BÌNH PHÂN VÀ SAI PHÂN PHÁP TRONG SÁCH HÁN NÔM

Đoàn Thị Lệ, Đại học Thanh Hoa (Đài Loan),
Tạ Duy Phượng, Viện Toán học,
Cung Thị Kim Thành, Phan Thị Ánh Tuyết, Thạc sĩ Hán Nôm

1 Phép bình phân

Các sách toán viết bằng chữ Hán và chữ Nôm (viết gọn: sách toán Hán Nôm) được biết gồm 22 cuốn, hiện được lưu trữ chủ yếu trong thư viện Viện nghiên cứu Hán Nôm, có nội dung chính gồm các bài toán số học, các bài toán đại số và các bài toán hình học.

Phép bình phân (Bình phân pháp) là dạng toán chia đều: Biết tổng số S (tiền), chia cho N (người). Hỏi mỗi người nhận được bao nhiêu. Dạng toán này thường gặp trong thực tế (chia lương, tiền công, phát lương thực cho quân lính, chia thuế,...). Phép bình phân và phép sai phân là dạng toán bắt buộc trong các kì thi toán ngày xưa. Phép bình phân thực chất là phép toán chia đều trong chương trình Tiểu học hoặc lớp 5, lớp 6 Trung học Cơ sở hiện nay. Nhằm giúp bạn đọc có một chút làm quen và hiểu biết về Toán ngày xưa, cũng như cuộc sống và sinh hoạt của Người xưa, phần này giới thiệu Phép bình phân trong bốn cuốn sách toán Hán Nôm tiêu biểu.

1.1 Phép bình phân trong Toán pháp đại thành

Giới thiệu Toán pháp đại thành [5] được coi là do Lương Thế Vinh (1441-1496) biên soạn. Tuy nhiên hiện nay chỉ có hai bản chép tay khoảng năm 1934 và 1944, ngoài bìa ghi "Toán pháp đại thành, Lương Thế Vinh viết". Dưới đây là một số bài trong dạng toán Phép bình phân trong Toán pháp đại thành.

Bài 1.1. Hữu quan tiền cửu thập quán nhị mạch nhị thập tứ văn, phân dữ nhân số tam thập lục nhân. Vấn mỗi nhân hoạch tiền can?

Dịch Có số tiền là 90 quán 2 mạch 24 văn, chia cho 36 người. Hỏi mỗi người nhận bao nhiêu?

Giải. Đổi đơn vị: 90 quán 2 mạch 24 văn=90×600+2×60+24=54144 văn.

Số tiền mỗi người nhận được là: 54144:36=1504 văn.

Đơn vị tiền cổ theo thứ tự từ trên xuống: 1 quán=10 mạch=600 tiền (văn); 1 mạch = 60 tiền (văn); 1 văn (1 tiền) = 10 phân; 1 phân = 10 li; 1 li = 10 hào; 1 hào = 10 hốt; 1 hốt = 10 mạt.

Ngoài ra: 1 hốt=10 lượng (lạng), 1 lạng = 10 tiền; 1 tiền =10 phân, 1 phân=10 li, ...

Lưu ý: Để dễ đọc, chúng tôi chỉ viết lời dịch các đề bài. Bình phân pháp là dạng toán dễ, nên trong phần lớn chúng tôi chỉ ghi đáp số, mà không trình bày bài giải chi tiết.

Bài 1.2. Có số tiền là 72 quán 4 mạch 48 văn, chia cho 48 người. Hỏi mỗi người được bao nhiêu tiền? Đáp số: 906 văn.

Bài 1.3. Nay có số tiền là 95 quán 5 mạch 30 văn, chia cho đội quân 112 người. Hỏi mỗi người nhận được bao nhiêu?

Đáp số: 511 văn, dư 98 văn.

Bài 1.4. Nay có số tiền là 503 quán 7 mạch, chia cho quân lính 345 người. Hỏi mỗi người nhận được bao nhiêu? Đáp số: 876 văn= 1 quán 4 mạch 36 văn.

Bài 1.5. Nay có số tiền là 698 quán 7 mạch 10 văn, chia cho số người là 548 người. Hỏi mỗi người được bao nhiêu?

Đáp số: 765 văn dư 10 văn.

Bài 1.6. Nay có số bạc là 12345 lạng 6 tiền 7 phân 8 li 9 hào, hỏi chia cho 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 người thì mỗi người được bao nhiêu?

Giải. Lấy 12345 lạng 6 tiền 7 phân 8 ly 9 hào=123456789 hào lần lượt chia cho 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 sẽ được đáp số (chính xác đến mạt).

Lời bình: Số bị chia khá lớn: 123456789 (9 chữ số).

Bài 1.7. Có số bạc là 14 hốt 7 lượng 9 tiền, chia cho 85 người. Hỏi mỗi người được bao nhiêu?

