I- Dạng 1: Sử dụng bất đẳng thức tam giác.

- Với 3 điểm A, B, C bất kỳ luôn có

 AB + AC ≥ BC

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi A nằm giữa B, C

- Trong tam giác ABC ta có

 

 ABC ≤ ACB ⇔ AC ≤ AB

*Ví dụ 1:* Cho đường thẳng xy và hai điểm A, B cùng thuộc một nửa mặt phẳng có bờ là xy

 a, Tìm 1 điểm M ∈ xy sao cho MA + MB là nhỏ nhất.

 b, Tìm điểm N ∈ xy sao cho  lớn nhất.

 *Bài giải*

 a,



 Gọi A’ là điểm đối xứng với A qua xy

Kẻ BA’ cắt xy tại Mo.

Ta thấy AMo = A’Mo

Và AMo + BMo = A’B

Gọi M là một điểm bất kỳ thuộc xy suy ra MA = MA’

Ta có MA + MB = MA’ + MB ≥ A’B

 Dấu bằng xảy ra khi A’, M, B thẳng hàng

 Hay M ≡ Mo

Vậy min(MA + MB) = A’B ⇔ M ≡ Mo

b,

Lấy điểm N bất kỳ ∈ xy

Ta luôn có 

 Dấu bằng xảy ra khi B nằm giữa A, N

\* Nếu AB // xy

 Do đó không tìm được điểm N thoả mãn đầu bài

\* Nếu AB không song song với xy

 Gọi No là giao điểm của đường thẳng AB và xy

Ta sẽ có max 

No là điểm cần tìm

*Ví dụ 2:* Hai xóm A, B cách nhau một con sông. Tìm địa điểm để bắc một cây cầu qua sông sao cho quãng đường từ A đến B là ngắn nhất.

〈Bài toán coi: Hai bờ sông là hai đường thẳng song song, cầu bắc vuông góc với bờ sông để tiết kiệm nguyên vật liệu〉.

 Biểu thị hai xóm A, B bên bờ sông là hai điểm A, B.

Hai bờ sông là hai đường thẳng d1, d2 song song với nhau. Ta phải tìm địa điểm cây cầu CD sao cho:

 Tổng AC + CD + DB là ngắn nhất

Ta thấy độ dài CD không đổi nên ta cần tìm vị trí điểm C, D sao cho AC + BD ngắn nhất.

Qua A ta dựng một đường thẳng xy vuông góc với d1, d2 ⇒ xy // CD.

Từ D kẻ đường thẳng song song với CA cắt xy tại A’

Như vậy ACDA’ là hình bình hành

Do đó AC = A’D

Khi đó DB + AC = DB + A’D ≥ BA’

 Dấu bằng xảy ra khi B, D, A’ thẳng hàng

Tức là D ≡ Do (Do là giao điểm của A’B với d2)

Vậy địa điểm bắc cầu là CoDo.

*Ví dụ 3:* Cho ΔABC. O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Hãy tìm điểm M sao cho tổng MA + MB + MC + MO là nhỏ nhất.

*Bài giải*

Ta xét hai trường hợp:

a, Tam giác ABC là tam giác nhọn

Nên tâm O nằm trong ΔABC



 Xét hình ( I ). Giả sử O là một điểm bất kỳ trong ΔABC, theo bất đẳng thức tam giác ta chứng minh được: OB + OC < AB + AC

 Xét hình ( II ). Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử điểm O ∈ ΔACM

⇒ MA + MC ≥ OA + OC hay MA + MC ≥ 2OA

Dấu bằng xảy ra khi M ≡ O

Xét ΔMBO. Có MB + MO ≥ OB = OA

Do đó MA + MB + MC + MO ≥ 3.OA = 3R

Do vậy min(MA + MB + MC + MO) = 3R ⇔ M ≡ O

b, Nếu tam giác ABC là tam giác tù ⇒ O nằm ngoài tam giác ABC

 Giả sử góc A tù.

