

Câu 1: (2 điểm).

Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} - \frac{4}{2-\sqrt{x}}$ và $B = \frac{x-2\sqrt{x}}{2}$ với $x > 0; x \neq 4$.

1) Tính giá trị của biểu thức B khi $x = \frac{1}{4}$.

2) Chứng minh rằng $A.B = \frac{x+4}{2}$.

3) Tìm các giá trị của x để $B = 1$.

Câu 2: (1,5 điểm).

Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Tìm một số tự nhiên có hai chữ số biết rằng: Tổng hai chữ số của số đó bằng 9, nếu đổi chỗ hai chữ số cho nhau thì ta được một số mới (có hai chữ số) bé hơn số ban đầu 27 đơn vị.

Câu 3: (2,5 điểm).

1) Giải các phương trình và hệ phương trình sau:

a) $2x^2 + 7x = 4$.

b) $\begin{cases} 2x - \sqrt{y} = 4 \\ x + 3\sqrt{y} = 9 \end{cases}$

2) Cho phương trình bậc hai $x^2 - 2x + 2m - 3 = 0$ (x là ẩn). Xác định các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{10}{9}$.

Câu 4: (3,5 điểm).

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O; R). Vẽ các đường cao AI, BK của tam giác ABC ($I \in BC, K \in AC$). Gọi H là giao điểm của AI và BK và M là trung điểm của BC, kẻ HE vuông góc với AM tại E.

1) Chứng minh rằng bốn điểm A, H, E, K cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh: $IB.IC = IH.IA$.

3) Chứng minh: $\widehat{AEK} = \widehat{ACM}$ và $ME.MA < R^2$.

Câu 5: (0,5 điểm).

Giải phương trình: $4x^2 + \frac{1}{2x} - 1 = \sqrt{4x-1}$.

-----Hết-----

Họ tên Thí sinh:SBD:

Câu	ý	Nội dung trình bày	Điểm
1	1	Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} - \frac{4}{2-\sqrt{x}}$ và $B = \frac{x-2\sqrt{x}}{2}$ với $x > 0; x \neq 4$.	0,5 đ
		1) Tính giá trị của biểu thức B khi $x = \frac{1}{4}$.	
		Thay $x = \frac{1}{4}$ (TMĐK) vào biểu thức B ta được: $B = \left(\frac{1}{4} - 2\sqrt{\frac{1}{4}}\right) : 2$	0,25đ
		$B = \left(\frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2}\right) : 2 = \frac{-3}{8}$	0,25đ
	2	Chứng minh rằng $A.B = \frac{x+4}{2}$.	0,75đ
		$A.B = \left(\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} - \frac{4}{2-\sqrt{x}}\right) \cdot \frac{x-2\sqrt{x}}{2} = \left(\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} + \frac{4}{\sqrt{x}-2}\right) \cdot \frac{x-2\sqrt{x}}{2}$	
		$A.B = \left[\frac{(\sqrt{x}-2)^2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} + \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}\right] \cdot \frac{x-2\sqrt{x}}{2}$	0,25đ
		$A.B = \left[\frac{x-4\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} + \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}\right] \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{2}$	
		$A.B = \frac{x+4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{2}$	0,25đ
		$A.B = \frac{x+4}{2}$. (Điều phải chứng minh)	0,25đ
	3	Tìm các giá trị của x để $B=1$ với $x > 0; x \neq 4$	0,75đ
		Để $B=1 \Rightarrow \frac{x-2\sqrt{x}}{2} = 1 \Leftrightarrow x-2\sqrt{x}-2=0$	
		Đặt $\sqrt{x}=t \geq 0$ ta có PT: $t^2-2t-2=0$ có $\Delta'=3$.	
		Phương trình có hai nghiệm $t_1=1-\sqrt{3} < 0$ (loại), $t_2=1+\sqrt{3}$ (thỏa mãn)	0,25đ
		Suy ra : $\sqrt{x}=1+\sqrt{3} \Leftrightarrow x=(1+\sqrt{3})^2=4+2\sqrt{3}$ (thỏa mãn ĐKXD)	0,25đ
		Vậy $x=4+2\sqrt{3}$ là giá trị cần tìm.	0,25đ

