a + b)(b + c)(c + a) $\geq$ 8abc

DÊu "=" x¶y ra khi a = b = c

<u>vÝ dô 2:</u> Cho a > b > c > 0 vµ $a^2+b^2+c^2=1$ chøng minh r»ng $\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{a+c}+\frac{c^3}{a+b} \geq \frac{1}{2}$

Do a,b,c ®èi xøng , gi¶ sö a $\geq$ b $\geq$ c $\Rightarrow \begin{cases} a^2 \geq b^2 \geq c^2 \\ \frac{a}{b+c} \geq \frac{b}{a+c} \geq \frac{c}{a+b} \end{cases}$

¸p dông B§T Trª- bư-sÐp ta cã

$$a^2.\frac{a}{b+c}+b^2.\frac{b}{a+c}+c^2.\frac{c}{a+b} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{3}.\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right) = \frac{1}{3}.\frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

VËy $\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{a+c}+\frac{c^3}{a+b} \geq \frac{1}{2}$ DÊu b»ng x¶y ra khi a = b = c = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

<u>vÝ dô 3:</u> Cho a,b,c,d > 0 vµ abcd =1 .Chøng minh r»ng :

$$a^2+b^2+c^2+d^2+a(b+c)+b(c+d)+d(c+a)\ge 10$$

Ta cã $a^2+b^2\ge 2ab$; $c^2+d^2\ge 2cd$

Do abcd =1 nªn cd =$\frac{1}{ab}$ (dïng $x+\frac{1}{x}\ge\frac{1}{2}$)

Ta cã $a^2+b^2+c^2\ge 2(ab+cd)=2(ab+\frac{1}{ab})\ge 4$ (1)

MÆt kh¸c: $a(b+c)+b(c+d)+d(c+a)$ = (ab + cd) + (ac + bd) + (bc + ad)

=$\left(ab+\frac{1}{ab}\right)+\left(ac+\frac{1}{ac}\right)+\left(bc+\frac{1}{bc}\right)\ge 2+2+2\Rightarrow a^2+b^2+c^2+d^2+a(b+c)+b(c+d)+d(c+a)\ge 10$

vÝ dô 4: Chøng minh r»ng : $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ac$

Gi¶i: Dïng bÊt ®¼ng thøc Bunhiacopski

XÐt cÆp sè (1,1,1) vµ (a,b,c) ta cã $(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2)\ge(1.a+1.b+1.c)^2$

$\Rightarrow 3(a^2+b^2+c^2)\ge a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)\Rightarrow a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ac$ (®pcm)

DÊu b»ng x¶y ra khi a = b = c

4) Phương pháp 4: dïng tÝnh chÊt cña tû sè

A. KiÕn thøc

1) Cho a, b ,c là các số dương thì

a – NÕu $\frac{a}{b}>1$ th× $\frac{a}{b}>\frac{a+c}{b+c}$ b – NÕu $\frac{a}{b}<1$ th× $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c}$

2) NÕu b,d >0 th× tõ $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$

B. C¸c vÝ dô:

vÝ dô 1: Cho a,b,c,d > 0 .Chøng minh r»ng :$1<\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}<2$

Theo tÝnh chÊt cña tØ lÖ thøc ta cã $\frac{a}{a+b+c}<1\Rightarrow\frac{a}{a+b+c}<\frac{a+d}{a+b+c+d}$ (1)

MÆt kh¸c : $\frac{a}{a+b+c}>\frac{a}{a+b+c+d}$ (2)

Tõ (1) vµ (2) ta cã $\frac{a}{a+b+c+d}$ < $\frac{a}{a+b+c}$<$\frac{a+d}{a+b+c+d}$ (3)

Tương tù ta cã : $\frac{b}{a+b+c+d}<\frac{b}{b+c+d}<\frac{b+a}{a+b+c+d}$ (4)

$\frac{c}{a+b+c+d} < \frac{c}{c+d+a} < \frac{b+c}{a+b+c+d}$ (5); $\frac{d}{a+b+c+d} < \frac{d}{d+a+b} < \frac{d+c}{a+b+c+d}$ (6)

céng vÕ víi vÕ cña (3); (4); (5); (6) ta cã

$1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2$ (®pcm)

Ví dô 2 : Cho: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ vµ b,d > 0

Chøng minh r»ng $\frac{a}{b} < \frac{ab+cd}{b^2+d^2} < \frac{c}{d}$

Gi¶i: Tõ $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{ab}{b^2} < \frac{cd}{d^2} \Rightarrow \frac{ab}{b^2} < \frac{ab+cd}{b^2+d^2} < \frac{cd}{d^2} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{ab+cd}{b^2+d^2} < \frac{c}{d}$ (®pcm)

Ví dô 3 : Cho a;b;c;d là các số nguyên dương thỏa mãn : a + b = c+d =1000

t×m gi¸ trÞ lín nhÊt cña $\frac{a}{c} + \frac{b}{d}$

gi¶i : Kh«ng mÊt tÝnh tæng qu¸t ta gi¶ sö : $\frac{a}{c} \le \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} \le \frac{a+b}{c+d} \le \frac{b}{d}$; $\frac{a}{c} \le 1$ v× a + b = c + d

a, NÕu: b ≤ 998 th× $\frac{b}{d} \le 998 \Rightarrow \frac{a}{c} + \frac{b}{d} \le$ 999

b, NÕu: b = 998 th× a =1 $\Rightarrow \frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{1}{c} + \frac{999}{d}$ §¹t gi¸ trÞ lín nhÊt khi d = 1; c = 999

VËy: gi¸ trÞ lín nhÊt cña $\frac{a}{c} + \frac{b}{d}$ = 999 + $\frac{1}{999}$ khi a = d = 1; c = b = 999

Ví dô 4 : Víi mäi sè tù nhiªn n >1 chøng minh r»ng : $\frac{1}{2} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+n} < \frac{3}{4}$

Ta cã $\frac{1}{n+k} > \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2n}$ víi k = 1,2,3,...,n-1

Do ®ã: $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + ... + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$

Ví dô 5: CMR: A = $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{n^2}$ v□i n □ 2 kh«ng lµ sè tù nhiªn

HD: $\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1.2.}; \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3}; .....$

Ví dô 6: Cho a ,b ,c ,d > 0 .Chøng minh r»ng :

$$2 < \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+d} + \frac{c+d}{c+d+a} + \frac{d+a}{d+a+b} < 3$$

Gi¶i :

V× a ,b ,c ,d > 0 nªn ta cã: $\frac{a+b}{a+b+c+d}<\frac{a+b}{a+b+c}<\frac{a+b+d}{a+b+c+d}$ (1)

$$\frac{b++c}{a+b+c+d}<\frac{b+c}{b+c+d}<\frac{b+c+a}{a+b+c+d} \quad (2)$$

$$\frac{d+a}{a+b+c+d}<\frac{d+a}{d+a+b}<\frac{d+a+c}{a+b+c+d} \quad (3)$$

Céng c¸c vÕ cña 4 bÊt ®¼ng thøc trªn ta cã :

$$2<\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{b+c}{b+c+d}+\frac{c+d}{c+d+a}+\frac{d+a}{d+a+b}<3$$ (®pcm)

5. Phương pháp 5:Dïng bÊt ®¼ng thøc trong tam gi¸c

Lưu ý: NÕu a;b;clµ sè ®o ba c¹nh cña tam gi¸c th× : a; b; c > 0

Vµ |b-c| < a < b+c ; |a-c| < b < a+c ; |a-b| < c < b+a

VÝ dô1:

Cho a; b; clµ sè ®o ba c¹nh cña tam gi¸c chøng minh r»ng

a, $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ac)$

b, abc > (a+b-c).(b+c-a).(c+a-b)

Gi¶i

a)V× a,b,c lµ sè ®o 3 c¹nh cña mét tam gi¸c nªn ta cã $\begin{cases}0<a<b+c\\0<b<a+c\\0<c<a+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2<a(b+c)\\b^2<b(a+c)\\c^2<c(a+b)\end{cases}$

Céng tõng vÕ c¸c bÊt ®¼ng thøc trªn ta cã $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ac)$

b) Ta cã a > | b-c | $\Rightarrow a^2>a^2-(b-c)^2>0$

b > | a-c | $\Rightarrow b^2>b^2-(c-a)^2>0$

c > | a-b | $\Rightarrow c^2>c^2-(a-b)^2>0$

Nhân vế các bất đẳng thức ta được: $a^2b^2c^2>\left[a^2-(b-c)^2\right]\left[b^2-(c-a)^2\right]\left[c^2-(a-b)^2\right]$

$$\Rightarrow a^2b^2c^2>(a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2\Rightarrow abc>(a+b-c).(b+c-a).(c+a-b)$$

VÝ dô2: (®æi biÕn sè)

Cho a,b,c lµ ba c¹nh cña mét tam gi¸c. Chøng minh r»ng $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$ (1)

§Æt x= b + c ; y= c + a ;z = a + b ta cã a = $\frac{y+z-x}{2}$; b = $\frac{z+x-y}{2}$; c = $\frac{x+y-z}{2}$

ta cã (1) $\Leftrightarrow \frac{y+z-x}{2x}+\frac{z+x-y}{2y}+\frac{x+y-z}{2z} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{y}{x}+\frac{z}{x}-1+\frac{x}{y}+\frac{z}{y}-1+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}-1 \geq 3$

$\Leftrightarrow (\frac{y}{x}+\frac{x}{y})+(\frac{z}{x}+\frac{x}{z})+(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}) \geq 6$ lµ B®t ®óng?

<u>VÝ dô 3:</u> (®æi biÕn sè)

Cho a, b, c > 0 vµ a + b + c <1. Chøng minh r»ng : $\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ac}+\frac{1}{c^2+2ab} \geq 9$ (1)

<u>Gi¶i</u>: §Æt x = a^2+2bc ; y = b^2+2ac ; z = c^2+2ab

Ta cã $x+y+z=(a+b+c)^2<1$

(1) $\Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq 9$ Víi x + y + z < 1 vµ x ,y,z > 0

Theo bÊt ®¼ng thøc C«si ta cã:

$x+y+z \geq 3.\sqrt[3]{xyz}$ vµ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq 3.\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}} \Rightarrow (x+y+z).\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9$

6) phương pháp làm trội :

Chøng minh B§T sau :

a) $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1).(2n+1)}<\frac{1}{2}$

b) $1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+...+\frac{1}{1.2.3.....n}<2$

<u>Gi¶i</u> :

a) Ta cã : $\frac{1}{(2n-1).(2n+1)}=\frac{1}{2}.\frac{(2k+1)-(2k-1)}{(2k-1).(2k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

Cho n ch¹y tõ 1 ®Õn k .Sau ®ã céng l¹i ta cã

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1).(2n+1)}=\frac{1}{2}.\left(1-\frac{2}{2n+1}\right)<\frac{1}{2}$$ (®pcm)

b) Ta cã : $1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+...+\frac{1}{1.2.3.....n}<1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+.....+\frac{1}{(n-1).n}$

$< 1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+....+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)<2-\frac{1}{n}<2$ (®pcm)

Bµi tËp vÒ nhµ:

1) Chøng minh r»ng: $x^2 + y^2 + z^2 + 3 \geq 2(x + y + z)$

HD: Ta xÐt hiÖu: $x^2 + y^2 + z^2 + 3 - 2(x + y + z) = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 2z + 1$

2) Cho a ,b,c lµ sè ®o ba c¹nh tam gi¸c. Chøng minh r»ng : $1 < \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$

(HD: $\frac{a}{b+c} < \frac{a+a}{a+b+c} = \frac{2a}{a+b+c}$ vµ $\frac{a}{b+c} > \frac{a}{a+b+c}$)

3) $1 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n+1} + ... + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} < 2$

áp dụng phương pháp làm trội

4) Cho a, b, c > 0. Chøng minh r»ng $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$

HD: $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} = c\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) \geq 2c$; $\frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}$? ; $\frac{bc}{a} + \frac{ab}{c}$?