Ta có MA + MB + MC + MO = (MA + MO) + (MB + MC) ≥ OA + BC

 Dấu bằng xảy ra khi M ∈ OA và M ∈ BC hay M là giao điểm của OA và BC

Vậy MA + MB + MC + MO nhỏ nhất khi M là giao điểm của OA và BC (M ≡ Mo)

 Bài tập áp dụng:

 1. Cho tam giác ABC cân ở A và điểm D cố định trên đáy BC. Dựng một đường thẳng song song với BC, cắt hai cạnh bên ở E và F sao cho DE + DF có giá trị nhỏ nhất.

 2. Cho góc nhọn xOy và một điểm M nằm trong góc đó sao cho M không thuộc Ox và Oy. Hãy xác địn điểm B trên Ox, điểm C trên Oy sao cho OB = OC và MB + MC đạt giá trị nhỏ nhất.

 3. Cho góc vuông xOy. Điểm A thuộc miền trong của góc. Các điểm M và N theo thứ tự chuyển động trên các tia Ox, Oy sao cho MAN = 90o. Xác định vị trí của M, N để MN có độ dài nhỏ nhất.

 4. Cho tam giác ABC. O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Hãy tìm điểm M sao cho tổng MA + MB + MC + MO là nhỏ nhất.

II- Dạng 2: Dùng tính chất của đường vuông góc và đường xiên.

 - Trong các đoạn thẳng nối từ một điểm nằm ngoài một đường thẳng đến một điểm nằm trên đường thẳng đó, đoạn vuông góc với đường thẳng đó là đoạn ngắn nhất.

 Suy ra: trong tam giác vuông cạnh huyền là cạnh lớn nhất.

 - Trong hai đường xiên kẻ từ một điểm nằm ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó, đường xiên nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn.

 - Trong các đoạn thẳng nối hai điểm nằm trên hai đường thẳng song song, đoạn thẳng vuông góc với hai đường thẳng song song có độ dài nhỏ nhất.

*Ví dụ 1:* Cho tam giác đều ABC. Qua trọng tâm O của tam giác hãy dựng đường thẳng sao cho tổng khoảng cách từ 3 đỉnh của tam giác đến đường thẳng đó là lớn nhất.



Gọi d là đường thẳng bất kỳ qua O, H là trung điểm BC nên O ∈ AH

Kẻ AA’, BB’, CC’, HH’ vuông góc với d.

Tứ giác BB’C’C là hình thang nhận HH’ là đường trung bình

Nên 2HH’ = BB’ + CC’

ΔOAA’ ~ ΔOHH’ ⇒ 

Do đó AA’ = 2HH’

Suy ra: AA’ + BB’ + CC’ = 2HH’ + 2HH’ = 4HH’

 = 2.AA’ ≤ 2.OA

Do đó max(AA’ + BB’ + CC’) = 2.OA ⇔ OA = AA’

 ⇔ d // BC (hoặc d // AB, d // AC)

Như vậy: Qua O dựng đường thẳng song song với một trong ba cạnh của tam giác đều ABC thì tổng khoảng cách từ ba đỉnh của tam giác đến đường thẳng đó là lớn nhất.

*Ví dụ 2:* Cho tam giác nhọn ABC. M là một điểm bất kỳ nằm trên cạnh BC. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của M trên AB, AC. Tìm vị trí của điểm M để EF có độ dài nhỏ nhất.



 Gọi I là trung điểm của AM.

 Khi đó IA = IM = IE = IF = 

 Ta có EIF = EIM + MIF

 EIF = 2EAI + 2FAI

 EIF = 2A không đổi

 Tam giác EIF cân ở E, có góc ở đỉnh không đổi. Nên cạnh đáy nhỏ nhất khi và chỉ khi cạnh bên nhỏ nhất.

 Mà IE = 

 Do đó IE nhỏ nhất ⇔ AM nhỏ nhất

 ⇔ AM ⊥ BC

 Vậy khi M là chân đường cao hạ từ A của tam giác ABC thì EF có độ dài nhỏ nhất.