Đáp số: 1 lượng 7 tiền 4 phân.

Bài 1.8. Có số vải là 14 xấp 15 xích 2 thốn, chia đều cho 68 người. Hỏi mỗi người được bao nhiêu? Đáp số: 6 xích 4 thốn.

Đơn vị đo chiều dài: 1 xấp=30 xích; 1 xích=10 thốn.

Bài 1.9. Nay có 30 thước vải, giá tiền là 4 quán 7 mạch. Hỏi mỗi thước giá bao nhiêu?

Đáp số: 94 văn=1 mạch 34 văn.

Bài 1.10. Nay có số ruộng là 58 mẫu 3 sào 6 xích, mỗi người nhận được số ruộng là 2 sào 1 xích. Hỏi số người là bao nhiêu?

Giải. 58 mẫu 3 sào 6 xích=8751 xích; 2 sào 1 xích=31 xích. Số người là 8751:31=282 người, còn dư 9 xích vuông. Đơn vị đo diện tích: 1 mẫu=10 sào, 1 sào=360 m2=15 xích vuông; 1 xích (thước) vuông=24 m2.

1.2 Phép bình phân trong Cửu chương lập thành tính pháp

Giới thiệu Cửu chương lập thành tính pháp [3] của Phạm Hữu Chung in (lần đầu) năm 1713. Đây là cuốn sách toán Hán Nôm cổ nhất hiện còn giữ được. Dưới đây là một số bài dạng Phép bình phân trong Cửu chương lập thành tính pháp.

Bài 1.11. Nay có số tiền quan là 119 quán 7 mạch 16 văn, chia đều cho số người là 268 người. Hỏi mỗi người nhận được bao nhiêu?

Đáp số: 268 văn=3 mạch 28 văn, thừa 12 văn.

1.3 Phép bình phân trong Cửu chương toán pháp lập thành

Giới thiệu Cửu chương toán pháp [6] hay Cửu chương toán pháp lập thành, không rõ tác giả, được chép lại vào năm Tự Đức thứ 35 (1882). Dưới đây là một số bài dạng toán Phép bình phân trong Cửu chương toán pháp lập thành.

Bài 1.12. Nay có số tiền là 4 quán. Cứ 7 người nhận 6 văn. Hỏi số người là bao nhiêu?

Đáp số: 2800 người.

Bài 1.13. Nay có số tiền là 100 quán. Mỗi người nhận 6 mạch 40 văn. Hỏi có bao nhiêu người?

Đáp số: 150 người.

Bài 1.14. Nay có số vải là 221 thất 12 xích (mỗi thất 30 xích), chia cho 359 người. Hỏi mỗi người nhậ n được bao nhiêu?

Đáp số: 18 xích 5 thốn, dư 5 thốn.

Bài 1.15. Nay có số lụa là 3989 thất, chia cho số quân nhân là 9535 người. Hỏi mỗi người nhậ n được bao nhiêu? Đáp số: Mỗi người nhậ n 12 xích 5 thốn 5 phân. Thừa 5 xích 7 thốn 5 phân.

Bài 1.16. Nay có số mậ t ong là 86 vò (mỗi vò 21 bát), chia cho số quân nhân là 258 người. Hỏi mỗi người nhậ n được bao nhiêu? Đáp số: 7 bát.

1.4 Phép bình phân trong Bút toán chỉ nam

Giới thiệu

Bút toán chỉ nam [2] của Nguyễn Cẩn là cuốn sách toán Hán Nôm in cuối cùng (năm 1909). Tuy muộn nhất trong số các sách toán Hán Nôm, nhưng Bút toán chỉ nam có nội dung khá đơn giản, lời giải khá chi tiết, ngôn ngữ khá gần với ngôn ngữ hiện đại. Mặc dù viết bằng chữ Hán, Bút toán chỉ nam đã tiếp thu toán học phương Tây và trình bày bốn phép tính (cộng trừ nhân chia) theo phương pháp hiện đại (đặt phép toán nhân hoặc chia theo hàng dọc,...). Dưới đây là một số bài trong dạng toán Phép bình phân (trong Mục Phép chia) của Bút toán chỉ nam.

Bài 1.17. Nay có 37 quyển sách chia cho 9 người. Hỏi mỗi người được mấy quyển?

Đáp số: 4 quyển dư 1 quyển.

Bài 1.18. Nay có tiền là 3 nguyên 6 hào 4 xu (1 nguyên=10 hào, 1 hào=10 xu) mua 28 thoi mực. Hỏi mỗi thoi bao nhiêu tiền?

Đáp số: 1 hào 3 xu.

Bài 1.19. Nay có 183 thước lụa, may 60 cái áo. Hỏi mỗi áo cần bao nhiêu lụa?

Đáp số: 3 thước 5 phân.