CHUYEN ÑE 17 – VE ÑÖÔNG THANG SONG SONG ÑE TAO THANH CAC CAP ÑOAN THANG TY LE

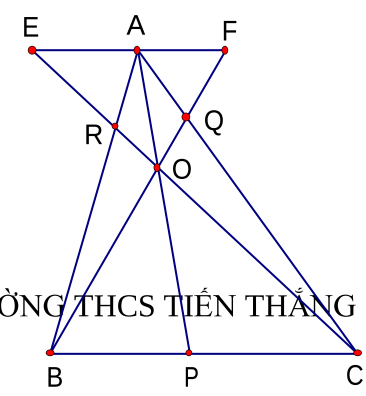
A.Phöông phap:

Trong cac bai tap van dung ñònh lí Talet. Nhieu khi ta can ve them ñöông phla mot ñöông thang song song vôi mot ñöông thang cho tröôc,. Ñay la mot cach ve ñöông phu hay dung, vì nhô ño ma tao thanh ñöôc cac cap ñoan thang tæ le

B. Cac ví du:

1) Ví du 1:

Tren cac canh BC, CA, AB cua tam giac ABC, lay töông öng cac ñiem P, Q, R sao cho ba ñöông thang AP, BQ, CR cat nhau tai mot ñiem.



Chöng minh: $\frac{AR}{RB}.\frac{BP}{PC}.\frac{CQ}{QA} = 1$ (Ñònh lí Ce – va)

Giai

Qua A ke ñöông thang song song vôi BC cat cac ñöông thang CR, BQ tai E, F. Goi O la giao ñiem cua AP, BQ, CR

$\Delta ARE \backsim \Delta BRC \Rightarrow \frac{AR}{RB} = \frac{AE}{BC}$ (a)

$\Delta BOP \backsim \Delta FOA \Rightarrow \frac{BP}{FA} = \frac{OP}{OA}$ (1)

$\Delta POC \backsim \Delta AOE \Rightarrow \frac{PC}{AE} = \frac{PO}{AO} =$ (2)

Tö (1) va (2) suy ra: $\frac{BP}{FA} = \frac{PC}{AE} \Rightarrow \frac{BP}{PC} = \frac{FA}{AE}$ (b)

$\Delta AQF \backsim \Delta CQB \Rightarrow \frac{CQ}{AQ} = \frac{BC}{FA}$ (c)

Nhan (a), (b), (c) ve theo ve ta co: $\frac{AR}{RB}.\frac{BP}{PC}.\frac{CQ}{QA} = \frac{AE}{BC}.\frac{FA}{AE}.\frac{BC}{FA} = 1$

* Ñao lai: Neu $\frac{AR}{RB}.\frac{BP}{PC}.\frac{CQ}{QA} = 1$ thì bai ñöông thang AP, BQ, CR ñong quy

2) Ví du 2:

Mot ñöông thang bat ky cat cac canh(phan keo dai cua cac canh) cua tam giac ABC tai P, Q, R.

Chöng minh rang: $\frac{RB.QA.PC}{RA.CQ.BP} = 1$(Ñònh lí Me-ne-la-uyt)

Giai:

Qua A ke ñöông thang song song vôi BC cat PR tai E. Ta co

$\Delta RAE \backsim \Delta RBP \Rightarrow \frac{RB}{RA} = \frac{BP}{AE}$ (a)

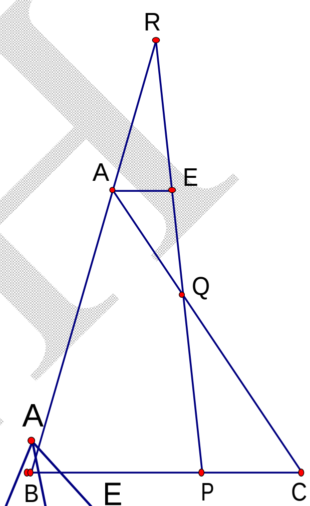
$\Delta AQE \backsim \Delta CQP \Rightarrow \frac{QA}{QC} = \frac{AE}{CP}$ (b)

Nhan ve theo ve cac ñang thöc (a) va (b) ta co

$$\frac{RB}{RA}.\frac{QA}{QC}=\frac{BP}{AE}.\frac{AE}{CP}\ (1)$$

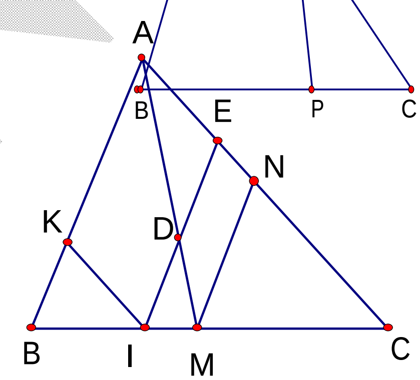
Nhan hai ve ñang thöc (1) vôi $\frac{PC}{BP}$ ta co: $\frac{RB}{RA}.\frac{PC}{BP}.\frac{QA}{QC}=\frac{BP}{AE}.\frac{AE}{CP}.\frac{PC}{BP}=1$

Ñao lai: Neu $\frac{RB.QA.PC}{RA.CQ.BP}=1$ thì ba ñiem P, Q, R thang hang



3) Ví du 3:

Cho tam giac ABC, trung tuyen AM. Goi I la ñiem bat ky tren canh BC. Ñöông thang qua I song song vôi AC cat AB ô K; ñöông thang qua I song song vôi AB cat AC, AM theo thö tö ô D, E.



Chöng minh DE = BK

Giai

Qua M ke MN // IE ($N\in$ AC).Ta co:

$$\frac{DE}{MN}=\frac{AE}{AN}\Rightarrow\frac{DE}{AE}=\frac{MN}{AN}\ (1)$$

MN // IE, ma MB = MC $\Rightarrow$ AN = CN (2)

Tö (1) va (2) suy ra $\frac{DE}{AE}=\frac{MN}{CN}$ (3)

Ta lai co $\frac{MN}{AB}=\frac{CN}{AC}\Rightarrow\frac{MN}{CN}=\frac{AB}{AC}$ (4)

Tö (4) va (5) suy ra $\frac{DE}{AE}=\frac{AB}{AC}$ (a)

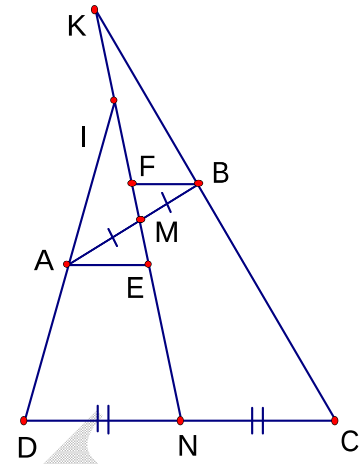
Töông tö ta co: $\frac{BK}{KI}=\frac{AB}{AC}$ (6)

Vì KI // AC, IE // AC nen tö giac AKIE la hình bình hanh nen KI = AE (7)

Tö (6) va (7) suy ra $\frac{BK}{KI}=\frac{BK}{AE}=\frac{AB}{AC}$ (b)

Tö (a) va (b) suy ra $\frac{DE}{AE}=\frac{BK}{AE}\Rightarrow$ DE = BK

4) Ví duï 4:



Ñöôøng thaúng qua trung ñieåm cuûa caïnh ñoái AB, CD cuûa töù giaùc ABCD caét caùc ñöôøng thaúng AD, BC theo thöù töï ôû I, K. Chöùng minh: IA . KC = ID. KB

Giaûi

Goïi M, N theo thöù töï laø trung ñieåm cuûa AB, CD

Ta coù AM = BM; DN = CN

Veõ AE, BF laàn löôït song song vôùi CD

ΔAME = ΔBMF (g.c.g) $\Rightarrow$ AE = BF

Theo ñònh lí Talet ta coù: $\frac{IA}{ID} = \frac{AE}{DN} = \frac{BF}{CN}$ (1)

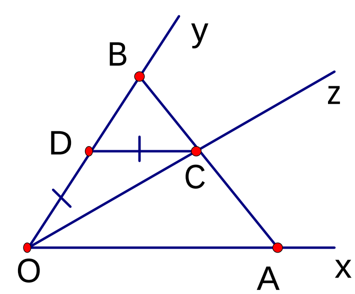
Cuõng theo ñònh lí Talet ta coù: $\frac{KB}{KC} = \frac{BF}{CN}$ (2)

Töø (1) vaø (2) suy ra $\frac{IA}{ID} = \frac{KB}{KC}$ $\Rightarrow$ IA . KC = ID. KB

5) Ví duï 5:

Cho $\widehat{xOy}$, caùc ñieåm A, B theo thöù töï chuyeån ñoäng treân caùc tia Ox, Oy sao cho $\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{1}{k}$ (k laø haèng soá). Chöùng minh raèng AB luoân ñi qua moät ñieåm coá ñònh

Giaûi



Veõ tia phaân giaùc Oz cuûa $\widehat{xOy}$ caét AB ôû C. veõ CD // OA

(D $\in$ OB) $\Rightarrow$ $\widehat{DOC} = \widehat{DCO} = \widehat{AOC}$

$\Rightarrow$ ΔCOD caân taïi D $\Rightarrow$ DO = DC

Theo ñònh lí Talet ta coù $\frac{CD}{OA} = \frac{BD}{OB} \Rightarrow \frac{CD}{OA} = \frac{OB - CD}{OB}$

$\Rightarrow \frac{CD}{OA} + \frac{CD}{OB} = 1 \Rightarrow \frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{1}{CD}$ (1)

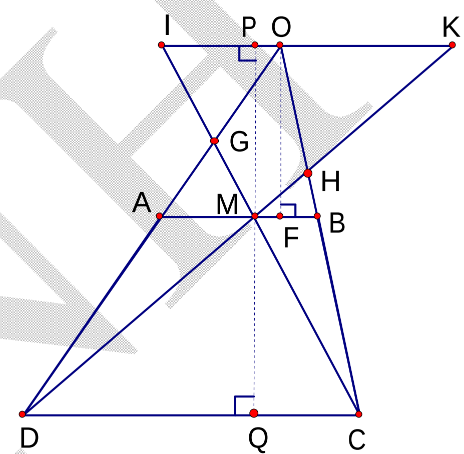
Theo gia thiet thì $\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}=\frac{1}{k}$ (2)

