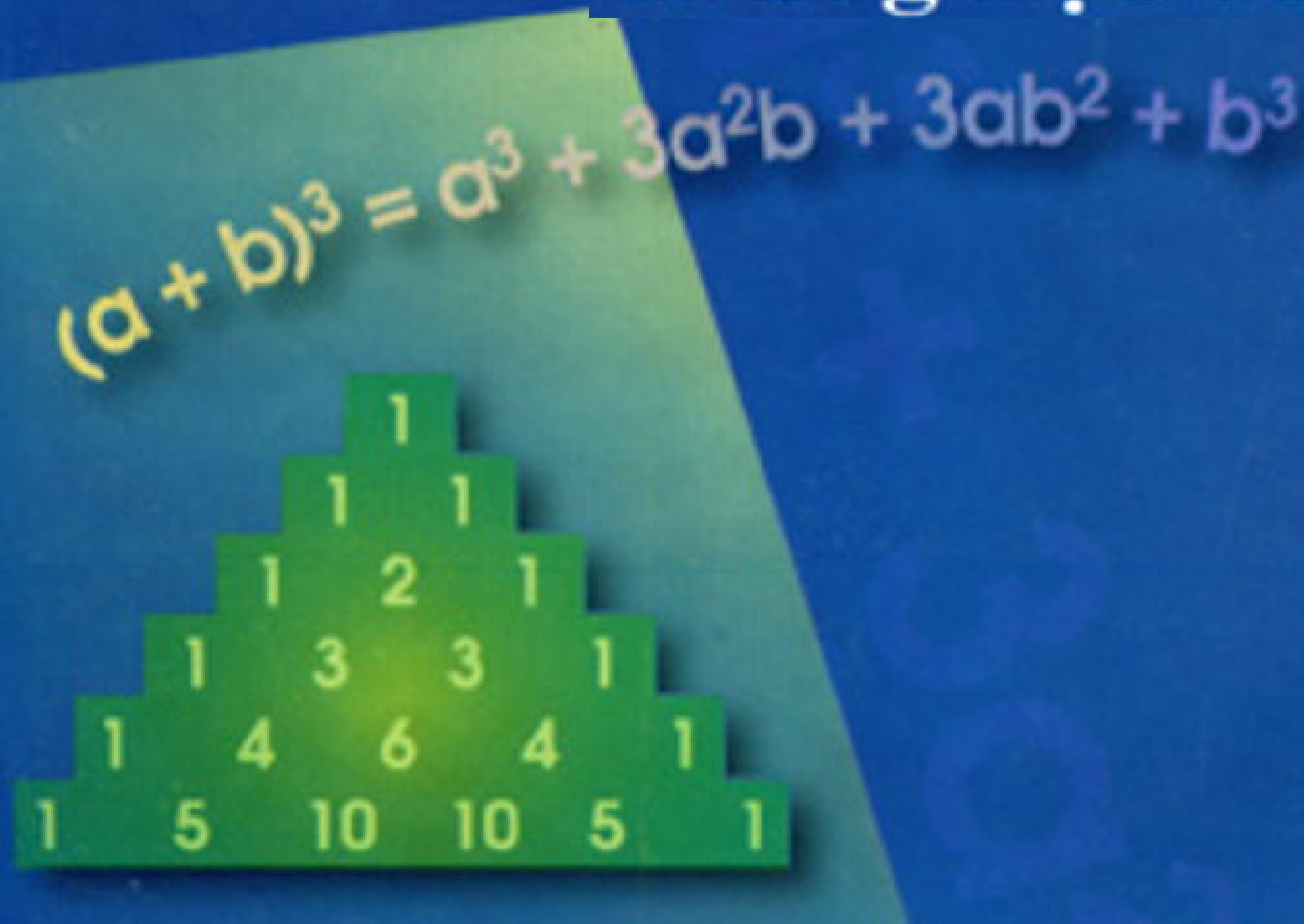
CÁC CHUYÊN ĐỀ

bồi dưỡng học sinh giỏi

MÔN TOÁN

Trung học cơ sở



CÁC CHUYÊN ĐỀ BỒI DƯỠNG HSG TOÁN THCS

Chuyên đề 1: SỐ CHÍNH PHƯƠNG

I- ĐỊNH NGHĨA: Số chính phương là số bằng bình phương đúng của một số nguyên.

II- TÍNH CHẤT:

1- Số chính phương chỉ có thể có chữ số tận cùng bằng 0, 1, 4, 5, 6, 9; không thể có chữ tận cùng bằng 2, 3, 7, 8.

2- Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, số chính phương chỉ chứa các thừa số nguyên tố với số mũ chẵn.

3- Số chính phương chỉ có thể có một trong hai dạng 4n hoặc 4n+1. Không có số chính phương nào có dạng 4n + 2 hoặc 4n + 3 (n $\in$ N).

4- Số chính phương chỉ có thể có một trong hai dạng 3n hoặc 3n +1. Không có số chính phương nào có dạng 3n + 2 (n $\in$ N).

5- Số chính phương tận cùng bằng 1, 4 hoặc 9 thì chữ số hàng chục là chữ số chẵn.

Số chính phương tận cùng bằng 5 thì chữ số hàng chục là 2.

Số chính phương tận cùng bằng 6 thì chữ số hàng chục là chữ số lẻ.

6- Số chính phương chia hết cho 2 thì chia hết cho 4.

Số chính phương chia hết cho 3 thì chia hết cho 9

Số chính phương chia hết cho 5 thì chia hết cho 25

Số chính phương chia hết cho 8 thì chia hết cho 16.

III- MỘT SỐ DẠNG BÀI TẬP VỀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG

A- Dạng 1: **CHỨNG MINH MỘT SỐ LÀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG.**

Bài 1: *Chứng minh rằng mọi số nguyên x, y thì:*

A= $(x + y)(x + 2y)(x + 3y)(x + 4y) + y^4$ là số chính phương.

Giải : Ta có A = $(x + y)(x + 2y)(x + 3y)(x + 4y) + y^4$

$= (x^2+5xy+4y^2)(x^2+5xy+6y^2)+y^4$

Đặt $x^2+5xy+5y^2=t \quad (t\in Z)$ thì

A $= (t-y^2)(t+y^2)+y^4 = t^2-y^4+y^4 = t^2 = (x^2+5xy+5y^2)^2$

Vì x, y, z ∈ Z nên $x^2 \in Z,\quad 5xy \in Z,\quad 5y^2 \in Z \Rightarrow x^2+5xy+5y^2 \in Z$

Vậy A là số chính phương.

Bài 2: Chứng minh tích của 4 số tự nhiên liên tiếp cộng 1 luôn là số chính phương.

Giải : Gọi 4 số tự nhiên, liên tiếp đó là n, n+1, n+2, n+3 (n ∈ Z). Ta có:

$n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 = n . (n + 3)(n + 1)(n + 2) + 1$

$= (n^2+3n)(n^2+3n+2)+1 \quad (*)$

Đặt $n^2+3n=t \quad (t \in N)$ thì (*) $= t(t + 2) + 1 = t^2 + 2t + 1 = (t + 1)^2$

$= (n^2 + 3n + 1)^2$

Vì n ∈ N nên $n^2 + 3n + 1$ ∈ N. Vậy n(n + 1)(n + 2)(+ 3) + 1 là số chính phương.

Bài 3: Cho S = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + ...+ k(k + 1)(k + 2)

Chứng minh rằng 4S + 1 là số chính phương.

Giải : Ta có: $k(k + 1)(k + 2) = \frac{1}{4} k (k + 1)(k + 2). 4= \frac{1}{4} k(k + 1)(k + 2). [(k+3)-(k-1)]$

$= \frac{1}{4} k(k + 1)(k + 2)(k + 3) - \frac{1}{4} k(k + 1)(k + 2)(k - 1)$

=> 4S =1.2.3.4 - 0.1.2.3 + 2.3.4.5 - 1.2.3.4 + . . . + k(k + 1)(k + 2)(k + 3)

- k(k + 1)(k + 2)(k - 1) = k(k + 1)(k + 2)(k + 3)

=> 4S + 1 = k(k + 1)(k + 2)(k + 3) + 1

Theo kết quả bài 2 => k(k + 1)(k + 2)(k + 3) + 1 là số chính phương.

Bài 4: Cho dãy số 49; 4489; 444889; 44448889; . . .

- Dãy số trên được xây dựng bằng cách thêm số 48 vào giữa các chữ số đứng trước và đứng sau nó. Chứng minh rằng tất cả các số của dãy trên đều là số chính phương.