Bài 1.20. Nay có một vật nặng 19845 cân. Dùng xe chở, nhưng mỗi xe chỉ chở được 405 cân. Hỏi cần mấy xe?

Đáp số: 49 xe.

Bài 1.21. Nay có đường xe lửa dài ba triệu sáu ức năm vạn không nghìn tám trăm ba mươi hai thước (3650832 m). Từ khi khởi công cho đến khi hoàn thành hết 729 tuần lễ. Hỏi mỗi tuần xây được bao nhiêu m đường?

Đáp số: 5008 m.

2 Bình phân và sai phân pháp trong Ý Trai Toán pháp nhất đắc lục

Giới thiệu Ý Trai Toán pháp nhất đắc lục (Một điều tâm đắc về toán của Ý Trai) được Ý Trai Nguyễn Hữu Thận hoàn thành năm 1829. Đây là cuốn sách toán Hán Nôm (viết tay) dày dặn nhất và có nội dung toán học phong phú nhất trong số các sách toán Hán Nôm. Sách gồm 8 Chương (8 Quyển).

Phép sai phân là dạng toán chia theo tỉ lệ: Biết tổng số S (tiền), chia cho N (người), người thứ i được n_i phần. Hỏi mỗi người được bao nhiêu.

Phần này giới thiệu một số bài toán về Phép bình phân và phép sai phân trong Ý Trai Toán pháp nhất đắc lục. Để dễ đọc, chúng tôi trình bày lời giải dưới ngôn ngữ hiện đại, nhưng vẫn trung thành với lời giải của Nguyễn Hữu Thận với. Sắp xếp các dạng toán là do các tác giả bài viết.

2.1 Dạng toán 2.1. Chia theo tỉ lệ

Bài 2.1. Có số tiền là 17 quán 5 mạch, chia đều cho 36 người. Hỏi mỗi người được bao nhiêu?

Đáp số: 291 văn dư 24 văn.

Bài 2.2. Có số tiền 18 quán 1 mạch 32 văn, chia cho 36 người và một người nhận một nửa phần. Hỏi mỗi người được bao nhiêu?

Giải. Đổi đơn vị: 18 quán 1 mạch 32 văn $= 18 \times 600 + 1 \times 60 + 32 = 10892$ văn (1 quán=1 quan=10 mạch, 1 mạch=60 văn). Gọi x là số tiền (văn) người thứ 37 nhận được.

Mỗi người trong số 36 người nhận $2x$ văn. Theo bài ra ta có: $36 \times 2x + x = 10892 \Rightarrow 73x = 10892 \Rightarrow x = 149$ thừa 15 văn.

Vậy mỗi người nhận được 298 văn, người thứ 37 nhận được 149 văn, thừa 15 văn.

Ghi chú: Các bài toán sai phân trong Ý Trai Toán pháp nhất đắc lục thường chỉ thực hiện phép chia nguyên (để lại phần dư không chia).

Bài 2.3. Có số tiền là 3 quán 1 mạch 15 văn, chia cho 30 người, trong đó có một người nhận được 4 phần 7. Hỏi mỗi người được nhận bao nhiêu?

Giải. Đổi 3 quán 1 mạch 15 văn=1875 văn. Một người nhận $4x$ văn, thì 29 người nhận $7x$ văn. Ta có: $29 \times 7x + 4x = 1875 \Leftrightarrow 207x = 1875 \Leftrightarrow x =$ 9văn dư 12 văn. Vậy mỗi người nhận 63 văn, người cuối cùng nhận 36 văn.

Bài 2.4. Có số tiền 7 quán 2 mạch, chia cho 50 người, trong đó 10 người nhận bằng nửa những người khác. Hỏi mỗi người nhận bao nhiêu?

Giải. 7 quán 2 mạch= 4320 văn. Gọi số tiền của mỗi người nhận một nửa là x. Theo bài ra ta có $40 \times 2x + 10x = 4320 \Leftrightarrow 90x = 4320 \Rightarrow x = 48$.

Đáp số: 40 người mỗi người nhận 96 văn, 10 người mỗi người nhận 48 văn.

Bài 2.5. Số tiền 25 quán 1 mạch 30 văn, chia cho 249 người, trong đó có 17 người nhận bằng 3/7 người khác. Hỏi mỗi người nhận bao nhiêu?

Giải. Đổi 25 quán 1 mạch 30 văn= 15090 văn. Gọi số tiền của mỗi người nhận đủ là $7x$. Số tiền những người còn lại nhận $3x$. Ta có $232 \times 7x + 17 \times 3x = 15090 \Rightarrow x = 9$ dư 15 văn.

Vậy mỗi người nhận $7 \times 9 = 63$ văn. 17 người mỗi người nhận được 27 văn, dư 15 văn.