Tö (1) va (2) suy ra CD = k , khong ñoi

Vay AB luon ñi qua mot ñiem co ñònh la C sao cho CD = k va CD // Ox , D $\in$ OB

6) Ví du 6:

Cho ñiem M di ñong tren ñay nho AB cua hình thang ABCD, Goi O la giao ñiem cua hai canh ben DA, CB. Goi G la giao ñiem cua OA va CM, H la giao ñiem cua OB va DM. Chöng minh rang: Khi M di ñong tren AB thì tong $\frac{OG}{GD}+\frac{OH}{HC}$ khong ñoi



Giai

Qua O ke ñöôøng thang song vôi AB cat CM, DM theo thö tö ô I va K. Theo ñònh lí Talet ta co:

$$\frac{OG}{GD}=\frac{OI}{CD};\ \frac{OH}{HC}=\frac{OK}{CD}\Rightarrow\ \frac{OG}{GD}+\frac{OH}{HC}=\frac{OI}{CD}+\frac{OK}{CD}=\frac{IK}{CD}$$

$$\Rightarrow\frac{OG}{GD}+\frac{OH}{HC}=\frac{IK}{CD}\ (1)$$

Qua M ve ñöôøng thang vuong goc vôi AB cat IK, CD theo thö tö ô P va Q, ta co:

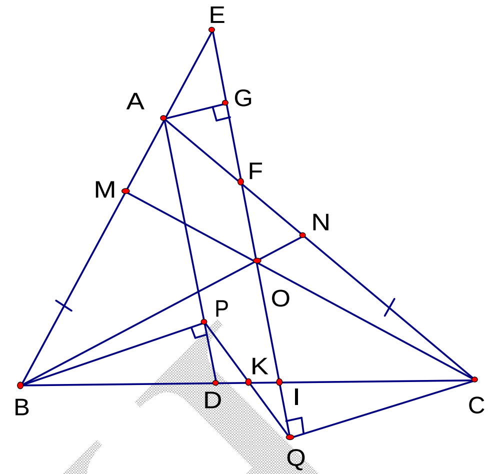
$\frac{IK}{CD}=\frac{MP}{MQ}=\frac{FO}{MQ}$ khong ñoi vì FO la khoang cach tö O ñen AB, MQ la ñöôøng cao cua hình thang nen khong ñoi (2)

Tö (1) va (2) suy ra $\frac{OG}{GD}+\frac{OH}{HC}=\frac{FO}{MQ}$ khong ñoi

7) Ví du 7:

Cho tam giac ABC (AB < AC), phan giac AD. Tren AB lay ñiem M, tren AC lay ñiem N sao cho BM = CN, goi giao ñiem cua CM va BN la O, Tö O ve ñöôøng thang song song vôi AD cat AC, AB tai E va F.

Chöng minh rang: AB = CF; BE = CA



Giai.

AD la phan giac nen $\widehat{BAD} = \widehat{DAF}$

EI // AD $\Rightarrow$ $\widehat{BAD} = \widehat{AEF}$ (goc ñong vò)

Ma $\widehat{DAF} = \widehat{OFC}$ (ñong vò); $\widehat{AFE} = \widehat{OFC}$ (ñoi ñænh)

Suy ra $\widehat{AEF} = \widehat{AFE}$ $\Rightarrow$ ΔAFE can tai A $\Rightarrow$ AE =AF (a)

Ap dung ñònh lí Talet vao ΔACD , vôi I la giao ñiem

cua EF vôi BC ta co $\frac{CF}{CA} = \frac{CI}{CD} \Rightarrow \frac{CF}{CI} = \frac{CA}{CD}$ (1)

AD la phan giac cua $\widehat{BAC}$ nen $\frac{CA}{CD} = \frac{BA}{BD}$ (2)

Tö (1) va (2) suy ra $\frac{CF}{CI} = \frac{BA}{BD}$ (3)

Ke ñöông cao AG cua ΔAFE . BP // AG (P $\in$ AD); CQ // AG (Q$\in$ OI)

thì $\widehat{BPD} = \widehat{CQI}$ = 90^0

Goi trung ñiem cua BC la K, ta co ΔBPK = ΔCQK (g.c.g) $\Rightarrow$ CQ = BP

$\Rightarrow$ ΔBPD = ΔCQI (g.c.g) $\Rightarrow$ CI = BD (4)

Thay (4) vao (3) ta co $\frac{CF}{BD} = \frac{BA}{BD}$ $\Rightarrow$ CF = BA (b)

Tö (a) va (b) suy ra BE = CA

Bai tap ve nha

1) Cho tam giac ABC. Ñiem D chia trong BC theo tæ so 1 : 2, ñiem O chia trong AD theo tæ so 3 : 2. goi K la giao ñiem cua BO va AC. Chöng minh rang $\frac{KA}{KC}$ khong ñoi

2) Cho tam giac ABC (AB > AC). Lay cac ñiem D, E tuy y thö tö thuoc cac canh AB, AC sao cho BD = CE. Goi giao ñiem cua DE, BC la K, chöng minh rang :

Tæ so $\frac{KE}{KD}$ khong ñoi khi D, E thay ñoi tren AB, AC

(HD: Ve DG // EC (G $\in$ BC).

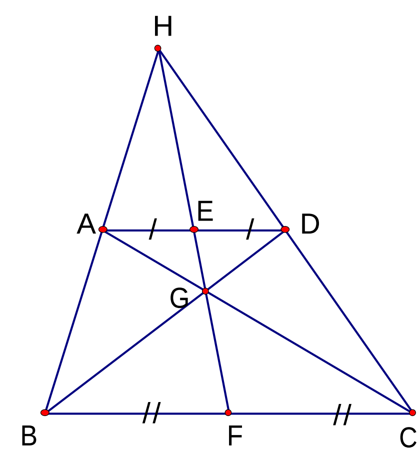
CHUYEN ÑE 18 – BO ÑE HÌNH THANG VA CHUM ÑÖÔNG THANG ÑONG QUY

A. Kien thöc

1) Bo ñe hình thang:

"Trong hình thang co hai ñay khong bang nhau, ñöông thang ñi qua giao ñiem cua cac ñöông cheo va ñi qua giao ñiem cua cac ñöông thang chöa hai canh ben thì ñi qua trung ñiem cua hai ñay"

Chöng minh:



Goi giao ñiem cua AB, CD la H, cua AC, BD la G, trung ñiem cua AD, BC la E va F

Noi EG, FG, ta co: $\Delta ADG \backsim \Delta CBG$ (g.g) , nen :

$$\frac{AD}{CB} = \frac{AG}{CG} \Rightarrow \frac{2AE}{2CF} = \frac{AG}{CG} \Rightarrow \frac{AE}{CF} = \frac{AG}{CG} \quad (1)$$

Ta lai co : $\widehat{EAG} = \widehat{FCG}$ (SL trong) (2)

Tö (1) va (2) suy ra : $\Delta AEG \backsim \Delta CFG$ (c.g.c)

Do ño: $\widehat{AGE} = \widehat{CGF} \Rightarrow$ E , G , H thang hang (3)

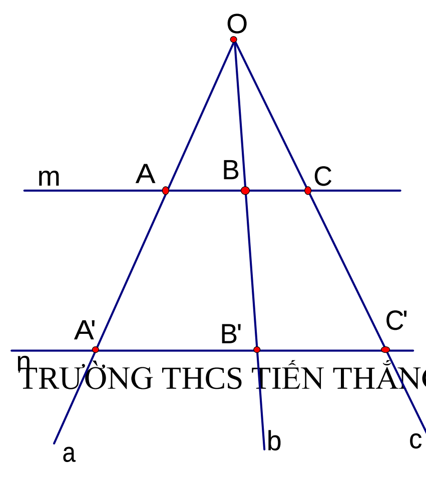
Töông tö, ta co: $\Delta AEH \backsim \Delta BFH \Rightarrow \widehat{AHE} = \widehat{BHF}$

$\Rightarrow$ H , E , F thang hang (4)

Tö (3) va (4) suy ra : H , E , G , F thang hang

2) Chum ñöông thang ñong quy:

Neu cac ñöông thang ñong quy cat hai ñöông thang song song thì chung ñònh ra tren hai ñöông thang song song ay cac ñoan thang töông öng tæ le



Neu m // n, ba ñöôøng thang a, b, c ñong quy ô O chung cat m tai A, B, C va cat n tai A', B', C' thì

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} \text{ hoac } \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \; ; \; \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

* Ñao lai:

+ Neu ba ñöôøng thang trong ño co hai ñöôøng thang cat nhau, ñònh ra tren hai ñöôøng thang song song cac cap ñoan thang töông öng tæ le thì ba ñöôøng thang ño ñong quy

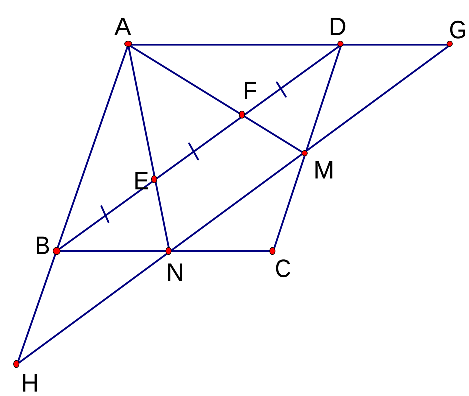
+ Neu hai ñöôøng thang bò cat bôi ba ñöôøng thang ñong quy tao thanh cac cap ñoan thang töông öng tæ le thì chung song song vôi nhau

B. Ap dung:

1) Bai 1:

Cho tö giac ABCD co M la trung ñiem CD, N la trung ñiem CB. Biet AM, AN cat BD thanh ba ñoan bang nhau. Chöng minh rang ABCD la hình bình hanh

Giai



Goi E, F la giao ñiem cua AM, AN vôi BD; G, H la giao ñiem cua MN vôi AD, BD

MN // BC (MN la ñöôøng trung bình cua ΔBCD)

$\Rightarrow$ Tö giac HBFM la hình thang co hai canh ben ñong quy tai A, N la trung ñiem cua ñay BF nen theo bo ñe hình thang thì N la trung ñiem cua ñay MH

$\Rightarrow$ MN = NH (1)

Töông tö : trong hình thang CDEN thì M la trung ñiem cua GN $\Rightarrow$ GM = MN (2)

Tö (1) va (2) suy ra GM = MN = NH

Ta co ΔBNH = ΔCNM (c.g.c) $\Rightarrow$ $\widehat{BHN} = \widehat{CMN}$ $\Rightarrow$ BH // CM hay AB // CD (a)