Ta có $\underbrace{44...4}_{n \text{ chữ số } 4}\underbrace{88...8}_{n-1 \text{ chữ số } 8}9 = \underbrace{44...4}_{n \text{ chữ số } 4}\underbrace{88...8}_{n \text{ chữ số } 8} + 1 = \underbrace{44...4}_{n \text{ chữ số } 4} . 10^n + 8 . \underbrace{11 ... 1}_{n \text{ chữ số } 1} + 1$

$= 4.\frac{10^n-1}{9}.10^n+8.\frac{10^n-1}{9}+1$

$= \frac{4.10^{2n}-4.10^n+8.10^n-8+9}{9} = \frac{4.10^{2n}+4.10^n+1}{9}$

$= \left(\frac{2.10^n+1}{3}\right)^2$

Ta thấy $2.10^n + 1 = \underbrace{200...0}_{n-1 \text{ chữ số } 0}1$ có tổng các chữ số chia hết cho 3 nên nó chia hết cho 3

$\Rightarrow \left(\frac{2.10^n+1}{3}\right)^2 \in Z$ hay các số có dạng 44 ... 488 ... 89 là số chính phương.

Các bài tương tự:

Chứng minh rằng số sau đây là số chính phương.

$A = \underbrace{11\ldots1}_{2n \text{ chữ số } 1} + \underbrace{44\ldots4}_{n \text{ chữ số } 4} + 1$

$B = \underbrace{11\ldots1}_{2n \text{ chữ số } 1} + \underbrace{11\ldots1}_{n+1 \text{ chữ số } 1} + \underbrace{66\ldots6}_{n \text{ chữ số } 6} + 8$

$C = \underbrace{44\ldots4}_{2n \text{ chữ số } 4} + \underbrace{22\ldots2}_{n+1 \text{ chữ số } 2} + \underbrace{88\ldots8}_{n \text{ chữ số } 8} + 7$

$D = 224\underbrace{99\ldots9}_{n-2 \text{ chữ số } 9}1\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ chữ số } 0}9$

$E = \underbrace{11\ldots1}_{n \text{ chữ số } 1}\underbrace{55\ldots5}_{n-1 \text{ chữ số } 5}6$

Kết quả: $A = \left(\frac{10^n+2}{3}\right)^2$; $B = \left(\frac{10^n+8}{3}\right)^2$; $C = \left(\frac{2.10^n+7}{3}\right)^2$

$D = (15.10^n - 3)^2$ $\qquad$ $E = \left(\frac{10^n+2}{3}\right)^2$

Bài 5: Chứng minh rằng tổng các bình phương của 5 số tự nhiên liên tiếp không thể là một số chính phương.

Gọi 5 số tự nhiên liên tiếp đó là n - 2, n - 1, n +1, n + 2 ($n \in N$, n >2).

Ta có $(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 5 . (n^2+2)$

Vì n^2 không thể tận cùng bởi 3 hoặc 8 do đó $n^2 + 2$ không thể chia hết cho 5

=> $5. (n^2 + 2)$ không là số chính phương hay A không là số chính phương.

Bài 6: Chứng minh rằng số có dạng $n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ trong đó $n \in N$ và n >1 không phải là số chính phương.

$n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2 = n^2. (n^4 - n^2 + 2n + 2) = n^2. [n^2(n-1)(n+1) + 2(n+1)]$

$= n^2[(n+1)(n^3 - n^2 + 2)] = n^2(n+1) . [(n^3+1) - (n^2-1)]$

$= n^2(n+1)^2 . (n^2 - 2n + 2)$

Với $n \in N$, n > 1 thì $n^2 - 2n + 2 = (n-1)^2 + 1 > (n-1)^2$

Và $n^2 - 2n + 2 = n^2 - 2(n-1) < n^2$

Vậy $(n-1)^2 < n^2 - 2n + 2 < n^2$ => $n^2 - 2n + 2$ không phải là một số chính phương.

Bài 7: Cho 5 số chính phương bất kỳ có chữ số hàng chục khác nhau còn chữ số hàng đơn vị đều là 6. Chứng minh rằng tổng các chữ số hàng chục của 5 số chính phương đó là một số chính phương.

Ta biết một số chính phương có chữ số hàng đơn vị là 6 thì chữ số hàng chục của nó là số lẻ. Vì vậy chữ số hàng chục của 5 số chính phương đó là 1,3,5,7,9 khi đó tổng của chúng bằng $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$ là số chính phương.

Bài 8: Chứng minh rằng tổng bình phương của 2 số lẻ bất kỳ không phải là số chính phương.

a và b lẻ nên $a = 2k + 1$, $b = 2m + 1$ (Với $k, m \in N$).