Bài 2.6. Có số tiền 75 quán, chia cho 239 người, trong đó có 5 người nhận 7/9 người khác. Hỏi mỗi người nhận được bao nhiêu?

Giải. 75 quán=45000 văn. Gọi $7x$ là số tiền mỗi người trong 5 người nhận được. Khi ấy mỗi người trong 234 người nhận được $9x$. Ta có: $234 \times 9x + 5 \times 7x = 45000 \Rightarrow x =$ 21dư 39 văn. Vậy mỗi người trong số 234 người nhận 189 văn, mỗi người trong số 5 người nhận 147 văn.

2.2 Dạng toán 2.2. Chia theo tỉ lệ cấp số cộng

Tuy chưa sử dụng khái niệm và thuật ngữ cấp số cộng, nhưng các bài toán trong Ý Trai toán pháp nhất đắc lục dưới đây thực chất là các bài toán về chia theo tỉ lệ cấp số cộng.

Bài 2.7. Có số tiền 176 lượng, chia cho 8 người, từ trên xuống dưới, muốn mỗi người chênh nhau 4 lượng. Hỏi mỗi người được bao nhiêu?

Giải. Gọi số tiền người nhận được ít nhất là x. Những người tiếp theo sẽ nhận được là $x + 4n$, $n = 1, 2, \ldots, 7$. Tổng số tiền là: $x + (x+4) + \ldots + (x+28) = 8x + 112 = 176$. $\Rightarrow x = 8$ lượng. Mỗi người nhận được tương ứng là 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36 lượng.

Bài 2.8. Có một thiên sách, cộng lại được 3900 chữ, một người chép 12 ngày thì xong. Người đó viết được mỗi ngày chênh nhau 30 chữ. Hỏi mỗi ngày, người đó viết được bao nhiêu chữ?

Giải. Gọi số chữ ngày đầu tiên chép là x. Những ngày tiếp theo ($n = 1, 2, \ldots, 11$) sẽ chép được $x + 30n$ chữ. Tổng số chữ chép được sau 12 ngày là: $x + (x+30) + \ldots + (x + 11 \times 30)$

$= 12x + 1980 = 3900 \Rightarrow x = 160$ chữ. Hàng ngày người đó chép được: 160, 190, 220, 250, 280, 310, 340, 370, 400, 430, 460, 490 chữ.

Bài 2.9. Có số tiền 295 lạng, chia cho 10 người, biết người thứ nhất được 43 lạng, người thứ mười được 16 lạng. Hỏi từ người thứ hai đến người thứ chín, mỗi người được bao nhiêu?

Giải. Đây chính là bài toán cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 43$, số hạng thứ mười $u_{10} = 16$. Ta có $u_{10} = u_1 + 9d$. Suy ra $d = -3$. Vậy $u_1 = 43,\ u_2 = 40, \ldots,\ u_{10} = 16$.

Bài 2.10. Có số tiền 2 quán 5 mạch, chia cho 5 nhóm. Nhóm Giáp 9 người, mỗi người nhận nhiều hơn mỗi người của nhóm Bính 8 văn; nhóm Ất 11 người, mỗi người nhận nhiều hơn mỗi người của nhóm Bính 4 văn; nhóm Bính 13 người, chia đều nhau; nhóm Đinh 15 người, mỗi người nhận ít hơn mỗi người của nhóm Bính 4 văn; nhóm Mậu 17 người, mỗi người ít hơn mỗi người của nhóm Bính 8 văn. Hỏi mỗi nhóm được bao nhiêu?

Giải. Đổi đơn vị: 2 quán 5 mạch $= 1500$ văn. Gọi x là số tiền (văn) mỗi người nhóm Bính được nhận. Khi ấy mỗi người nhóm Giáp nhận $x + 8$văn; mỗi người nhóm Ất nhận $x + 4$ văn; mỗi người nhóm Đinh nhận $x - 4$văn; mỗi người nhóm Mậu nhận $x - 8$ văn. Ta có: $9\,(x + 8) + 11\,(x + 4) + 13x + 15\,(x4) + 17\,(x8) = 1500 \Leftrightarrow 65x80 = 1500 \Leftrightarrow x = 24$ dư 20 văn.

Đáp số: Nhóm Bính nhận 312 văn; Nhóm Giáp nhận $9 \times (24 + 8) = 288$ văn; Nhóm Ất nhận được 308 văn; Nhóm Đinh nhận 300 văn; Nhóm Mậu nhận 272 văn.

Bài 2.11. Có số tiền 768 đĩnh bạc, chia đều cho hai nhóm gồm 12 người, nhóm Thượng 4 người, nhóm Hạ 8 người. Hỏi mỗi người được bao nhiêu, biết mỗi người chênh nhau cùng số tiền.