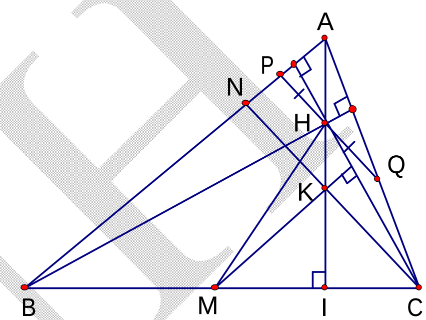
Töông töï: ΔGDM = ΔNCM (c.g.c) $\Rightarrow$ $\widehat{DGM} = \widehat{CNM}$ $\Rightarrow$ GD // CN hay AD // CB (b)

Töø (a) vaø (b) suy ra töù giaùc ABCD coù caùc caëp caïnh ñoái song song neân laø hình bình haønh

2) Baøi 2:

Cho ΔABC coù ba goùc nhoïn, tröïc taâm H, moät ñöôøng thaúng qua H caét AB, AC thöù töï taïi P, Q sao cho HP = HQ. Goïi M laø trung ñieåm cuûa BC. Chöùng minh: HM $\perp$PQ

Giaûi



Goïi giao ñieåm cuûa AH vaø BC laø I

Töø C keû CN // PQ (N$\in$ AB),

ta chöùng minh MH $\perp$CN $\Rightarrow$ HM $\perp$PQ

Töù giaùc CNPQ laø hình thang, coù H laø trung ñieåm PQ, hai caïnh beân NP vaø CQ ñoàng quy taïi A neân K laø trung ñieåm CN $\Rightarrow$ MK laø ñöôøng trung bình cuûa ΔBCN $\Rightarrow$ MK // CN $\Rightarrow$ MK // AB (1)

H laø tröïc taâm cuûa ΔABC neân CH$\perp$A B (2)

Töø (1) vaø (2) suy ra MK $\perp$CH $\Rightarrow$ MK laø ñöôøng cao cuûaΔCHK (3)

Töø AH $\perp$BC $\Rightarrow$ MC$\perp$HK $\Rightarrow$ MI laø ñöôøng cao cuûa ΔCHK (4)

Töø (3) vaø (4) suy ra M laø tröïc taâm cuûa ΔCHK$\Rightarrow$ MH$\perp$CN $\Rightarrow$ MH$\perp$PQ

3) baøi 3:

Cho hình chöõ nhaät ABCD coù M, N thöù töï laø trung ñieåm cuûa AD, BC. Goïi E laø moät ñieåm baát kyø thuoäc tia ñoái cuûa tia DC, K laø giao ñieåm cuûa EM vaø AC.

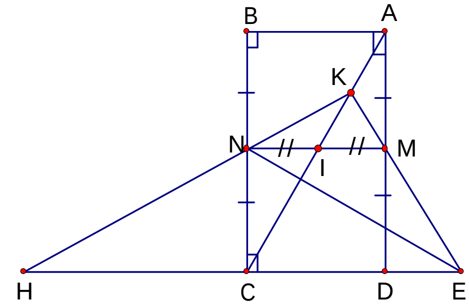
Chöùng minh raèng: NM laø tia phaân giaùc cuûa $\widehat{KNE}$

Giaûi

Goïi H laø giao ñieåm cuûa KN vaø DC, giao ñieåm cuûa AC vaø MN laø I thì IM = IN

Ta coù: MN // CD (MN laø ñöôøng trung bình cuûa hình chöõ nhaät ABCD)

$\Rightarrow$ Töù giaùc EMNH laø hình thang coù hai caïnh beân EM vaø HN ñoàng quy taïi K vaø I laø trung ñieåm cuûa MN neân C laø trung ñieåm cuûa EH

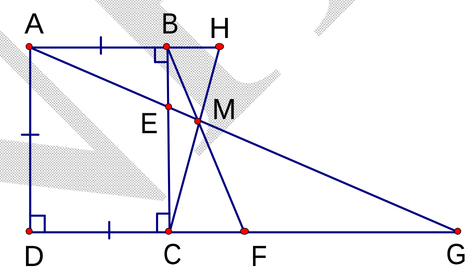


Trong ΔENH thì NC vöøa laø ñöôøng cao, vöøa laø ñöôøng trung tuyeán neân ΔENH caân taïi N $\Rightarrow$ NC laø tia phaân giaùc cuûa $\widehat{ENH}$ maø NC $\perp$ MN (Do NM $\perp$ BC – MN // AB) $\Rightarrow$ NM laø tia phaân giaùc goùc ngoaøi taïi N cuûa ΔENH

Vaäy NM laø tia phaân giaùc cuûa $\widehat{KNE}$

Baøi 4:

Treân caïnh BC = 6 cm cuûa hình vuoâng ABCD laáy ñieåm E sao cho BE = 2 cm. Treân tia ñoái cuûa tia CD laáy ñieåm F sao cho CF = 3 cm. Goïi M laø giao ñieåm cuûa AE vaø BF. Tính $\widehat{AMC}$



Giaûi

Goïi giao ñieåm cuûa CM vaø AB laø H, cuûa AM vaø DF laø G

Ta coù: $\frac{BH}{CF} = \frac{AB}{FG} \Leftrightarrow \frac{BH}{3} = \frac{6}{FG}$

Ta laïi coù $\frac{AB}{CG} = \frac{BE}{EC} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow CG = 2AB = 12\text{ cm}$

$\Rightarrow$ FG = 9 cm $\Rightarrow \frac{BH}{3} = \frac{6}{9} \Rightarrow BH = 2\text{ cm}$ $\Rightarrow$ BH = BE

ΔBAE = ΔBCH (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{BCH}$ maø $\widehat{BAE} + \widehat{BEA} = 90^0$

Maët khaùc $\widehat{BEA} = \widehat{MEC}$; $\widehat{MCE} = \widehat{BCH}$ $\Rightarrow \widehat{MEC} + \widehat{MCE} = 90^0 \Rightarrow \widehat{AMC} = 90^0$

Baøi 5:

Cho töù giaùc ABCD. Qua ñieåm E thuoäc AB, H thuoäc AC veõ caùc ñöôøng thaúng song song vôùi BD, caét caùc caïnh coøn laïi cuûa töù giaùc taïi F, G

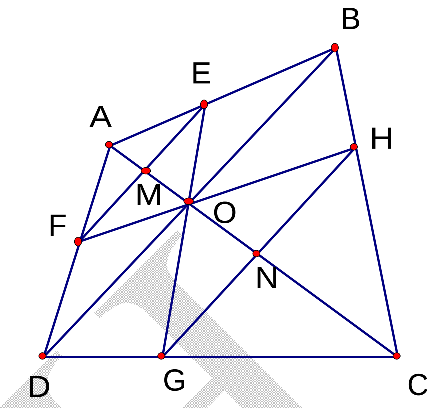
a) Coù theå keát luaän gì veà caùc ñöôøng thaúng EH, AC, FG

b) Goïi O laø giao ñieåm cuûa AC vaø BD, cho bieát OB = OD. Chöùng minh raèng ba ñöôøng thaúng EG, FH, AC ñoàng quy

Giaûi

a) Neu EH // AC thì EH // AC // FG

Neu EH va AC khong song song thì EH, AC, FG ñong quy



b) Goi giao ñiem cua EH, HG vôi AC

Trong hình thang DFEB co hai canh ben DF, BE ñong quy tai A va OB = OD nen theo bo ñe hình thang thì M la trung ñiem cua EF

Töông tö: N la trung ñiem cua GH

Ta co $\frac{ME}{GN} = \frac{MF}{HN}$ nen ba ñöôøng thang EG, FH, AC ñong quy tai O

CHUYEN ÑE 19 – TÌM GIA TRÒ LÔN NHAT, NHO NHAT CUA MOT BIEU THÖC

A. Gia trò lôn nhat, gia trò nho nhat cua mot bieu thöc

1) Khai niem: Neu vôi moi gia trò cua bien thuoc mot khoang xac ñònh nao ño ma gia trò cua bieu thöc A luon luon lôn hôn hoac bang (nho hôn hoac bang) mot hang so k va ton tai mot gia trò cua bien ñe A co gia trò bang k thì k goi la gia trò nho nhat (gia trò lôn nhat) cua bieu thöc A öng vôi cac gia trò cua bien thuoc khoang xac ñònh noi tren

2) Phöông phap

a) Ñe tìm gia trò nho nhat cua A, ta can:

+ Chöng minh A $\geq$ k vôi k la hang so

+ Chæ ra da "=" co the xay ra vôi gia trò nao ño cua bien

b) Ñeå tìm giaù trò lôùn nhaát cuûa A, ta caàn:

+ Chöùng minh A $\le$ k vôùi k laø haèng soá

+ Chæ ra daáu "=" coù theå xaûy ra vôùi giaù trò naøo ñoù cuûa bieán

Kí hieäu : min A laø giaù trò nhoû nhaát cuûa A; max A laø giaù trò lôùn nhaát cuûa A

B.Caùc baøi taäp tìm Giaù trò lôùn nhaát, giaù trò nhoû nhaát cuûa moät bieåu thöùc

I) Daïng 1: Tam thöùc baäc hai

Ví duï 1 :

a) Tìm giaù trò nhoû nhaát cuûa A = $2x^2 – 8x + 1$

b) Tìm giaù trò lôùn nhaát cuûa B = $-5x^2 – 4x + 1$

Giaûi

a) A = $2(x^2 – 4x + 4) – 7 = 2(x – 2)^2 – 7 \ge - 7$

min A = - 7 $\Leftrightarrow$ x = 2

b) B = $- 5(x^2 + \frac{4}{5}x) + 1 = - 5(x^2 + 2.x.\frac{2}{5} + \frac{4}{25}) + \frac{9}{5} = \frac{9}{5} - 5(x + \frac{2}{5})^2 \le \frac{9}{5}$

max B = $\frac{9}{5} \Leftrightarrow x = -\frac{2}{5}$

b) Ví duï 2: Cho tam thöùc baäc hai P(x) = $a x^2 + bx + c$

a) Tìm min P neáu a > 0

b) Tìm max P neáu a < 0

Giaûi

Ta coù: P = $a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + (c - \frac{b^2}{4a})$

Ñaët $c - \frac{b^2}{4a}$ = k. Do $(x + \frac{b}{2a})^2 \ge 0$ neân:

a) Neáu a > 0 thì $a(x + \frac{b}{2a})^2 \ge 0$ do ñoù P $\ge$ k $\Rightarrow$ min P = k $\Leftrightarrow$ x = $-\frac{b}{2a}$

b) Neáu a < 0 thì $a(x + \frac{b}{2a})^2 \le 0$ do ñoù P $\le$ k $\Rightarrow$ max P = k $\Leftrightarrow$ x = $-\frac{b}{2a}$