$\Rightarrow a^2 + b^2 = (2k + 1)^2 + (2m + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 + 4m^2 + 4m + 1$

$= 4(k^2 + k + m^2 + m) + 2$

$\Rightarrow a^2 + b^2$ không thể là số chính phương.

Bài 9: Chứng minh rằng nếu p là tích của n (với $n > 1$) số nguyên tố đầu tiên thì $p - 1$ và $p + 1$ không thể là các số chính phương.

Vì p là tích của n số nguyên tố đầu tiên nên $p \vdots 2$ và p không thể chia hết cho 4 (1)

a- Giả sử $p + 1$ là số chính phương. Đặt $p + 1 = m^2$ ($m \in N$).

Vì p chẵn nên $p + 1$ lẻ $\Rightarrow m^2$ lẻ $\Rightarrow$ m lẻ.

Đặt $m = 2k + 1$ ($k \in N$). Ta có $m^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow p + 1 = 4k^2 + 4k + 1$

$\Rightarrow p = 4k^2 + 4k = 4k(k + 1) \vdots 4$ mâu thuẫn với (1).

$\Rightarrow p + 1$ không phải là số chính phương.

b- $p = 2.3.5\ldots$ là số chia hết cho 3 $\Rightarrow p - 1$ có dạng $3k + 2$.

$\Rightarrow p - 1$ không là số chính phương.

Vậy nếu p là tích n ($n > 1$) số nguyên tố đầu tiên thì $p - 1$ và $p + 1$ không là số chính phương.

Bài 10: Giả sử $N = 1.3.5.7\ldots2007.2011$

Chứng minh rằng trong 3 số nguyên liên tiếp $2N - 1$, $2N$ và $2N + 1$ không có số nào là số chính phương.

a- $2N - 1 = 2.1.3.5.7\ldots2011 - 1$

Có $2N \vdots 3 \Rightarrow 2N - 1 = 3k + 2$ ($k \in N$)

$\Rightarrow 2N - 1$ không là số chính phương.

b- $2N = 2.1.3.5.7\ldots2011 \Rightarrow 2N$ chẵn.

$\Rightarrow$ N lẻ $\Rightarrow$ N không chia hết cho 2 và $2N \vdots 2$ nhưng 2N không chia hết cho 4.

2N chẵn nên 2N không chia cho 4 dư 1 hoặc dư 3 $\Rightarrow$ 2N không là số chính phương.

c- $2N + 1 = 2.1.3.5.7\ldots2011 + 1$

$2N + 1$ lẻ nên $2N + 1$ không chia hết cho 4

2N không chia hết cho 4 nên $2N + 1$ không chia cho 4 dư 1.

$\Rightarrow 2N + 1$ không là số chính phương.

Bài 11: Cho $a = \underbrace{11\ldots1}_{\text{2010 chữ số 1}}$; $b = 1\underbrace{00\ldots0}_{\text{2009 chữ số 0}}5$

Chứng minh $\sqrt{ab+1}$ là số tự nhiên.

Giải: $b = 1\underbrace{00\ldots0}_{\text{2009 chữ số 0}}5 = 1\underbrace{00\ldots0}_{\text{2010 chữ số 0}} - 1 + 6 = \underbrace{99\ldots9}_{\text{2010 chữ số 9}} + 6 = 9a + 6$

$\Rightarrow ab + 1 = a(9a + 6) + 1 = 9a^2 + 6a + 1 = (3a + 1)^2$

$\Rightarrow \sqrt{ab+1} = \sqrt{(3a+1)^2} = 3a + 1 \in N$

B. DẠNG 2: TÌM GIÁ TRỊ CỦA BIẾN ĐỂ BIỂU THỨC LÀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG

Bài 1: Tìm số tự nhiên n sao cho các số sau là số chính phương

a) $n^2 + 2n + 12$ b) $n(n + 3)$

c) $13n + 3$ d) $n^2 + n + 1589$

Giải:

a) Vì $n^2 + 2n + 12$ là số chính phương nên đặt $n^2 + 2n + 12 = k^2$ ($k \in N$)

$\Rightarrow (n^2 + 2n + 1) + 11 = k^2 \Leftrightarrow k^2 - (n + 1)^2 = 11 \Leftrightarrow (k + n + 1)(k - n - 1) = 11$

Nhận xét thấy $k + n + 1 > k - n - 1$ và chúng là những số nguyên dương, nên ta có thể viết $(k + n + 1)(k - n - 1) = 11.1 \Leftrightarrow \begin{cases} k + n + 1 = 11 \\ k - n - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 6 \\ n = 4 \end{cases}$

b) đặt $n(n + 3) = a^2$ ($n \in N$) $\Rightarrow n^2 + 3n = a^2 \Leftrightarrow 4n^2 + 12n = 4a^2$