Bài tập áp dụng:

1. Cho góc vuông xOy, điểm A thuộc miền trong của góc. Các điểm M, N lần lượt chuyển động trên các tia Ox, Oy sao cho MAN = 90o. Xác định vị trí của điểm M, N để tổng AM + AN có độ dài:

a, Nhỏ nhất.

b, Lớn nhất.

2. Cho tam giác ABC. Tìm đường thẳng qua đỉnh A của tam giác sao cho tổng khoảng cách từ B, C tới đường thẳng đó là nhỏ nhất.

3. Cho tam giác ABC vuông cân ở A, cạnh huyền BC = 2a. Một đường thẳng d bất kỳ qua A và không cắt cạnh BC. Gọi I và K theo thứ tự là hình chiếu của B và C trên d và H là trung điểm của BC. Tính diện tích lớn nhất của tam giác HIK

4. Cho (O; R) có AB là dây cung cố định không đi qua tâm O. C là điểm di động trên cung lớn AB (C không trùng với A, B). Gọi d là tiếp tuyến tại C của đường tròn (O; R), M và N lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ A, B tới d.

Tìm vị trí của điểm C sao cho khoảng cách MN dài nhất, ngắn nhất.

III- Dạng 3: Sử dụng tính chất độ dài đường gấp khúc.

 Độ dài đường gấp khúc nối 2 điểm không nhỏ hơn độ dài đoạn thẳng nối hai điểm đó.

 Cho các điểm A1, A2, …, An.

 A1A2 + A2A3 + … + An-1An ≥ A1An

 Dấu bằng xảy ra khi A2, A3, …, An-1 lần lượt nằm giữa A1 và An (kể từ A1 đến An).

*Ví dụ 1:* Cho góc nhọn xOy và một điểm A ở trong góc đó. Tìm điểm B thuộc Ox, C thuộc Oy sao cho tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất.

 Thật vậy:

 Giả sử B và C là hai điểm bất kỳ trên Ox, Oy. Ta phải tìm vị trí của B, C sao cho chu vi tam giác ABC nhỏ nhất.

 Gọi A’, A” lần lượt là điểm đối xứng của A qua Ox, Oy. Do đó A’, A” cố định và ta có: AB = A’B

 AC = A”C

 Nên PABC = AB + AC + BC = A’B + A”C + BC ≥ A’A”



Do đó minPABC = A’A” ⇔ B ≡ Bo, C ≡ Co

Bo và Co là giao điểm của A’A” với Ox, Oy.

 Như vậy ta cần dựng A’, A” lần lượt đối xứng với A qua Ox, Oy, sau đó nối A’A” cắt Ox, Oy tại Bo, Co và vị trí Bo, Co là vị trí của B, C cần tìm.

*Ví dụ 2:* Cho hình vuông ABCD và một tứ giác MNPQ có bốn đỉnh thuộc bốn cạnh của hình vuông (Tứ giác MNPQ nội tiếp hình vuông). Tìm điểu kiện để tứ giác MNPQ có chu vi nhỏ nhất.



 Gọi P là chu vi của hình tứ giác MNPQ.

I, J, K lần lượt là trung điểm của PQ, QN, MN

 Như vậy PQ = 2DI

 PN = 2IJ

 MQ = 2KJ

 MN = 2BK

 Do đó P = MN + NP + PQ + QM = 2KB + 2IJ + 2DI + 2KJ

 = 2(BK + KJ + JI + ID) ≥ 2BD

 Vậy minP = 2BD ⇔ MQ // BD, MN // AC, NP // BD, PQ // AC

 Khi đó MNPQ là hình chữ nhật

 *Ví dụ 3:* Cho tam giác ABC có các góc nhỏ hơn 120o. Tìm điểm M nằm bên trong tam giác sao cho tổng MA + MB + MC có giá trị nhỏ nhất.