2		Tìm một số tự nhiên có hai chữ số biết rằng: Tổng hai chữ số của số đó bằng 9, nếu đổi chỗ hai chữ số cho nhau thì ta được một số mới (có hai chữ số) nhỏ hơn số ban đầu 27 đơn vị.	1,5đ
		Gọi số tự nhiên cần tìm là $\overline{ab}$ ($a \in N^*, b \in N^*, a \leq 9, b \leq 9$)	0,25đ
		Vì tổng các chữ số là 9 nên ta có phương trình $a + b = 9$ (1)	0,25đ
		Đổi chỗ hai chữ số cho nhau thì ta được số mới là $\overline{ba}$	
		Vì số mới bé hơn số cũ 27 đơn vị nên ta có phương trình $\overline{ab} - \overline{ba} = 27$ (2)	0,25đ
		Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} a + b = 9 \\ \overline{ab} - \overline{ba} = 27 \end{cases}$	
		Giải hệ phương trình, tìm được $\begin{cases} a = 6 \\ b = 3 \end{cases}$	0,5đ
		Đối chiếu ĐK và kết luận: Số cần tìm là 63.	0,25đ
3	1	Giải các phương trình và hệ phương trình sau: a) $2x^2 + 7x = 4$. b) $\begin{cases} 2x - \sqrt{y} = 4 \\ x + 3\sqrt{y} = 9 \end{cases}$	1,5đ
	1a	Giải phương trình: $2x^2 + 7x = 4$.	0,75đ
		Ta có: $2x^2 + 7x = 4 \Leftrightarrow 2x^2 + 7x - 4 = 0$	0,25đ
		Tính được $\Delta = 81 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 9$	0,25đ
		Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -4; x_2 = \frac{1}{2}$.	0,25đ
	1b	Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x - \sqrt{y} = 4 \\ x + 3\sqrt{y} = 9 \end{cases}$	0,75đ
		Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x - \sqrt{y} = 4 \\ x + 3\sqrt{y} = 9 \end{cases}$ ĐKXĐ: $y \geq 0$.	0,25đ
		Ta có: $\begin{cases} 2x - \sqrt{y} = 4 \\ x + 3\sqrt{y} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 3\sqrt{y} = 12 \\ x + 3\sqrt{y} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \sqrt{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$	0,25đ
		Vậy hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$	0,25đ
	2	Cho phương trình bậc hai $x^2 - 2x + 2m - 3 = 0$ (với x là ẩn). Xác định các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{10}{9}$.	1,0đ
		Xét phương trình bậc hai: $x^2 - 2x + 2m - 3 = 0$ (I)	

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì $\Delta > 0 \Leftrightarrow 16 - 8m > 0 \Leftrightarrow m < 2$ (*)

Áp dụng hệ thức Vi-ét, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 & (1) \\ x_1 \cdot x_2 = 2m - 3 & (2) \end{cases}$

Xét: $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{10}{9}$ ĐKXD: $x_1 \cdot x_2 \neq 0 \Leftrightarrow 2m - 3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{3}{2}$ (**)

Theo đề bài, ta có:

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{10}{9} \Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 \cdot x_2^2} = \frac{10}{9} \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1^2 \cdot x_2^2} = \frac{10}{9} \quad (3)$$

Thay (1), (2) vào (3) ta được:

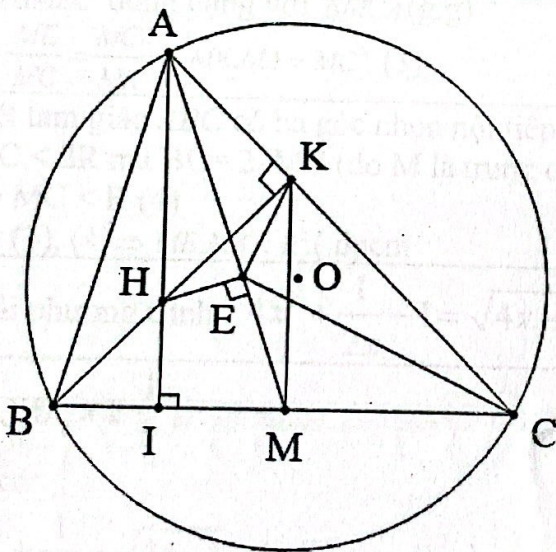
$$\frac{2^2 - 2(2m - 3)}{(2m - 3)^2} = \frac{10}{9} \Rightarrow 10m^2 - 21m = 0 \Leftrightarrow m(10m - 21) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2,1 \end{cases}$$

Đối chiếu với ĐK (*) và (**) suy ra $m = 0$ thỏa mãn.

Vậy $m = 0$ thì pt có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{10}{9}$.