$\Leftrightarrow (4n^2 + 12n + 9) - 9 = 4a^2$

$\Leftrightarrow (2n + 3)^2 - 4a^2 = 9$

$\Leftrightarrow (2n + 3 + 2a)(2n + 3 - 2a) = 9$

Nhận xét thấy $2n + 3 + 2a > 2n + 3 - 2a$ và chúng là những số nguyên dương, nên ta có thể viết $(2n + 3 + 2a)(2n + 3 - 2a) = 9.1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2n + 3 + 2a = 9 \\ 2n + 3 - 2a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 1 \\ a = 2 \end{cases}$

c) Đặt $13n + 3 = y^2$ ($y \in N$) $\Rightarrow 13(n - 1) = y^2 - 16$

$\Leftrightarrow 13(n - 1) = (y + 4)(y - 4)$

$\Rightarrow (y + 4)(y - 4) \vdots 13$ mà 13 là số nguyên tố nên $y + 4 \vdots 13$ hoặc $y - 4 \vdots 13$

$\Rightarrow y = 13k \pm 4$ (với $k \in N$)

$\Rightarrow 13(n - 1) = (13k \pm 4)^2 - 16 = 13k.(13k \pm 8)$

$\Rightarrow 13k^2 \pm 8k + 1$

Vậy $n = 13k^2 \pm 8k + 1$ (với $k \in N$) thì $13n + 3$ là số chính phương

d) Đặt $n^2 + n + 1589 = m^2$ ($m \in N$) $\Rightarrow (4n^2 + 1)^2 + 6355 = 4m^2$

$\Leftrightarrow (2m + 2n + 1)(2m - 2n - 1) = 6355$

Nhận xét thấy $2m + 2n + 1 > 2m - 2n - 1 > 0$ và chúng là những số lẻ, nên ta có thể viết $(2m + 2n + 1)(2m - 2n - 1) = 6355.1 = 1271.5 = 205.31 = 155.41$

Suy ra n có thể có các giá trị sau : 1588 ; 316 ; 43 ; 28

Bài tương tự :

Tìm a để các số sau là những số chính phương

a) $a^2 + a + 43$

b) $a^2 + 81$

c) $a^2 + 31a + 1984$

Kết quả: a) 2; 42; 13

b) 0; 12; 40

c) 12 ; 33 ; 48 ; 97 ; 176 ; 332 ; 565 ; 1728

Bài 2 : Tìm số tự nhiên $n \geq 1$ sao cho tổng 1! + 2! + 3! + … + n! là một số chính phương.

Với n = 1 thì $1! = 1 = 1^2$ là số chính phương

Với n = 2 thì 1! + 2! = 3 không là số chính phương

Với n = 3 thì $1! + 2! + 3! = 1 + 1.2 + 1.2.3 = 9 = 3^3$ là số chính phương

Với $n \geq 4$ ta có 1! + 2! + 3! + 4! = 1 + 1.2 + 1.2.3 + 1.2.3.4 = 33 còn 5!; 6!; …; n! đều tận cùng bởi 0 do đó 1! + 2! + 3! + … n! có tận cùng bởi chữ số 3 nên nó không phải là số chính phương.

Vậy có 2 số tự nhiên n thoả mãn đề bài là n = 1; n = 3

Bài 3: Có hay không số tự nhiên n để $2010 + n^2$ là số chính phương.

Giả sử $2010 + n^2$ là số chính phương thì $2010 + n^2 = m^2$ ($m \in N$)

Từ đó suy ra $m^2 - n^2 = 2010 \Leftrightarrow (m + n)(m - n) = 2010$

Như vậy trong 2 số m và n phải có ít nhất 1 số chẵn (1)

Mặt khác $m + n + m - n = 2m \Rightarrow$ 2 số m + n và m – n cùng tính chẵn lẻ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ m + n và m – n là 2 số chẵn.

$\Rightarrow (m + n)(m - n) \vdots 4$ nhưng 2006 không chia hết cho 4

$\Rightarrow$ Điều giả sử sai.

Vậy không tồn tại số tự nhiên n để $2006 + n^2$ là số chính phương.