 Gọi M là một điểm ở trong tam giác ABC.

 Thực hiện phép quay tâm A, góc quay 60o ngược chiều kim đồng hồ.

 Khi đó: M → M’

 C → C’

 ΔAMM’ và ΔACC’ là các tam giác đều.

 Do đó AC’ = AC, MC = M’C’

 Nên MA + MB + MC = MM’ + MB + M’C’ ≥ BC’

 Nên min(MA + MB + MC) = BC’ ⇔ B, M, M’, C’ thẳng hàng

 Khi đó AMB = 120o

 AMC = AM’C’ = 180o – 60o = 120o

Còn lại BMC = 120o

 Vậy M là giao của hai cung chứa góc 120o dựng trên hai cạnh bất kỳ của tam giác ABC vào phía trong tam giác ABC.

 Bài tập áp dụng:

 1. Cho hai đường tròn ở ngoài nhau. Đường nối tâm OO’ cắt hai đường tròn tại A, B và A’, B’ (A, B ∈ (O); A’, B’ ∈ (O’); A, A’ nằm giữa B, B’).

 Chứng minh rằng AA’ là khoảng cách ngắn nhất, BB’ là khoảng cách lớn nhất trong tất cả các khoảng cách nối hai điểm bất kỳ của hai đường tròn đó.

 2. Cho hình chữ nhật ABCD. Tìm tứ giác có bốn đỉnh thuộc bốn cạnh của hình chữ nhật sao cho chu vi tứ giác có giá trị nhỏ nhất.

 3. Tam giác DEF gọi là nội tiếp tam giác ABC nếu ba đỉnh của tam giác DEF nằm trên ba cạnh của tam giác ABC.

 Hãy tìm tam giác nội tiếp tam giác nhọn ABC cho trước sao cho nó có chu vi nhỏ nhất.

IV- Dạng 4: Sử dụng các bất đẳng thức trong đường tròn.

 - Đường kính là dây lớn nhất của đường tròn.

 - Trong hai dây không bằng nhau của một đường tròn, dây lớn hơn khi và chỉ khi gần tâm hơn.

 Trong chương trình Trung Học Cơ Sở các bài toán về đường tròn chỉ được sử dụng với học sinh lớp 9. Các bài tập loại này tương đối phong phú, nhưng khi giải ta chỉ cần sử dụng tốt các kiến thức được học trực tiếp trong sách giáo khoa.

 *Ví dụ 1:* Cho đường tròn (O) và điểm M nằm trong đường tròn (M không trùng với O)

 1. Qua M dựng dây AB sao cho độ dài của nó

 a, Lớn nhất

 b, Nhỏ nhất

 2. Dựng điểm P trên đường tròn sao cho góc OPM lớn nhất.

 *Bài giải*

 1.a, Theo định lý đường kính là dây lớn nhất của đường tròn

 Nên chỉ cần dựng một dây A’B’ qua M, O

 Thì A’B’ chính là day cần phải dựng

 A’B’ là dây qua M có độ dài lớn nhất.

 b, Giả sử AB là một dây bất kỳ qua M.



Hạ OH ⊥ AB. Gọi Ao­Bo là dây qua M sao cho Ao­Bo ⊥ OM

 Xét tam giác vuông MOH
 Có: OM ≥ OH ⇒ AB ≥ Ao­Bo

 Dấu bằng xảy ra khi H ≡ M

 Như vậy dây AB có độ dài nhỏ nhất thì AB ≡ Ao­Bo. Hay A ≡ Ao, B ≡ Bo

 2. Giả sử PQ là một dây bất kỳ trên đường tròn.

 Tam giác cân OPQ có hai cạnh bên không đổi

180o - POQ

2

OPM =

 Nên để góc OPM đạt giá trị lớn nhất

thì góc POQ đạt giá trị nhỏ nhất

 ⇔ PQ nhỏ nhất

 ⇔ PQ ⊥ OM tại M

 ⇔ PQ ≡ P’Q’

 Qua M dựng đường thẳng vuông góc với OM,

cắt (O) tại P’ và Q’

 Ta có vị trí P’ là vị trí của P cần xác định.