Giải. Vì chia đều số tiền cho hai nhóm nên mỗi nhóm nhận được 384 đĩnh bạc. Gọi số tiền người nhận được ít nhất là x, và số tiền chênh lệch là t. Những người tiếp theo sẽ nhận được là $x + nt,\ n = 1, 2, \ldots, 11$. Tổng số tiền nhóm Hạ là: $x + (x + t) + ... + (x + 7t) = 8x + 28t$.

Tổng số tiền nhóm Thượng nhận được là:

$(x + 8t) + (x + 9t) + (x + 10t) + (x + 11t) = 4x + 38t$. Theo bài ra ta có hệ phương trình $\begin{cases} 8x + 28t = 384 \\ 4x + 38t = 384 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 7t = 96 \\ 2x + 19t = 192 \end{cases} \Leftrightarrow t = 8, x = 20$. Vậy số tiền mỗi người nhận được lần lượt là: 20, 28, 36, 44, 52, 60, 68, 76, 84, 92, 100 (đĩnh).

2.3 Dạng toán 2.3. Chia theo tỉ lệ cấp số nhân

Bài 2.12. Có số tiền 14 quán, chia cho 6 nhóm, chỉ biết hai nhóm Giáp, Ất bằng nhau, Bính, Đinh bằng một nửa Giáp, Ất; Mậu, Kỉ lại bằng một nửa Bính, Đinh. Hỏi mỗi nhóm nhận được bao nhiêu tiền?

Giải. Gọi số tiền của nhóm Mậu, Kỉ là x, thì số tiền của nhóm Bính, Đinh bằng $2x$, số tiền của Giáp, Ất là $4x$. Ta có $2 \times 4x + 2 \times 2x + 2x = 14$ quán. Vậy $x = 1$ quán.

Giáp, Ất mỗi nhóm nhận được 4 quán; Bính, Đinh mỗi nhóm 2 quán; Mậu, Kỉ mỗi nhóm 1 quán.

Bài 2.13. Có số tiền 33 quán 3 mạch, chia cho bốn nhóm, Giáp 18 người, Ất 28 người, Bính 48 người, Đinh 64 người, nếu từ trên xuống dưới, "chiết bán" (giảm một nửa) cho họ, hỏi mỗi nhóm được bao nhiêu tiền?

Giải. Đổi đơn vị: 33 quán 3 mạch = 19980 văn. Từ trên xuống dưới,"chiết bán" có nghĩa là nhóm Đinh 1 phần, nhóm Bính 2 phần, nhóm Ất 4 phần, nhóm Giáp 8 phần. Tổng số phần là: $18 \times 8 + 28 \times 4 + 48 \times 2 + 64 \times 1 = 416$ phần.

Số tiền mỗi phần là: 19980: 416 = 48 dư 12 văn

Đáp số: Mỗi người nhóm Giáp nhận 384 văn, số tiền cả nhóm Giáp nhận là 6912 văn; mỗi người nhóm Ất nhận 192 văn, cả nhóm Ất nhận 5376 văn; mỗi người nhóm Bính nhận 96 văn, cả nhóm Bính nhận 4608 văn; mỗi người nhóm Đinh nhận 48 văn, cả nhóm Đinh nhận 3072 văn.

Bài 2.14. Có số tiền là 20 quán 7 mạch, chia cho 4 nhóm, nhóm Giáp 3 người, nhóm Ất 4 người, nhóm Bính 5 người, nhóm Đinh 6 người. Dùng phép sai phân 5–1 lần lượt chia cho họ. Hỏi mỗi người, mỗi nhóm được bao nhiêu?

Giải. Đổi đơn vị: 20 quán 7 mạch = 12420 văn. Phép sai phân 5–1 nghĩa là chia theo tỉ lệ: Đinh: Bính: Ất: Giáp=1:5:25:125 phần. Nhóm Đinh chiếm 6 phần; nhóm Bính chiếm $5 \times 5 =$ 25 phần; nhóm Ất chiếm $4 \times 25 = 100$ phần; nhóm Giáp chiếm $3 \times 125 = 375$ phần. Tổng cộng: $6 + 25 + 100 + 375 = 506$ phần.

Một phần là $12420 : 506 = 24$ văn dư 276 văn. Vậy mỗi người nhóm Đinh nhận 24 văn, cả nhóm nhận 144 văn; mỗi người nhóm Bính nhận 120 văn, cả nhóm nhận 600 văn; mỗi người nhóm Ất nhận 600 văn, cả nhóm nhận 2400 văn; mỗi người nhóm Giáp nhận 3000 văn, cả nhóm nhận 9000 văn.