Bài 4: Biết $x \in N$ và x > 2. Tìm x sao cho $\overline{x(x-1)}.\overline{x(x-1)} = \overline{(x-2)xx(x-1)}$

Đẳng thức đã cho được viết lại như sau: $\overline{x(x-1)}^2 = \overline{(x-2)xx(x-1)}$

Do vế trái là một số chính phương nên vế phải cũng là một số chính phương.

Một số chính phương chỉ có thể tận cùng bởi một trong các chữ số 0; 1; 4; 5; 6; 9 nên x chỉ có thể tận cùng bởi một trong các chữ số 1; 2; 5; 6; 7; 0 (1)

Do x là chữ số nên $x \leq 9$, kết hợp với điều kiện đề bài ta có $x \in N$ và $2 < x \leq 9$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ x chỉ có thể nhận một trong các giá trị 5; 6; 7

Bằng phép thử ta thấy chỉ có x = 7 thoả mãn đề bài, khi đó $76^2 = 5776$

Bài 5: Tìm số tự nhiên n có 2 chữ số biết rằng 2n + 1 và 3n + 1 đều là các số chính phương.

Ta có $10 \leq n \leq 99$ nên $21 \leq 2n + 1 \leq 199$. Tìm số chính phương lẻ trong khoảng trên ta được 2n + 1 bằng 25; 49; 81; 121; 169 tương ứng với số n bằng 12; 24; 40; 60; 84

Số 3n + 1 bằng 37; 73; 121; 181; 253. Chỉ có 121 là số chính phương.

Vậy n = 40

Bài 6: Chứng minh rằng nếu n là số tự nhiên sao cho n + 1 và 2n + 1 đều là các số chính phương thì n là bội số của 24

Vì n + 1 và 2n + 1 là các số chính phương nên đặt $n + 1 = k^2$, $2n + 1 = m^2$ ($k, m \in N$)

Ta có m là số lẻ $\Rightarrow m = 2a + 1 \Rightarrow m^2 = 4a(a + 1) + 1$

Mà $n = \dfrac{m^2-1}{2} = \dfrac{4a(a+1)}{2} = 2a(a+1)$

$\Rightarrow$ n chẵn $\Rightarrow$ n + 1 lẻ $\Rightarrow$ k lẻ $\Rightarrow$ đặt k = 2b + 1 (với $b \in N$) $\Rightarrow k^2 = 4b(b+1) + 1$

$\Rightarrow n = 4b(b+1) \Rightarrow n \vdots 8$ (1)

Ta có: $k^2 + m^2 = 3n + 2 \equiv 2 \pmod 3$

Mặt khác k^2 chia cho 3 dư 0 hoặc 1, m^2 chia cho 3 dư 0 hoặc 1

Nên để $k^2 + m^2 \equiv 2 \pmod 3$ thì $k^2 \equiv 1 \pmod 3$

$m^2 \equiv 1 \pmod 3$

$\Rightarrow m^2 - k^2 \vdots 3$ hay $(2n + 1) - (n + 1) \vdots 3 \Rightarrow n \vdots 3$ (2)

Mà (8; 3) = 1 (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow n \vdots 24$

Bài 7: Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho số $2^8 + 2^{11} + 2^n$ là số chính phương

Giả sử $2^8 + 2^{11} + 2^n = a^2$ ($a \in N$) thì

$2^n = a^2 - 48^2 = (a + 48)(a - 48)$

$2^p.2^q = (a + 48)(a - 48)$ với $p, q \in N$; $p + q = n$ và $p > q$

$\Rightarrow \begin{cases} a + 48 = 2^p \\ a - 48 = 2^q \end{cases} \Rightarrow 2^p 2^q = 96 \Leftrightarrow 2^q(2^{p-q} - 1) = 2^5.3$

$\Rightarrow q = 5$ và $p - q = 2 \Rightarrow p = 7$

$\Rightarrow n = 5 + 7 = 12$

Thử lại ta có: $2^8 + 2^{11} + 2^n = 80^2$

C.DẠNG 3 : TÌM SỐ CHÍNH PHƯƠNG

Bài 1 : Cho A là số chính phương gồm 4 chữ số. Nếu ta thêm vào mỗi chữ số của A một đơn vị thì ta được số chính phương B. Hãy tìm các số A và B.