II. Daïng 2: Ña thöùc coù daáu giaù trò tuyeät ñoái

1) Ví duï 1: Tìm giaù trò nhoû nhaát cuûa

a) $A = (3x - 1)^2 - 4|3x - 1| + 5$

ñaët $|3x - 1| = y$ thì $A = y^2 - 4y + 5 = (y - 2)^2 + 1 \geq 1$

min A = 1 $\Leftrightarrow y = 2 \Leftrightarrow |3x - 1| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - 1 = 2 \\ 3x - 1 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

b) $B = |x - 2| + |x - 3|$

$B = |x - 2| + |x - 3| = B = |x - 2| + |3 - x| \geq |x - 2 + 3 - x| = 1$

$\Rightarrow$ min B = 1 $\Leftrightarrow (x - 2)(3 - x) \geq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3$

2) Ví duï 2: Tìm GTNN cuûa $C = |x^2 - x + 1| + |x^2 - x - 2|$

Ta coù $C = |x^2 - x + 1| + |x^2 - x - 2| = |x^2 - x + 1| + |2 + x - x^2| \geq |x^2 - x + 1 + 2 + x - x^2| = 3$

min C = 3 $\Leftrightarrow (x^2 - x + 1)(2 + x - x^2) \geq 0 \Leftrightarrow 2 + x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \leq 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2$

3) Ví duï 3:

T×m gi¸ trÞ nhá nhÊt cña : T = |x-1| + |x-2| +|x-3| + |x-4|

Ta cã |x-1| + |x-4| = |x-1| + |4-x| $\geq$ |x-1+4-x| = 3 (1)

Vµ $|x-2| + |x-3| = |x-2| + |3-x| \geq |x-2+3-x|$ = 1 (2)

VËy T = |x-1| + |x-2| +|x-3| + |x-4| $\geq$ 1 + 3 = 4

Ta cã tõ (1) $\Rightarrow$ DÊu b»ng x¶y ra khi $1 \leq x \leq 4$

(2) $\Rightarrow$ DÊu b»ng x¶y ra khi $2 \leq x \leq 3$

VËy T cã gi¸ trÞ nhá nhÊt lµ 4 khi $2 \leq x \leq 3$

III.Daïng 3: Ña thöùc baäc cao

1) Ví duï 1: Tìm giaù trò nhoû nhaát cuûa

a) $A = x(x - 3)(x - 4)(x - 7) = (x^2 - 7x)(x^2 - 7x + 12)$

Ñaët $x^2 - 7x + 6$ thì $A = (y - 6)(y + 6) = y^2 - 36 \geq -36$

Min A = - 36 $\Leftrightarrow$ y = 0 $\Leftrightarrow$ $x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 6) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoac x = 6

b) $B = 2x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 3 = (x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 2x + 1) + 2$

$= (x - y)^2 + (x - 1)^2 + 2 \geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$

c) $C = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y = x^2 - 2x + y^2 - 2y + xy - x - y$

Ta co $C + 3 = (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + (xy - x - y + 1)$

$= (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (x - 1)(y - 1)$. Ñat x – 1 = a; y – 1 = b thì

$C + 3 = a^2 + b^2 + ab = (a^2 + 2.a.\frac{b}{2} + \frac{b^2}{4}) + \frac{3b^2}{4} = (a + \frac{b}{2})^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0$

Min (C + 3) = 0 hay min C = - 3 $\Leftrightarrow$ a = b = 0 $\Leftrightarrow$ x = y = 1

2) Ví dui 2: Tìm gia trò nhoi nhat cua

a) $C = (x + 8)^4 + (x + 6)^4$

Ñat x + 7 = y $\Rightarrow C = (y + 1)^4 + (y - 1)^4 = y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 1 + y^4 - 4y^3 + 6y^2 - 4y + 1$

$= 2y^4 + 12y^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow$ min A = 2 $\Leftrightarrow$ y = 0 $\Leftrightarrow$ x = - 7

b) $D = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 9 = (x^4 - 6x^3 + 9x^2) + (x^2 - 6x + 9)$

$= (x^2 - 3x)^2 + (x - 3)^2 \geq 0 \Rightarrow$ min D = 0 $\Leftrightarrow$ x = 3

IV. Daing phain thöic:

1. Phain thöic coi töi lai haing soi, maiu lai tam thöic baic hai

Bieu thöic daing nay ñat GTNN khi maiu ñat GTLN

Ví dui : Tìm GTNN cua $A = \frac{2}{6x - 5 - 9x^2} = \frac{-2}{9x^2 - 6x + 5} = \frac{-2}{(3x - 1)^2 + 4}$

Vì $(3x - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow (3x - 1)^2 + 4 \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{(3x - 1)^2 + 4} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{-2}{(3x - 1)^2 + 4} \geq \frac{-2}{4} \Rightarrow A \geq -\frac{1}{2}$

min A = $-\frac{1}{2} \Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

2. Phain thöic coi maiu lai bình phöông cuia moit nhò thöic

a) Ví dui 1: Tìm GTNN cua $A = \frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1}$

+) Cach 1: Tach tö thanh cac nhom co nhan tö chung vôi mau

A = $\frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1} = \frac{3(x^2 - 2x + 1) - 2(x - 1) + 1}{(x - 1)^2} = 3 - \frac{2}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2}$. Ñat y = $\frac{1}{x - 1}$ Thì

A = 3 – 2y + y^2 = $(y – 1)^2$ + 2 $\geq$ 2 $\Rightarrow$ min A = 2 $\Leftrightarrow$ y = 1 $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{x - 1}$ = 1 $\Leftrightarrow$ x = 2

+) Cach 2: Viet bieu thöc A thanh tong cua mot so vôi mot phan thöc khong am

A = $\frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1} = \frac{2(x^2 - 2x + 1) + (x^2 - 4x + 4)}{(x - 1)^2} = 2 + \frac{(x - 2)^2}{(x - 1)^2} \geq 2$

$\Rightarrow$ min A = 2 $\Leftrightarrow$ x – 2 = 0 $\Leftrightarrow$ x = 2

b) Ví du 2: Tìm GTLN cua B = $\frac{x}{x^2 + 20x + 100}$

Ta co B = $\frac{x}{x^2 + 20x + 100} = \frac{x}{(x + 10)^2}$. Ñat y = $\frac{1}{x + 10}$ $\Rightarrow$ x = $\frac{1}{y} - 10$ thì

B = $(\frac{1}{y} - 10).y^2$ = - 10y^2 + y = - 10(y^2 – 2.y.$\frac{1}{20}$y + $\frac{1}{400}$) + $\frac{1}{40}$ = - 10$\left(y - \frac{1}{10}\right)^2$ + $\frac{1}{40}$ $\leq$ $\frac{1}{40}$

Max B = $\frac{1}{40}$ $\Leftrightarrow$ $y - \frac{1}{10}$ = 0 $\Leftrightarrow$ y = $\frac{1}{10}$ $\Leftrightarrow$ x = 10

c) Ví du 3: Tìm GTNN cua C = $\frac{x^2 + y^2}{x^2 + 2xy + y^2}$

Ta co: C = $\frac{x^2 + y^2}{x^2 + 2xy + y^2} = \frac{\frac{1}{2}\left[(x + y)^2 + (x - y)^2\right]}{(x + y)^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{(x - y)^2}{(x + y)^2} \geq \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ min A = $\frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$ x = y

3. Cac phan thöc co dang khac

a)Ví du : Tìm GTNN, GTLN (Cöc trò) cua A = $\frac{3 - 4x}{x^2 + 1}$

Ta co: A = $\frac{3 - 4x}{x^2 + 1} = \frac{(4x^2 - 4x + 4) - (x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{(x - 2)^2}{x^2 + 1} - 1 \geq -1$ $\Rightarrow$ min A = - 1 $\Leftrightarrow$ x = 2

Ta lai co: A = $\frac{3 - 4x}{x^2 + 1} = \frac{(4x^2 + 4) - (4x^2 + 4x + 1)}{x^2 + 1} = 4 - \frac{(2x + 1)^2}{x^2 + 1} \leq 4$ $\Rightarrow$ max A = 4 $\Leftrightarrow$ x = $-\frac{1}{2}$

C. Tìm GTNN, GTLN cua mot bieu thöc biet quan he giöa cac bien

1) Ví du 1: Cho x + y = 1. Tìm GTNN cua A = $x^3 + y^3$ + xy

Ta co A = $(x + y)(x^2 – xy + y^2) + xy = x^2 + y^2$ (vì $x + y = 1$)

a) Cach 1: Bieu thò an nay qua an kia, roi ñöa ve mot tam thöc bac hai

Tö $x + y = 1 \Rightarrow x = 1 – y$

nen $A = (1 – y)^2 + y^2 = 2(y^2 – y) + 1 = 2(y^2 – 2.y.\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) + \frac{1}{2} = 2\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$

Vay min $A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$

b) Cach 2: Sö dung ñk ña cho, lam xuat hien mot bieu thöc môi co chöa A

Tö $x + y = 1 \Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 1(1)$. Mat khac $(x – y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 – 2xy + y^2 \geq 0$ (2)

Cong (1) vôi (2) ve theo ve, ta co:

$2(x^2 + y^2) \geq 1 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2} \Rightarrow$ min $A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$

2)Ví duï 2: Cho $x + y + z = 3$

a) Tìm GTNN cuûa $A = x^2 + y^2 + z^2$

b) Tìm GTLN cuûa $B = xy + yz + xz$

Tö Cho $x + y + z = 3 \Rightarrow$ Cho $(x + y + z)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz) = 9$ (1)

Ta co $x^2 + y^2 + z^2 - xy – yz – zx = \frac{1}{2}.2.(x^2 + y^2 + z^2 - xy – yz – zx)$

$= \frac{1}{2}\left[(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2\right] \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ (2)

Ñang thöc xay ra khi $x = y = z$

a) Tö (1) va (2) suy ra

$9 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz) \leq x^2 + y^2 + z^2 + 2(x^2 + y^2 + z^2) = 3(x^2 + y^2 + z^2)$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq 3 \Rightarrow$ min $A = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1$

b) Tö (1) va (2) suy ra

$9 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz) \geq xy + yz + zx + 2(xy + yz + xz) = 3(xy + yz + zx)$

$\Rightarrow xy + yz + zx \leq 3 \Rightarrow$ max $B = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1$

3) Ví duï 3:

T×m gi¸ trÞ lín nhÊt cña S = xyz.(x+y).(y+z).(z+x) víi x,y,z > 0 vµ x + y + z = 1

V× x,y,z > 0 , ¸p dông B§T C«si ta cã: x+ y + z $\ge 3\sqrt[3]{xyz} \Rightarrow \sqrt[3]{xyz} \le \frac{1}{3} \Rightarrow xyz \le \frac{1}{27}$

¸p dông bÊt ®¼ng thøc C«si cho x+y ; y+z ; x+z ta cã

$$(x+y).(y+z).(z+x) \ge 3\sqrt[3]{(x+y).(y+z).(x+z)} \quad \Rightarrow 2 \ge 3\sqrt[3]{(x+y).(y+z).(z+x)}$$

DÊu b»ng x¶y ra khi x = y = z =$\frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ S $\le \frac{8}{27}.\frac{1}{27} = \frac{8}{729}$