2.4 Dạng toán 2.4. Toán tổng hợp về chia tỉ lệ

Bài 2.15. Có số tiền là 1 quán 1 mạch 30 văn, chia cho 3 nhóm, Giáp 7 người, mỗi người nhận nhiều hơn mỗi người nhóm Ất 8 văn; Ất 8 người, mỗi người nhận nhiều hơn mỗi người nhóm Bính 7 văn; Bính 9 người, nhận bằng nhau. Hỏi mỗi nhóm nhận được bao nhiêu?

Giải. Đổi đơn vị: 1 quán 1 mạch 30 văn=690 văn. Gọi x là số tiền mỗi người nhóm Bính nhận được. Nhóm Bính nhận $9x$ văn; nhóm Ất nhận $8\,(x+7)$ văn; nhóm Giáp nhận $7\,(x+15)$ văn. Tổng số tiền của ba nhóm là: $7\,(x+15) + 8\,(x+7) + 9x = 690 \Leftrightarrow x = 22$ dư 1 văn. Vậy mỗi người nhóm Bính nhận 22 văn, cả nhóm nhận 198 văn; mỗi người nhóm Ất nhận 29 văn, cả nhóm nhận 232 văn; mỗi người nhóm Giáp nhận 37 văn, cả nhóm nhận 259 văn.

Bài 2.16. Có số tiền 7 mạch, chia cho ba nhóm. Nhóm Giáp 8 người, nhận bằng nhau; nhóm Ất 10 người, mỗi người nhận ít hơn mỗi người nhóm Giáp 6 văn; nhóm Bính 12 người mỗi

người nhận ít hơn mỗi người nhóm Ất 4 văn. Hỏi mỗi nhóm nhận được bao nhiêu?

Giải. Đổi đơn vị: 7 mạch=420 văn. Gọi x là số tiền mỗi người nhóm Bính nhận. Mỗi người nhóm Ất nhận $x+4$ văn; mỗi người nhóm Giáp nhận $x+4+6=x+10$ văn. Ba nhóm nhận: $12x+10\,(x+4)+\,8\,(x+10)=420\Leftrightarrow x=10$.

Đáp số: Nhóm Bính nhận 120 văn; nhóm Ất nhận 140 văn; nhóm Giáp nhận 160 văn.

Bài 2.17. Có số tiền là 31 quán 3 mạch, chia cho 4 nhóm. Nhóm Giáp 22 người, mỗi người nhận một phần; nhóm Ất 33 người, mỗi người nhận ít hơn mỗi người của nhóm Giáp 25 văn; nhóm Bính 44 người, mỗi người nhận ít hơn mỗi người của nhóm Ất 15 văn; nhóm Đinh 55 người, nhận 3/4 phần. Hỏi mỗi người, mỗi nhóm nhận được bao nhiêu?

Giải. Đổi đơn vị: 31 quán 3 mạch= 18780 văn. Gọi số tiền mỗi người nhóm Giáp nhận đươc là x, khi đó mỗi người nhóm Ất nhận được $x-25$ văn; mỗi người nhóm Bính nhận được $x-40$ văn; mỗi người nhóm Đinh nhận được là $\frac{3}{4}x$. Tổng số tiền của cả bốn nhóm là $22x+33\,(x-25)+44\,(x40)+55\times\frac{3}{4}x=18780\;\Leftrightarrow 561x=854690\;\Leftrightarrow x=152$ văn dư 122 văn.

Đáp số: Mỗi người nhóm Giáp nhận được 152 văn, tổng tiền cả nhóm nhận là 3344 văn; mỗi người nhóm Ất nhận $152-25=127$ văn, cả nhóm nhận 4191 văn; mỗi người nhóm Bính nhận $127-15=112$ văn, tổng tiền nhóm Bính nhận là 4928 văn; mỗi người trong nhóm Đinh nhận 114 văn, tổng tiền nhóm Đinh nhận là 6270 văn.

Bài 2.18. Có số tiền 77 quán 1 mạch, chia cho ba nhóm. Nhóm Giáp 72 người, mỗi người nhận nhiều hơn mỗi người nhóm Ất 50 văn; nhóm Ất 73 người, mỗi người nhận nhiều hơn mỗi người nhóm Bính 30 văn; nhóm Bính 74 người, trong đó có 4 người nhận được 5/8 phần. Hỏi mỗi nhóm nhận đươc bao nhiêu?

Giải. Đổi đơn vị: 77 quán 1 mạch $=46260$ văn. Gọi số tiền mỗi người trong nhóm Bính nhận được là x văn. Vậy có 70 người nhận được số tiền là x, còn 4 người nhận đươc số tiền là $\frac{5}{8}x$. Mỗi người nhóm Ất nhận là $x+30$; mỗi người nhóm Giáp nhận là $x+30+50=x+80$ văn. Tổng số tiền của ba nhóm là

$\left(70x+4\times\frac{5}{8}x\right)+73\,(x+30)+72\,(x+80)=46260\Leftrightarrow 435x=76620\Leftrightarrow x=176$ văn thừa 30 văn.