Gọi A = $\overline{abcd} = k^2$. Nếu thêm vào mỗi chữ số của A một đơn vị thì ta có số

B = $\overline{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)} = m^2$ với $k, m \in N$ và $32 < k < m < 100$

$a, b, c, d = \overline{1;9}$

$\Rightarrow$ Ta có: $\begin{cases} A = \overline{abcd} = k^2 \\ B = \overline{abcd} + 1111 = m^2 \end{cases}$. Đúng khi cộng không có nhớ

$\Rightarrow m^2 - k^2 = 1111 \Leftrightarrow (m - k)(m + k) = 1111$ (*)

Nhận xét thấy tích $(m - k)(m + k) > 0$ nên $m - k$ và $m + k$ là 2 số nguyên dương.

Và m – k < m + k < 200 nên (*) có thể viết (m – k) (m + k) = 11.101

Do đó: $\begin{cases} m - k = 11 \\ m + k = 101 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 56 \\ n = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2025 \\ B = 3136 \end{cases}$

Bài 2: Tìm một số chính phương gồm 4 chữ số biết rằng số gồm 2 chữ số đầu lớn hơn số gồm 2 chữ số sau một đơn vị.

Đặt $\overline{abcd} = k^2$ ta có $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$ và $k \in N$, $32 \le k < 100$

Suy ra : $101\overline{cd} = k^2 - 100 = (k - 10)(k + 10) \Rightarrow k + 10 \vdots 101$ hoặc $k - 10 \vdots 101$

Mà $(k - 10; 101) = 1 \Rightarrow k + 10 \vdots 101$

Vì $32 \le k < 100$ nên $42 \le k + 10 < 110 \Rightarrow k + 10 = 101 \Rightarrow k = 91$

$\Rightarrow \overline{abcd} = 91^2 = 8281$

Bài 3: Tìm số chính phương có 4 chữ số biết rằng 2 chữ số đầu giống nhau, 2 chữ số cuối giống nhau.

Gọi số chính phương phải tìm là: $\overline{aabb} = n^2$ với $a, b \in N$, $1 \le a \le 9$; $0 \le b \le 9$

Ta có: $n^2 = \overline{aabb} = 11.\overline{a0b} = 11.(100a + b) = 11.(99a + a + b)$ (1)

Nhận xét thấy $\overline{aabb} \vdots 11 \Rightarrow a + b \vdots 11$

Mà $1 \le a \le 9$; $0 \le b \le 9$ nên $1 \le a + b \le 18 \Rightarrow a + b = 11$

Thay a + b = 11 vào (1) được $n^2 = 11^2(9a + 1)$ do đó 9a + 1 là số chính phương

Bằng phép thử với a = 1; 2;…; 9 ta thấy chỉ có a = 7 thoả mãn $\Rightarrow$ b = 4

Số cần tìm là: 7744

Bài 4: Tìm một số có 4 chữ số vừa là số chính phương vừa là một lập phương.

Gọi số chính phương đó là $\overline{abcd}$. Vì abcd vừa là số chính phương vừa là một lập phương nên đặt $\overline{abcd} = x^2 = y^3$ với $x, y \in N$

Vì $y^3 = x^2$ nên y cũng là một số chính phương.

Ta có : $1000 \le \overline{abcd} \le 9999 \Rightarrow 10 \le y \le 21$ và y chính phương

$\Rightarrow y = 16 \Rightarrow \overline{abcd} = 4096$

Bài 5 : Tìm một số chính phương gồm 4 chữ số sao cho chữ số cuối là số nguyên tố, căn bậc hai của số đó có tổng các chữ số là một số chính phương.

Gọi số phải tìm là $\overline{abcd}$ với a, b, c, d nguyên và $1 \le a \le 9$; $0 \le b, c, d \le 9$

$\overline{abcd}$ chính phương $\Rightarrow d \in \{0,1,4,5,6,9\}$

d nguyên tố $\Rightarrow$ d = 5

Đặt $\overline{abcd} = k^2 < 10000 \Rightarrow 32 \le k < 100$

k là một số có hai chữ số mà k^2 có tận cùng bằng 5 $\Rightarrow$ k tận cùng bằng 5

Tổng các chữ số của k là một số chính phương $\Rightarrow$ k = 45

$\Rightarrow \overline{abcd} = 2025$

Vậy số phải tìm là: 2025

Bài 6: Tìm số tự nhiên có hai chữ số biết rằng hiệu các bình phương của số đó và viết số bở hai chữ số của số đó nhưng theo thứ tự ngược lại là một số chính phương

Gọi số tự nhiên có hai chữ sốphải tìm là $\overline{ab}$ (a, b $\in$ N, $1 \le$ a, b ≤ 9)