VËy S cã gi¸ trÞ lín nhÊt lµ $\frac{8}{729}$ khi x = y = z = $\frac{1}{3}$

4) Ví duï 4: Cho xy + yz + zx = 1. T×m gi¸ trÞ nhá nhÊt cña $x^4+y^4+z^4$

¸p dông B§T Bunhiacèpski cho 6 sè (x,y,z) ;(x,y,z)

Ta cã $(xy+yz+zx)^2 \le \left(x^2+y^2+z^2\right)^2 \Rightarrow 1 \le \left(x^2+y^2+z^2\right)^2$ (1)

¸p dông B§T Bunhiacèpski cho (x^2, y^2, z^2) vµ (1,1,1)

Ta cã $(x^2+y^2+z^2)^2 \le (1^2+1^2+1^2)(x^4+y^4+z^4) \Rightarrow (x^2+y^2+z^2)^2 \le 3(x^4+y^4+z^4)$

Tõ (1) vµ (2) $\Rightarrow 1 \le 3(x^4+y^4+z^4) \Rightarrow x^4+y^4+z^4 \le \frac{1}{3}$

VËy $x^4+y^4+z^4$ cã gi¸ trÞ nhá nhÊt lµ $\frac{1}{3}$ khi x= y = z = $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. Moät soá chuù yù:

1) Khi tìm GTNN, GTLN ta coù theå ñoåi bieán

Ví duï : Khi tìm GTNN cuûa A =(x – 1)^2 + (x – 3)^2 , ta ñaët x – 2 = y thì

A = (y + 1)^2 + (y – 1)^2 = 2y^2 + 2 $\ge$ 2…

2) Khi tìm cöïc trò cuûa moät bieåu thöùc, ta coù theå thay ñk cuûa bieåu thöùc naøy ñaït cöïc trò bôûi ñk töông ñöông laø bieåu thöùc khaùc ñaït cöïc trò:

+) -A lôùn nhaát $\Leftrightarrow$ A nhoû nhaát ; +) $\frac{1}{B}$ lôùn nhaát $\Leftrightarrow$ B nhoû nhaát (vôùi B > 0)

+) C lôùn nhaát $\Leftrightarrow$ C^2 lôùn nhaát

Ví du: Tìm cöc trò cua A = $\frac{x^4 + 1}{\left(x^2 + 1\right)^2}$

a) Ta co A > 0 nen A nho nhat khi $\frac{1}{A}$ lôn nhat, ta co

$\frac{1}{A} = \frac{\left(x^2 + 1\right)^2}{x^4 + 1} = 1 + \frac{2x^2}{x^4 + 1} \geq 1 \Rightarrow$ min $\frac{1}{A} = 1 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow$ max A = 1 $\Leftrightarrow$ x = 0

b) Ta co $(x^2 – 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 \geq 0 \Rightarrow x^4 + 1 \geq 2x^2$. (Dau bang xay ra khi $x^2 = 1$)

Vì $x^4 + 1 > 0 \Rightarrow \frac{2x^2}{x^4 + 1} \leq 1 \Rightarrow 1 + \frac{2x^2}{x^4 + 1} \leq 1 + 1 = 2 \Rightarrow$ max $\frac{1}{A} = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1$

$\Rightarrow$ min A = $\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm 1$

3) Nhieu khi ta tìm cöc trò cua bieu thöc trong cac khoang cua bien, sau ño so samh cac cöc trò ño ñe ñe tìm GTNN, GTLN trong toan bo tap xac ñònh cua bien

Ví du: Tìm GTLN cua B = $\frac{y}{5 - (x + y)}$

a) xet $x + y \leq 4$

- Neu x = 0 thì A = 0

- Neu $1 \leq y \leq 3$ thì $A \leq 3$

- Neu y = 4 thì x = 0 va A = 4

b) xet $x + y \geq 6$ thì $A \leq 0$

So sanh cac gia trò tren cua A, ta thay max A = 4 $\Leftrightarrow$ x = 0; y = 4

4) Sö dung cac hang bat ñang thöc

Ví du: Tìm GTLN cua A = $|2x + 3y|$ biet $x^2 + y^2 = 52$

Ap dung Bñt Bunhiacopxki: $(a x + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$ cho cac so 2, x , 3, y ta co:

$(2x + 3y)^2 \leq (2^2 + 3^2)(x^2 + y^2) = (4 + 9).52 = 26^2 \Rightarrow |2x + 3y| \leq 26$

Max A = 26 $\Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \Rightarrow y = \frac{3x}{2} \Rightarrow x^2 + y^2 = x^2 + \left(\frac{3x}{2}\right)^2 = 52 \Leftrightarrow 13x^2 = 52.4 \Leftrightarrow x = \pm 4$

Vay: Ma x A = 26 $\Leftrightarrow$ x = 4; y = 6 hoac x = - 4; y = - 6

5) Hai soá coù toång khoâng ñoåi thì tích cuûa chuùng lôùn nhaát khi vaø chæ khi chuùng baèng nhau

Hai soá coù tích khoâng ñoåi thì toång cuûa chuùng lôùn nhaát khi vaø chæ khi chuùng baèng nhau

a)Ví duï 1: Tìm GTLN cuûa A = $(x^2 – 3x + 1)(21 + 3x – x^2)$

Vì $(x^2 – 3x + 1) + (21 + 3x – x^2) = 22$ khoâng ñoåi neân tích $(x^2 – 3x + 1)(21 + 3x – x^2)$ lôùn nhaát khi vaø chæ khi $x^2 – 3x + 1 = 21 + 3x – x^2 \Leftrightarrow x^2 – 3x – 10 = 0 \Leftrightarrow x = 5$ hoaëc $x = - 2$

Khi ñoù A = 11. 11 = 121 $\Rightarrow$ Max A = 121 $\Leftrightarrow$ x = 5 hoaëc x = - 2

b) Ví duï 2: Tìm GTNN cuûa B = $\frac{(x + 4)(x + 9)}{x}$

Ta coù: B = $\frac{(x + 4)(x + 9)}{x} = \frac{x^2 + 13x + 36}{x} = x + \frac{36}{x} + 13$

Vì caùc soá x vaø $\frac{36}{x}$ coù tích $x.\frac{36}{x} = 36$ khoâng ñoåi neân $x + \frac{36}{x}$ nhoû nhaát $\Leftrightarrow x = \frac{36}{x} \Leftrightarrow x = 6$

$\Rightarrow$ A = $x + \frac{36}{x} + 13$ nhoû nhaát laø min A = 25 $\Leftrightarrow$ x = 6

6)Trong khi tìm cöïc trò chæ caàn chæ ra raèng toàn taïi moät giaù trò cuûa bieán ñeå xaûy ra ñaúng thöùc chöù khoâng caàn chæ ra moïi giaù trò ñeå xaûy ra ñaúng thöùc

Ví duï: Tìm GTNN cuûa A = $|11^m – 5^n|$

Ta thaáy 11^m taän cuøng baèng 1, 5^n taän cuøng baèng 5

Neáu $11^m > 5^n$ thì A taän cuøng baèng 6, neáu $11^m < 5^n$ thì A taän cuøng baèng 4

khi m = 2; n = 3 thÌ A = $|121 – 124|$ = 4 $\Rightarrow$ min A = 4, chaúng haïn khi m = 2, n = 3

CHUYEÂN ÑEÀ 20 – PHÖÔNG TRÌNH NGHIEÄM NGUYEÂN

❈ - **PHÖÔNG PHAÙP 1**: Phöông phaùp ñöa veà daïng toång

✪ Phöông phaùp: Phöông phaùp naøy thöôøng söû duïng vôùi caùc phöông trình coù caùc bieåu thöùc chöùa aån vieát ñöôïc döôùi daïng toång caùc bình phöông.

- Bien ñoi phöông trình ve dang mot ve la mot tong cua cac bình phöông cac bieu thöc chöa an; ve con lai la tong bình phöông cua cac so nguyen (so so hang cua hai ve bang nhau).

Cac ví du minh hoa:

- Ví du 1: Tìm $x; y \in Z$ thoa man: $5x^2 - 4xy + y^2 = 169$ (1)

(1) $\Leftrightarrow 4x^2 - 4xy + y^2 + x^2 = 144 + 25 = 169 + 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (2x-y)^2 + x^2 = 144 + 25 \\ (2x-y)^2 + x^2 = 169 + 0 \end{array}\right.$ (II)

Tö (I) ta co:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} (2x-y)^2 = 12^2 \\ x^2 = 5^2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \pm 5 \\ y = \mp 2 \end{array}\right.; \left\{\begin{array}{l} x = \pm 5 \\ y = \mp 22 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} (2x-y)^2 = 5^2 \\ x^2 = 12^2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \pm 12 \\ y = \mp 19 \end{array}\right.; \left\{\begin{array}{l} x = \pm 12 \\ y = \mp 29 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Töông tö tö (II) ta co:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} (2x-y)^2 = 13^2 \\ x^2 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = \pm 13 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} (2x-y)^2 = 0 \\ x^2 = 13^2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \pm 13 \\ y = \pm 26 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Vay $(x, y) \in \left\{\begin{array}{l} (5;-2);(5;-22);(-5;2);(-5;22);(12;-19);(12;-29) \\ (-12;19);(-12;29);(0;13);(0;-13);(13;26);(-13;-26) \end{array}\right\}$

Ví du 2: Tìm $x; y \in Z$ thoa man: $x^2 + y^2 - x - y = 8$ (2)

(2) $\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 4y^2 - 4y = 32 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 + 4y^2 - 4y + 1 = 34 \Leftrightarrow (2x-1)^2 + (2y-1)^2 = 5^2 + 3^2$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} (2x-1)^2 = 3^2 \\ (2y-1)^2 = 5^2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2; x = -1 \\ y = 3; y = -2 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} (2x-1)^2 = 5^2 \\ (2y-1)^2 = 3^2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3; x = -2 \\ y = 2; y = -1 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Vay $(x; y) \in \{(2;3);(2;-2);(-1;3);(-1;-2);(3;2);(3;-1);(-2;2);(-2;-1)\}$

Ví du 3: Tìm $x; y \in Z$ thoa man: $x^3 - y^3 = 91$ (1)

(1) $\Leftrightarrow (x-y)(x^2 + xy + y^2) = 91.1 = 13.7$ (Vì $(x^2 + xy + y^2) > 0$)

$$\left(x-y\right).\left(x^2+xy+y^2\right)=91.1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-y=1 \\ \left(x^2+xy+y^2\right)=91 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=5 \end{cases}; \begin{cases} x=-5 \\ y=-6 \end{cases} \\ \begin{cases} x-y=91 \\ \left(x^2+xy+y^2\right)=1 \end{cases} \Rightarrow VN \end{array}\right.$$

<u>Ví du 4</u>: Tìm $x;y\in Z$ thoa man: $x^2+x-y^2=0$ (2)

$$x^2+x-y^2=0 \Rightarrow 4x^2+4x-4y^2=0 \Rightarrow \left(2x+1\right)^2-\left(2y\right)^2=1 \Rightarrow \left(2x+2y+1\right)\left(2x-xy+1\right)=1$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x+2y+1=1 \\ 2x-2y+1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+2y+1=-1 \\ 2x-2y+1=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vay: $\left(x;y\right)\in\left\{\left(0;0\right);\left(-1;0\right)\right\}$

❉ - **<u>PHÖÔNG PHAP 2</u>**: Phöông phap cöc han

✪ Phöông phap: Phöông phap nay thöông sö dung vôi cac phöông trình ñoi xöùng

- Vì phöông trình ñoi xöng nen $x;y;z$ co vai tro bình ñang nhö nhau. Do ño; ta gia thiet $x\le y\le z$; tìm ñieu kien cua cac nghiem; loai trö dan cac an ñe co phöông trình ñôn gian. Giai phöông trình; dung phep hoan vò ñe suy ra nghiem.