Đáp số: Nhóm Bính nhận được 12760 văn; nhóm Ất nhận được 15038 văn; nhóm Giáp nhận được 18432 văn.

Bài 2.19. Có số tiền 118 quán 1 mạch, chia ba nhóm người. Giáp 46 người, mỗi người nhận 9 phần, Ất 56 người, mỗi người nhận 8 phần, Bính 66 người, có 60 người nhận 7 phần, 6 người nhận bằng 5/7 phần những người khác. Hỏi mỗi nhóm nhận được bao nhiêu?

Giải. 118 quán 1 mạch = 70860 văn. Gọi x là số tiền một phần nhận được. Ta có: $46\times 9x+56\times 8x+60\times 7x+6\times 5x=70860\Leftrightarrow x=54$dư 12 văn.

Đáp số: Số tiền mỗi người nhóm Giáp nhận là 486 văn, tổng tiền nhóm Giáp nhận là 22356 văn; số tiền mỗi người nhóm Ất nhận là 432 văn, tổng tiền nhóm Ất nhận là 24192

văn; số tiền mỗi người trong số 6 người của nhóm Bính nhận là 270 văn; tổng tiền sáu người này nhận là 1620 văn. Số tiền mỗi người trong số 60 người của nhóm Bính (nhận đủ) là 378 văn; tổng tiền 60 người này nhận là 22680 văn.

Bài 2.20. Có số tiền 9 quán 3 mạch, chia cho năm nhóm. Nhóm Giáp 4 người, nhóm Ất 5 người, Bính 6 người, Đinh 7 người, Mậu 8 người, dựa vào phép sai phân 6–4, lần lượt chia cho họ. Hỏi mỗi người, mỗi nhóm được bao nhiêu?

Giải. Đổi đơn vị: 9 quán 3 mạch = 5580 văn. Vì tỉ lệ là 6:4=3:2 và có 5 nhóm nên coi mỗi người nhóm Mậu nhận 16 phần (Giáp:Ất:Bính:Đinh:Mậu=6:4=3:2 nên qui đồng mẫu số là 16). Vì Mậu:Đinh=4:6 nên nếu một người nhóm Mậu nhận 16 phần thì một người nhóm Đinh nhận 24 phần. Lập luận tiếp, ta đi đến, mỗi người các nhóm nhận theo tỉ số: Mậu: Đinh: Bính: Ất: Giáp=16:24:36:54:81.

Vì Giáp 4 người, Ất 5 người, Bính 6 người, Đinh 7 người, Mậu 8 người nên tổng số phần là: $8 \times 16 + 7 \times 24 + 6 \times 36 + 5 \times 54 + 4 \times 81 = 1106$. Vì số tiền là 5580 văn nên một phần là: $5580 : 1106 = 5$ dư 50 văn. Vậy mỗi người nhóm Mậu nhận 80 văn, cả nhóm nhận 640 văn; mỗi người nhóm Đinh nhận 120 văn, cả nhóm nhận 840 văn; Mỗi người nhóm Bính nhận 180 văn, cả nhóm nhận 1080 văn; mỗi người nhóm Ất nhận 270 văn, cả nhóm nhận 1350 văn; mỗi người nhóm Giáp nhận 405 văn, cả nhóm nhận 1620 văn.

Bài 2.21. Có số tiền 153 quán 2 mạch, chia cho 5 nhóm, Giáp 2 người, Ất 3 người, Bính 4 người, Đinh 5 người, Mậu 6 người. Lần lượt chia cho họ theo tỉ lệ 5/7, hỏi mỗi nhóm được bao nhiêu?

Giải. Đổi đơn vị: 153 quán 2 mạch= 91920văn. Để thuận tiện cho tính toán (tránh phân số), có 5 nhóm nên ta chọn số phần của nhóm Giáp là $7 \times 7 \times 7 \times 7 = 2401$ phần$\times$ 2 người= 4802 phần.

Số phần của nhóm Ất là: $2410 \times 5 : 7 = 1715$phần $\times$3 người=5145 phần.

Số phần của nhóm Bính là: $1715 \times 5 : 7 = 1225$phần $\times$4 người=4900 phần.

Số phần của nhóm Đinh là: $1225 \times 5 : 7 = 875$phần $\times$5 người=4375 phần.

Số phần của Mậu là: $875 \times 5 : 7 = 625$phần $\times$6 người=3750 phần.

Tổng số phần các nhóm cộng lại là: $4802 + 5145 + 4900 + 4375 + 3750 = 22972$ phần.

Vậy số tiền mỗi phần là: $91920 : 22972 = 4$ văn dư 32 văn.

Tổng số tiền của nhóm Giáp là 19208 văn; nhóm Ất là 20580; nhóm Bính là 19600 văn; nhóm Đinh là 17500 văn; nhóm Mậu là 15000 văn.