 *Ví dụ 2:* Cho tam giác ABC vuông góc ở A.M là trung điểm của BC. Hai đường thẳng di động vuông góc với nhau tại M cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự tại D và E.

Tìm giá trị nhỏ nhất của DE và diện tích tam giác MDE.



 Do tam giác ABC vuông ở A ⇒ AM = 

 Tứ giác ADME là tứ giác nội tiếp (O) đường kính DE.

 Do đó DE ≥ AM

 ⇒ minDE = AM ⇔ AM cũng là đường kính của (O).

 Do đó AEM = 90o

 Suy ra: ME // AB ⇒ E là trung điểm của AC.

 Tương tự MD // AC ⇒ D là trung điểm của AB

 Khi đó DE là đường trung bình của tam giác ABC.

 Vậy đoạn DE ngắn nhất khi DE là đường trung bình của tam giác ABC.

 Ta lại có MDE = MAE

 Và tam giác AMC cân tại M

 Cho nên MAC = MCA ⇒ MDE = MCA

 Do đó tam giác vuông ABC đồng dạng với tam giác vuông MED

 Do đó: 

 Lại có tam giác ABC cố định ⇒ SABC và BC không đổi

 ⇒ SMED nhỏ nhất ⇔ ED nhỏ nhất

 Theo câu a: SMED nhỏ nhất ⇔ D, E lần lượt là trung điểm của AB, AC.

 Và ta có: BC = 2ED

 ⇒  ⇒ minSMED = 

 *Ví dụ 3:* Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp (O; R). Một tia Ax nằm giữa hai tia AB và AC cắt BC tại P cắt (O) tại E.

 Tìm vị trí của tia Ax sao cho độ dài DE lớn nhất?

 *Bài giải*

 Ta có DE = AE – AD.

 AE là một dây của (O)

 ⇒ maxAE = 2R là đường kính

 Nối AO kéo dài cắt BC tại D1, (O) tại E1 ⇒ AD1 ⊥ BC

 Luôn có: AD ≥ AD1

 Dấu bằng xảy ra khi D ≡ D1

 Tức là minAD = AD1 ⇔ AE ≡ AE1 là đường kính

 Như vậy khi AE đạt cực đại đồng thời AD đạt cực tiểu

 Cho nên ở vị trí này DE đạt giá trị lớn nhất

 Vậy maxDE = D1E1 khi và chỉ khi Ax qua tâm O.

 Bài tập áp dụng:

 1. Cho tam giác ABC đều và nội tiếp (O; R). M là một điểm di động trên cung nhỏ BC. Xác định vị trí của M để tổng khoảng cách từ M đến ba đỉnh của tam giác ABC có giá trị lớn nhất.

 2. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB = 2R. Điểm M di chuyển trên nửa đường tròn. Tiếp tuyến tại M cắt các tiếp tuyến tại A, B với nửa đường tròn C, D. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng SACM + SBDM

 3. Trong tất cả các tam giác ABC có độ dài cạnh BC và góc A không đổi. Hãy tìm tam giác có chu vi lớn nhất.

4. Trong các hình chữ nhật có đường chéo bằng d không đổi, hình nào có diện tích lớn nhất? Tính diện tích lớn nhất đó.

V- Dạng 5: Sử dụng các bất đẳng thức đại số.

 Khi giải các bài toán cực trị hình học có một số trường hợp ta phải đưa về các biểu thức đại số.

 Khi đó ta vận dụng cách tìm cực trị của các biểu thức đại số bằng cách sử dụng các bất đẳng thức, các phương pháp tìm cực trị ở phần I với những điều kiện cụ thể của các yếu tố hình học trong các bài toán.