✠ Ta thöông gia thiet $1\le x\le y\le z\le ....$

❀ **Cac ví du minh hoa**:

<u>Ví du 1</u>: Tìm $x;y;z\in Z^+$ thoa man: $x+y+z=x.y.z$ (1)

◆ Nhan xet – Tìm höông giai:

Ta thay ñay la phöông trình ñoi xöng.

Gia sö $1\le x\le y\le z$. Khi ño:

(1)$\Rightarrow x.y.z=x+y+z\le 3z \Rightarrow x.y\le 3$ (Vì $x;y;z\in Z^+$)$\Rightarrow x.y\in\left\{1;2;3\right\}$

* Neu: $x.y=1 \Rightarrow x=y=1 \Rightarrow 2+z=z$ (vo lí)

* Neu: $x.y=2 \Rightarrow x=1;y=2;z=3$

* Neu: $x.y=3 \Rightarrow x=1;y=3 \Rightarrow z=2<y$ (vo lí)

Vay: $x;y;z$ la hoan vò cua $(1;2;3)$

Ví du 2: Tìm $x;y;z \in Z^{+}$ thoa man: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$ (2)

◆ Nhan xet – Tìm höông giai:

Ñay la phöông trình ñoi xöng.

Gia sö $1 \le x \le y \le z$. Khi ño:

(2)$\Rightarrow 2=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \le \frac{3}{x} \Rightarrow x \le \frac{3}{2} \Rightarrow x=1$

Vôi: $x=1 \Rightarrow 1=\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \le \frac{2}{y} \Rightarrow y \le 2 \Rightarrow y \in \{1;2\}$

♦.Neu: $y=1 \Rightarrow \frac{1}{z}=0$ (vo lí)

♦.Neu: $y=2 \Rightarrow z=2$

Vay: $x;y;z$ la hoan vò cua $(1;2;2)$

✵ - **PHÖÔNG PHAP 3**: Phöông phap sö dung tính chat chia het

❀**Cac ví du minh hoa**:

Ví du 1: Tìm $x;y \in Z$ ñe: $A=\frac{x^2+x}{x^2+x+1}$ nhan gia trò nguyen

Ta co: $A=\frac{x^2+x}{x^2+x+1}=\frac{x^2+x+1-1}{x^2+x+1}=1+\frac{1}{x^2+x+1}$. Khi ño:

Ñe A nh□n gia trò nguyen thì $\frac{1}{x^2+x+1}$ nhan gia trò nguyen.

$\Rightarrow 1 \vdots \left(x^2+x+1\right) \Rightarrow \left(x^2+x+1\right) \in U_{(1)}=\{-1;1\}$

Vì : $\left(x^2+x+1\right)>0; \forall x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2+x+1=1 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases}$

Vay ñe A nhan gia trò nguyen thì: $x=0$ hoac $x=-1$

Ví du 2: Tìm $x;y \in Z$ thoa man: $2y^2x+x+y+1=x^2+2y^2+x.y$

(2)$\Rightarrow 2y^2.(x-1)-x.(x-1)-y.(x-1)+1=0(*)$

Vôi: $x=1;(*)\Rightarrow 1=0\Rightarrow x=1$ khong phai la ngiem cua phöông trình. Nen:

$$2y^2-x-y+\frac{1}{x-1}=0(**).$$

Phöông trình co nghiem nguyen $\Leftrightarrow \frac{1}{x-1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow (x-1)\in U(1)=\{1;-1\}\Rightarrow \begin{cases}x=0\\x=1\end{cases}$

<u>Ví du 3</u>: Tìm $x;y\in Z^+$ thoa man: $3^x+1=(y+1)^2$ (3)

Ta co:

(3)$\Rightarrow 3^x=(y-1)^2-1=y(y+2).3^x$ la so le $\Rightarrow y;(y+2)$ la hai so le lien tiep $\Rightarrow (y;y+2)=1\Rightarrow y;y+2$ la cac luy thöa cua 3, nen:

$$\begin{cases}y=3^m(*)\\y+2=3^n(**)\end{cases}(m+n=x)\Rightarrow 3^m+2=3^n\Rightarrow m<n$$

- Vôi: $m=0;\Rightarrow n=1\Rightarrow y=1;x=1.$
- Vôi: $m\geq 1;\Rightarrow n>1$ Töø $(*);(**)\Rightarrow\begin{cases}y\vdots 3\\(y+2)\vdots 3\end{cases}\Rightarrow (y;(y+2))\neq 1$ (vo lí)

Phöông trình co nghiem nguyen: $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$

❈ - **<u>PHÖÔNG PHAP 4</u>**: Phöông phap sö dung bat ñang thöùc

✪ Phöông phap: Phöông phap nay thöôøng sö dung vôi cac phöông trình ma hai ve la nhöõng ña thöùc co tính bien thien khac nhau.

- Ap dung cac bat ñang thöùc thöôøng gap:

*Bat ñang thöùc Co – si:

Cho n so khong am: $a_1;a_2;a_3;......;a_n$. Khi ño:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+......+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1.a_2.a_3.......a_n}$$. Dau "=" xay ra $\Leftrightarrow a_1=a_2=a_3=......=a_n$

* Bat ñang thöùc Bunhiacopxki:

Cho 2n so thöïc: $a_1;a_2;a_3;......;a_n$ va $b_1;b_2;b_3;......;b_n$. Khi ño:

$$\left(a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3+....+a_n.b_n\right)^2 \le \left(a_1.+a_2.+a_3+....+a_n\right)\left(b_1+b_2.+b_3+....+b_n\right).$$

Dau "=" xay ra $\Leftrightarrow a_i = kb_i\left(i=\overline{1;n}\right)$.

*Bat ñang thöcgia trò tuyet ñoi:

$$|a|+|b|=\left[\begin{array}{l}|a+b| \Leftrightarrow a.b\ge 0\\ |a-b| \Leftrightarrow a.b<0\end{array}\right.$$

❀ **Cac ví du minh hoa**:

<u>Ví du 1</u>: Tìm $x;y\in Z^+$ thoa: $\dfrac{x.y}{z}+\dfrac{y.z}{x}+\dfrac{z.x}{y}=3$ (1)

Ap dung BÑT Co – si. Ta co: $3=\dfrac{x.y}{z}+\dfrac{y.z}{x}+\dfrac{z.x}{y}\ge 3.\sqrt[3]{\dfrac{x.y}{z}.\dfrac{y.z}{x}.\dfrac{z.x}{y}}=3.\sqrt[3]{x.y.z}$.

$\Rightarrow \sqrt[3]{x.y.z}\le 1 \Leftrightarrow x.y.z\le 1 \Rightarrow x=y=z=1$

Vay nghiem cua phöông trình la: $x=y=z=1$

<u>Ví du 2</u>: Tìm nghiem nguyen cua phöông trình: $(x+y+1)^2=3\left(x^2+y^2+1\right)$ (2)

(Toan Tuoi thô 2)

Theo Bunhiacopxki,ta co:

$(x+y+1)^2\le\left(1^2+1^2+1^2\right)\left(x^2+y^2+1\right)=3\left(x^2+y^2+1\right)$

Dau "=" xay ra $\Leftrightarrow \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{1}{1}\Rightarrow x=y=1$

Vay nghiem cua phöông trình la: $x=y=1$

<u>Ví du 3</u>: Tìm tat ca cac so nguyen x thoa man:

$$|x-3|+|x-10|+|x+101|+|x+990|+|x+1000|=2004 \quad (3)$$

◆ Nhan xet – Tìm höông giai:

Ta nhan thay: 2104 = 3 + 10 + 101 + 990 + 1000 =101 + 2003 va $|a|=|-a|$

Ta co:(3)$\Rightarrow |3-x|+|10-x|+|x+101|+|x+990|+|x+1000|=2004$.

Ma $|a| \ge a \Rightarrow \begin{cases} |3-x| \ge 3-x \\ |10-x| \ge 10-x \\ |x+101| \ge x+101 \\ |x+990| \ge x+990 \\ |x+1000| \ge x+1000 \end{cases} \Rightarrow 2004 \ge |x+101| + 2003 \Rightarrow |x+101| \le 1$

Do ño: $-1 \le (x+101) \le 1 \Rightarrow (x+101) \in \{-1;0;1\} \Rightarrow x \in \{-102;-101;-100\}$.

Vôi $x=-101 \Rightarrow 2004 = 2003$ (vo lí). Vay nghiem cua phöông trình la: $x \in \{-102;-100\}$

1) T×m c¸c sè nguyªn x,y,z tho¶ m·n: $x^2+y^2+z^2 \le xy+3y+2z-3$

V× x,y,z lµ c¸c sè nguyªn nªn

$x^2+y^2+z^2 \le xy+3y+2z-3$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-xy-3y-2z+3 \le 0 \Leftrightarrow \left(x^2-xy+\dfrac{y^2}{4}\right)+\left(\dfrac{3y^2}{4}-3y+3\right)+\left(z^2-2z+1\right) \le 0$

$\Leftrightarrow \left(x-\dfrac{y}{2}\right)^2+3\left(\dfrac{y}{2}-1\right)^2+(z-1)^2 \le 0$ (*) Mµ $\left(x-\dfrac{y}{2}\right)^2+3\left(\dfrac{y}{2}-1\right)^2+(z-1)^2 \ge 0 \quad \forall x,y \in R$

$\Rightarrow \left(x-\dfrac{y}{2}\right)^2+3\left(\dfrac{y}{2}-1\right)^2+(z-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-\dfrac{y}{2}=0 \\ \dfrac{y}{2}-1=0 \\ z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$ C¸c sè x,y,z ph¶i t×m lµ $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$

<u>PHÖÔNG PHAP 5</u>: Phöông phap löïa chon

Phöông phap: Phöông phap nay ñöôïc söû dung vôi cac phöông trình ma ta co the nham (phat hien de dang) ñöôïc mot vai gia trò nghiem

- Tren cô sô cac gia trò nghiem ña biet. Ap dung cac tính chat nhö chia het; so dö; so chính phöông; chö so tan cung ….. ta chöùng to rang vôi cac gia trò khac phöông trình vo nghiem

Cac ví du minh hoa:

<u>Ví du 1</u>: Tìm $x;y \in Z^+$ thoa man: $x^6+3x^3+1=y^4$

◆ Nhan xet – Tìm höông giai:

Ta thay vôi $x = 0; y = \pm 1$ thì phöông trình ñöôc nghiem ñung. Ta can chöng minh phöông trình vo nghiem vôi $x \neq 0$

+ Vôi $x = 0; y = \pm 1$ thì phöông trình ñöôc nghiem ñung

+ Vôi $x > 0$. Khi ño:

$x^6 + 2x^3 + 1 < x^6 + 3x^3 + 1 < x^6 + 4x^3 + 4 \Rightarrow \left(x^3 + 1\right)^2 < y^4 < \left(x^3 + 2\right)^2$ (*)

Vì $\left(x^3 + 1\right); \left(x^3 + 2\right)$ la hai so nguyen lien tiep nen khong co gia trò nao cua y thoa (*)

Vay $x = 0; y = \pm 1$ la nghiem cua phöông trình.