Bài 2.22. Có số tiền 94 quán 4 mạch, chia cho ba nhóm. Giáp 12 người mỗi người nhận 8 phần rưỡi, Ất 18 người mỗi người nhận 7 phần rưỡi, Bính 24 người mỗi nhận 6 phần rưỡi. Hỏi mỗi nhóm nhận được bao nhiêu?

Giải. 94 quán 4 mạch=56640 văn. Gọi một phần tiền là x.Theo bài ra ta có: $12 \times 8,5x + 18 \times 7,5x + 24 \times 6,5x = 56640$ văn. Suy ra $x = 56640 : 393 = 144$ văn thừa 48 văn.

Đáp số: Nhóm Giáp nhận 14688 văn, nhóm Ất nhận 19440 văn, nhóm Bính nhận 22464 văn.

Bài 2.23. Có số tiền 204 quán 1 mạch 30 văn chia cho 345 người, trong đó hạng ưu 12 người, mỗi người nhận gấp rưỡi; hạng thứ 19 người, mỗi người nhận 7/8 phần; hạng thứ thứ 16 người, mỗi người nhận 6/8 phần; hạng liệt 9 người, mỗi người nhận nửa phần. Hỏi mỗi người nhận được bao nhiêu?

Giải. Đổi đơn vị: 204 quán 1 mạch 30 văn $=$ 122490 văn. Số người còn lại (nhận toàn phần) là: $345-(12+19+16+9)=289$ người.

Gọi số tiền một phần là $8x$. Số tiền một người hạng ưu nhận là $12x$. Theo bài ra ta có: $(12\times 12+19\times 7+16\times 6+9\times 4+289\times 8)\,x=122490\Rightarrow x=122490:2721=45$ văn dư 45 văn.

Số tiền một phần là: $45\times 8\ =360$ văn. Vậy mỗi người còn lại (trong số 289 người) nhận 360 văn; mỗi người hạng liệt nhận 180 văn; mỗi người hạng thứ thứ nhận 270 văn; mỗi người hạng thứ nhận 315 văn; mỗi người hạng ưu nhận 540 văn;

3 Kết luận

Dạng toán bình phân và sai phân có nhiều trong sách toán cổ của Trung Hoa và Việt Nam. Vì các bài toán bình phân và sai phân gặp nhiều trong thực tế, nên cũng là dạng toán quan trong trong nội dung thi toán ngày xưa.

Phép bình phân là dạng toán đơn giản nhất, ai cũng làm được, nhất là với sự hỗ trợ của máy tính.

Phần I bài viết trình bày 27 bài toán dạng toán Bình phân pháp (phép chia đều), được chọn từ 4 cuốn sách từ cuối thế kỉ XV đến đầu thế kỉ XX.

Sai phân là dạng toán được Nguyễn Hữu Thận coi là dạng toán có nhiều bài khó. Khác với cách sách khác, Ý Trai toán pháp nhất đắc lục đã phân tích và phân loại rất chi tiết dạng toán này (xem [4]). A. Volkov [1] cũng đã phân tích một số bài toán bình phân và sai phân trong Ý Trai toán pháp nhất đắc lục.

Qua những bài toán về phép bình phân và sai phân, có thể phần nào hình dung được toán học Việt Nam trong 500 năm (thế kỉ XV- đầu thế kỉ XX). Các bài toán này thường được phát biểu dưới dạng bài toán thực tế, thể hiện tính thực tiễn cao, qua đó ta cũng phần nào hiểu thêm cuộc sống và sinh hoạt của người xưa. Thí dụ, lương cấp cho binh lính có thể được trả bằng hiện vật,...

Tài liệu trích dẫn

[1] A. Volkov, Didactical Dimensions of Mathematical Problems: Weighted Distribution in a Vietnames Mathematical Treatise, in Alain Bernard, Christine Proust (Editors), Scientific Sources and Teaching Contexts Throughout History: Problems and Perspectives, Springer, 2014, Chapter 10, pp. 247-271.

[2] Nguyễn Cẩn, Bút toán chỉ nam (1909). Thư viện Hán Nôm: A.1031; VHv.282.

[3] Phạm Hữu Chung, Cửu chương lập thành tính pháp, in lần đầu năm 1713, Thư viện Hán Nôm: AB.563; AB.173.

[4] Nguyễn Hữu Thận, Ý trai toán pháp nhất đắc lục (1829), Thư viện Hán Nôm: A.1336; VHv.1184; A. 982; A.1336/a.

[5] Lương Thế Vinh (1441-1496), Toán pháp đại thành, Thư viện Hán Nôm: A.2931; Vhv.1152.

[6] Cửu chương toán pháp lập thành, Chép lại năm 1882, Thư viện Hán Nôm: VHb. 38.