4 Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn ($O; R$). Vẽ các đường cao AI, BK của tam giác ABC ($I \in BC, K \in AC$). Gọi H là giao điểm của AI và BK và M là trung điểm của BC , kẻ HE vuông góc với AM tại E .

1 Chứng minh rằng bốn điểm A, H, E, K cùng thuộc một đường tròn.



Ta có: $\widehat{AKH} = 90^\circ$ (Do BK vuông góc với AC)

$\widehat{AEH} = 90^\circ$ (Do HE vuông góc với AM)

$\Rightarrow \widehat{AKH} = \widehat{AEH} = 90^\circ$ suy ra tứ giác $AKEH$ nội tiếp đường tròn đường kính AH hay bốn điểm A, H, E, K cùng thuộc một đường tròn

2	Chứng minh: $IB.IC = IH.IA$. 0,75đ Xét $\triangle BIH$ vuông tại I và $\triangle AIC$ vuông tại I có: $\widehat{IBH} = \widehat{IAC}$ (Cùng phụ với $\widehat{ACB}$) 0,25đ $\Rightarrow \triangle BIH$ đồng dạng với $\triangle AIC$ (g.g) 0,25đ $\Rightarrow \frac{BI}{AI} = \frac{IH}{IC} \Leftrightarrow BI.IC = AI.IH$ (đpcm) 0,25đ
3	Chứng minh: $\widehat{AEK} = \widehat{ACM}$ và $ME.MA < R^2$. 1,5đ Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác AHEK có : 0,25đ $\widehat{AEK} = \widehat{AHK}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AK) $\widehat{AHK} = \widehat{ACM}$ (cùng phụ với $\widehat{HAK}$) 0,25đ Suy ra $\widehat{AEK} = \widehat{ACM}$. 0,25đ + Xét tứ giác MEKC có : $\widehat{AEK} = \widehat{ACM}$ (chứng minh trên) $\Rightarrow$ tứ giác MEKC nội tiếp(Dấu hiệu nhận biết) $\Rightarrow \widehat{MKC} = \widehat{MEC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung MC) (1) + Xét tam giác BKC vuông tại K có: M là trung điểm của cạnh huyền BC(gt) $\Rightarrow MK = MC = \frac{BC}{2}$ (định lý) $\Rightarrow \triangle MKC$ cân tại M $\Rightarrow \widehat{MKC} = \widehat{MCK}$ (2) Từ (1), (2) $\Rightarrow \widehat{MEC} = \widehat{MCK}$ hay $\widehat{MEC} = \widehat{MCA}$ 0,25đ + Xét $\triangle MEC$ và $\triangle MCA$ có: $\widehat{MEC} = \widehat{MCA}$ (chứng minh trên) $\widehat{AMC}$ chung $\Rightarrow \triangle MEC$ đồng dạng với $\triangle MCA$ (g.g) $\Rightarrow \frac{ME}{MC} = \frac{MC}{MA} \Rightarrow ME.MA = MC^2$ (3) 0,25đ Xét tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O; R) suy ra đây $BC < 2R$ mà $BC = 2.MC$ (do M là trung điểm của BC) $\Rightarrow MC < R$ (4) Từ (3), (4) $\Rightarrow ME.MA < R^2$ (đpcm) 0,25đ
5	Giải phương trình: $4x^2 + \frac{1}{2x} - 1 = \sqrt{4x-1}$ 0,5đ
	ĐKXD: $x \geq \frac{1}{4}$ Ta có: $4x^2 + \frac{1}{2x} - \sqrt{4x-1} = 1 \Leftrightarrow (2x-1)^2 + \frac{1}{2}(\sqrt{4x-1}-1)^2 + \left(2x + \frac{1}{2x}\right) = 2$ 0,25đ
	Mà $\begin{cases} (2x-1)^2 \geq 0 \\ \frac{1}{2}(\sqrt{4x-1}-1)^2 \geq 0 \\ \left(2x + \frac{1}{2x}\right) \geq 2 \end{cases}$

	Chúng tỏ $VT \geq 2$ Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} 2x-1=0 \\ \sqrt{4x-1}-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \text{ (thỏa mãn)} \\ 2x=\frac{1}{2x} \end{cases}$ Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là: $S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$	0,25đ
--	--	-------

Tổ giám khảo thống nhất để chia nhỏ điểm thành phần nhưng không được thay đổi tổng điểm. Học sinh làm cách khác mà vẫn đúng thì vẫn cho điểm tối đa