 *Ví dụ 1:* Cho tam giác ABC có diện tích bằng S. Các điểm D, E, F thứ tự thuộc các cạnh AB, BC, AC sao cho AD = k.AB, BE = k.BC, CF = k.CA.

 a, Tính diện tích của tam giác DEF theo S và k

 b, Với giá trị nào của k thì diện tích tam giác DEF có giá trị nhỏ nhất.



 a, Hai tam giác ABC và ACD có cùng đường cao hạ từ C đến AB do đó:

 

* SACD = k.SABC = k.S

Tương tự SCDF = k.SACD = k2.S

Nên SADF = k.S – k2S = k(1 – k)S

Tương tự SBDE = k(1 – k)S

 SCEF = k(1 – k)S

Do đó: SDEF = S – 3k(1 – k)S

 = [1 – 3k(1 – k)]S

b, Do S không đổi

Nên SDEF đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi [1 – 3k(1 – k)] đạt giá trị nhỏ nhất

Ta có: 1 – 3k(1 – k) = 3k2 – 3k + 1

 = 3(k2 – k +)

 = 3(k – )2 + 

 Dấu bằng xảy ra khi k = 

Vậy minSDEF = S ⇔ k = 

*Ví dụ 2:* Cho tam giác ABC có BC = a, AC = b, AB = c. Gọi x, y, z theo thứ tự là khoảng cách từ điểm M ở trong tam giác tới các cạnh BC, AC, AB.

Xác định vị trí của điểm M để tổng  có giá trị nhỏ nhất



Gọi S là diện tích tam giác ABC

⇒ S = SMBC + SMAC + SMAB

 S = (ax + by + cz)

⇒ ax + by + cz = 2S

Ta xét biểu thức

 P = (ax + by + cz)()

 = a2 + b2 + c2 + ab() + bc() + ca()

Theo bất đẳng thức côsi Với x, y, z > 0

Ta có: , dấu bằng xảy ra khi x = y

 , dấu bằng xảy ra khi y = z

 , dấu bằng xảy ra khi x = z

Do đó P ≥ a2 + b2 + c2 + 2ab + 2ac + 2bc

Hay 2S() ≥ (a + b + c)2

⇒ 

Nên min () =  ⇔ x = y = z

 ⇔ M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC

*Ví dụ 3:* Trong các tam giác vuông có tổng hai cạnh góc vuông không đổi tam giác nào có chu vi nhỏ nhất.



Gọi P là chu vi của tam giác ABC

Ta có: P = a + b + c

Do b, c không đổi

* P nhỏ nhất khi và chỉ khi a nhỏ nhất

Đặt b + c = 2m không đổi

Suy ra: b = m + x

 c = m – x. Áp dụng định lý Pitago

Xét a2 = b2 + c2

 a2 = (m + x)2 + (m – x)2

 a2 = 2m2 + 2x2 ≥ 2m2 vì 2x2 ≥ 0

Do đó min a2 = 2m ⇔ x = 0

 ⇔ b = c

Vậy chu vi tam giác vuông ABC nhỏ nhất khi tam giác ABC là tam giác vuông cân tại A

Bài tập áp dụng:

1. Cho hình vuông KLMN có cạnh là 1. Người ta nội tiếp trong hình vuông này một hình thang ABCD với các đáy là AB và CD sao cho A là trung điểm của KN, các đỉnh B, C, D lần lượt thuộc các cạnh KL, LM, MN.

Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác ABCD khi BK = 

2. Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. M là điểm di động trên đường tròn. Vẽ MH vuông góc với AB (H thuộc đoạn AB). Xác định vị trí của M trên đường tròn (O; R) sao cho diện tích tam giác OMH lớn nhất.

3. Cho tam giác ABC cân ở A. Các điểm M, N theo thứ tự chuyển động trên các cạnh AB, AC sao cho AM = CN. Xác định vị trí của M, N để:

a, MN có giá trị nhỏ nhất.

b, Diện tích tam giác AMN có giá trị lớn nhất.