Ví du 2: Tìm $x; y \in Z^+$ thoa: $x^2 + x - 1 = 3^{2y+1}$ (2)

(Tap chí Toan hoc va tuoi tre)

Goi b la chö so tan cung cua x (Vôi $b \in \{0;1;2;...;9\}$. Khi ño: $\left(x^2 + x - 1\right)$ co chö so tan cung la: 1, 5 hoac 9. (*)

Mat khac: 3^{2y+1} la luy thöa bac le cua 3 nen co tan cung la 3 hoac 7. (**)

Tö (*) va (**) suy ra phöông trình vo nghiem.

Ví du 3: Tìm $x; y \in Z^+$ thoa man: $x^2 - 6xy + 13y^2 = 100$ (3)

(3) $\Rightarrow (x - 3)^2 = 4\left(25 - y^2\right) \Rightarrow \begin{cases} |y| \le 5 \\ \left(25 - y^2\right) = n^2 \,(n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

Do ño: $y \in \{-5; -4; -3; 0; 3; 4; 5\} \Rightarrow x \in \{3; 9; 11; 13\}$

Phöông trình co nghiem nguyen: $(x; y) \in \{(-5;3); (-4;9); (-3;11); (0;13); (3;11); (4;9); (5;3)\}$

PHÖÔNG PHAP 6: Phöông phap lui vo han (xuong thang)

Phöông phap: Phöông phap nay thöông sö dung vôi nhöng phöông trình co (n – 1) an ma he so co öôc chung khac 1

- Döa vao tính chat chia het ta bieu dien an theo an phu nham “ha” (giam bôt) hang so tö do, ñe co ñöôc phöông trình ñôn gian hôn.

- Sö dung linh hoat cac phöông phap ñe giai phöông trình ño.

Cac ví du minh hoa:

Ví du 1: Giai phöông trình: $x^3-3y^3-9z^3=0$ (1)

◆ Nhan xet – Tìm höông giai:

Ta thay $x^3-3y^3-9z^3=0 \Rightarrow \left(x^3-3y^3-9z^3\right)\vdots 3$ ma $\left(-3y^3-9z^3\right)\vdots 3$ nen $x^3 \vdots 3$

Ta co: (1) $\Rightarrow \left(x^3-3y^3-9z^3\right)\vdots 3 \Rightarrow x^3\vdots 3 \Rightarrow x\vdots 3 \Rightarrow x=3x_1$

Khi ño: (1) $\Rightarrow \left(27x_1^3-3y^3-9z^3\right)\vdots 3 \Rightarrow \left(9x_1^3-y^3-3z^3\right)\vdots 3 \Rightarrow y^3\vdots 3 \Rightarrow y\vdots 3 \Rightarrow y=3y_1$.

$\Rightarrow \left(9x_1^3-27y_1^3-3z^3\right)\vdots 3 \Rightarrow z^3\vdots 3 \Rightarrow z\vdots 3 \Rightarrow y=3z_1$.

* Tiep tuc sö bieu dien tren va neu goi $x_0;y_0;z_0$ la nghiem cua (1) va thì $3\in U_{(x_0;y_0;z_0)}$ va $0\le x_0;y_0;z_0\le 9$. Thöc hien thö chon ta ñöôc: $x_0=y_0=z_0=0$

Vay nghiem cua phöông trình la: $x_0=y_0=z_0=0$

c ¸ c bµi tËp KH ¸ C

1/Dïng ®Þnh nghÜa

1) Cho abc = 1 vµ $a^3>36$. . Chøng minh r»ng $\frac{a^2}{3}+$ b^2+c^2> ab+bc+ac

Gi¶i

Ta cã hiÖu:

$\frac{a^2}{3}+$ b^2+c^2- ab- bc $-$ ac $=\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{12}+$ b^2+c^2- ab- bc $-$ ac

$=$ ($\frac{a^2}{4}+$ b^2+c^2- ab $-$ ac+ 2bc) $+\frac{a^2}{12}-3$bc $=(\frac{a}{2}$-b- c)^2 $+\frac{a^3-36abc}{12a}$

$=(\frac{a}{2}$-b- c)^2 $+\frac{a^3-36abc}{12a}>0$ (v× abc=1 vµ a^3 > 36 nªn a >0)

VËy : $\frac{a^2}{3}+$b^2+c^2> ab+bc+ac §iÒu ph¶i chøng minh

2) Chøng minh r»ng

a) $x^4+y^4+z^2+1\ge 2x.(xy^2-x+z+1)$

b) víi mäi sè thùc a , b, c ta cã : $a^2+5b^2-4ab+2a-6b+3>0$

c) $a^2+2b^2-2ab+2a-4b+2\ge 0$

<u>Gi¶i</u> :

a) XÐt hiÖu :

H = $x^4+y^4+z^2+1-2x^2y^2+2x^2-2xz-2x$ = $(x^2-y^2)^2+(x-z)^2+(x-1)^2$

H$\ge$0 ta cã ®iÒu ph¶i chøng minh

b) VÕ tr¸i cã thÓ viÕt

H = $(a-2b+1)^2+(b-1)^2+1$

$\Rightarrow$ H > 0 ta cã ®iÒu ph¶i chøng minh

c) vÕ tr¸i cã thÓ viÕt

H = $(a-b+1)^2+(b-1)^2$

$\Rightarrow$ H $\ge$ 0 ta cã ®iÒu ph¶i chøng minh

<u>Ii / Dùng biến đổi tương đương</u>

1) Cho x > y vµ xy =1 .Chøng minh r»ng : $\frac{(x^2+y^2)^2}{(x-y)^2}\ge 8$

<u>Gi¶i</u> :

Ta cã $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy=(x-y)^2+2$ (v× xy = 1)

$\Rightarrow$ $(x^2+y^2)^2=(x-y)^4+4.(x-y)^2+4$

Do đó BĐT cần chứng minh tương đương với

$(x-y)^4+4(x-y)^2+4\ge 8.(x-y)^2 \Leftrightarrow (x-y)^4-4(x-y)^2+4\ge 0 \Leftrightarrow \left[(x-y)^2-2\right]^2\ge 0$

B§T cuèi ®óng nªn ta cã ®iÒu ph¶i chøng minh

2) Cho xy $\ge$ 1 .Chøng minh r»ng : $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}\ge\frac{2}{1+xy}$

<u>Gi¶i</u> :

Ta cã $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}\ge\frac{2}{1+xy} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+y^2}\right)+\left(\frac{1}{1+y^2}-\frac{1}{1+xy}\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow \frac{xy-x^2}{(1+x^2).(1+xy)}+\frac{xy-y^2}{(1+y^2).(1+xy)}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{x(y-x)}{(1+x^2).(1+xy)}+\frac{y(x-y)}{(1+y^2).(1+xy)}\ge 0$

$\Leftrightarrow \frac{(y-x)^2(xy-1)}{(1+x^2).(1+y^2).(1+xy)}\ge 0$

B§T cuèi nµy ®óng do xy > 1 .VËy ta cã ®iÒu ph¶i chøng minh

<u>Iii / dïng bÊt ®¼ng thøc phô</u>

1) Cho a , b, c lµ c¸c sè thùc vµ a + b +c =1

Chøng minh r»ng $a^2+b^2+c^2\ge\frac{1}{3}$

<u>Gi¶i</u> :

¸p dông B§T BunhiaC«pski cho 3 sè (1,1,1) vµ (a,b,c)

Ta cã $(1.a+1.b+1.c)^2\le(1+1+1).(a^2+b^2+c^2)$

$\Leftrightarrow (a+b+c)^2\le 3.(a^2+b^2+c^2)$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\ge\frac{1}{3}$ (v× a+b+c =1) (®pcm)

2) Cho a,b,c là các số dương

Chøng minh r»ng $(a+b+c).\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9$ (1)

<u>Gi¶i</u> :

(1) $\Leftrightarrow 1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{a}+1\ge 9 \Leftrightarrow 3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\ge 9$

¸p dông B§T phô $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge 2$ Víi x,y > 0

Ta cã B§T cuèi cïng lu«n ®óng

VËy $(a+b+c).\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9$ (®pcm)

Iv / dùng phương pháp bắc cầu

1) Cho 0 < a, b,c <1 .Chøng minh r»ng :

$$2a^3+2b^3+2c^3<3+a^2b+b^2c+c^2a$$

Gi¶i :

Do a <1 $\Rightarrow$ a^2<1 vµ b <1 Nªn $(1-a^2).(1-b^2)>0\Rightarrow 1+a^2b-a^2-b>0$

Hay $1+a^2b>a^2+b$ (1)

MÆt kh¸c 0 <a,b <1 $\Rightarrow$ $a^2>a^3$; $b>b^3$ $\Rightarrow$ $1+a^2>a^3+b^3$

VËy $a^3+b^3<1+a^2b$

Tương tự ta có : $b^3+c^3<1+b^2c$

$a^3+c^3<1+c^2a$

$\Rightarrow$ $2a^3+2b^3+2c^3<3+a^2b+b^2c+c^2a$ (®pcm)

2) So s¸nh 31^{11} vµ 17^{14}

Gi¶i :

Ta thÊy 31^{11} < $32^{11}=\left(2^5\right)^{11}=2^{55}<2^{56}$

MÆt kh¸c $2^{56}=2^{4.14}=\left(2^4\right)^{14}=16^{14}<17^{14}$

Vëy 31^{11} < 17^{14} (®pcm)

V/ dïng tÝnh chÊt tØ sè

vÝ dô 4: Cho 4 sè a,b,c,d bÊt kú, chøng minh r»ng:

$$\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}\le\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}$$

Gi¶i: Dïng bÊt ®¼ng thøc Bunhiacopski

ta cã ac + bd $\le$ $\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{c^2+d^2}$

mµ $(a+c)^2+(b+d)^2=a^2+b^2+2(ac+bd)+c^2+d^2\le\left(a^2+b^2\right)+2\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{c^2+d^2}+c^2+d^2$

$$\Rightarrow \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \le \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}$$