Số viết theo thứ tự ngược lại $\overline{ba}$

Ta có $\overline{ab}^2 - \overline{ba}^2 = (10a + b)^2 - (10b + a)^2 = 99\,(a^2 - b^2) \vdots 11 \Rightarrow a^2 - b^2 \vdots 11$

Hay $(a - b)(a + b) \vdots 11$

Vì $0 < a - b \le 8$, $2 \le a + b \le 18$ nên $a + b \vdots 11 \Rightarrow a + b = 11$

Khi đó: $\overline{ab}^2 - \overline{ba}^2 = 3^2 . 11^2 . (a - b)$

Để $\overline{ab}^2 - \overline{ba}^2$ là số chính phương thì a – b phải là số chính phương do đó a – b = 1 hoặc a – b = 4

Nếu a – b = 1 kết hợp với a + b = 11 $\Rightarrow$ a = 6, b = 5 , $\overline{ab}$ = 65

Khi đó $65^2 - 56^2 = 1089 = 33^2$

Nếu a – b = 4 kết hợp với a + b = 11 $\Rightarrow$ a = 7,5 loại

Vậy số phải tìm là 65

Bài 7: Cho một số chính phương có 4 chữ số. Nếu thêm 3 vào mỗi chữ số đó ta cũng được một số chính phương. Tìm số chính phương ban đầu.

(Kết quả: 1156)

Bài 8: Tìm số có 2 chữ số mà bình phương của số ấy bằng lập phương của tổng các chữ số của nó.

Gọi số phải tìm là $\overline{ab}$ với a, b $\in$ N, $1 \le a \le 9$; $0 \le b \le 9$

Theo giả thiết ta có: $\overline{ab} = (a + b)^3$

$\Leftrightarrow (10a + b)^2 = (a + b)^3$

$\Rightarrow$ $\overline{ab}$ là một lập phương và a + b là một số chính phương

Đặt $\overline{ab} = t^3$ (t $\in$ N), $a + b = 1^2$ (1 $\in$ N)

Vì $10 \le ab \le 99 \Rightarrow \overline{ab} = 27$ hoặc $\overline{ab} = 64$

Nếu $\overline{ab} = 27 \Rightarrow a + b = 9$ là số chính phương

Nếu $\overline{ab} = 64 \Rightarrow a + b = 10$ không là số chính phương $\Rightarrow$ loại

Vậy số cần tìm là ab = 27

Bài 9 : Tìm 3 số lẻ liên tiếp mà tổng bình phương là một số có 4 chữ số giống nhau.

Gọi 3 số lẻ liên tiếp đó là 2n - 1 ; 2n + 1 ; 2n + 3 (n $\in$ N)

Ta có : $A = (2n - 1)^2 + (2n + 1)^2 + (2n + 3)^2 = 12n^2 + 12n + 11$

Theo đề bài ta đặt $12n^2 + 12n + 11 = \overline{aaaa} = 1111 . a$ với a lẻ và $1 \le a \le 9$

$\Rightarrow 12n(n + 1) = 11(101a - 1)$

$\Rightarrow 101a - 1 \vdots 3 \Rightarrow 2a - 1 \vdots 3$

Vì $1 \le a \le 9$ nên $1 \le 2a - 1 \le 17$ và $2a - 1$ lẻ nên $2a - 1 \in \{3;9;15\}$

$\Rightarrow a \in \{2;5;8\}$

Vì a lẻ $\Rightarrow a = 5 \Rightarrow n = 21$

3 số cần tìm là: 41; 43; 45

Bài 10 : Tìm số có 2 chữ số sao cho tích của số đó với tổng các chữ số của nó bằng tổng lập phương các chữ số của số đó.

$\overline{ab}\,(a + b) = a^3 + b^3$

$\Leftrightarrow 10a + b = a^2 - ab + b^2 = (a + b)^2 - 3ab$

$\Leftrightarrow 3a\,(3 + b) = (a + b)\,(a + b - 1)$

a + b và a + b – 1 nguyên tố cùng nhau do đó

$\begin{cases} a + b = 3a \\ a + b - 1 = 3 + b \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a + b - 1 = 3a \\ a + b = 3 + b \end{cases}$

$\Rightarrow$ $a = 4, b = 8$ hoặc $a = 3, b = 7$

Vậy $\overline{ab} = 48$ hoặc $\overline{ab} = 37$

Chuyên đề 2: PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

1. Tìm nghiệm nguyên của Phương trình và hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

Tuỳ từng bài cụ thể mà làm các cách khác nhau.

VD1: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2x + 3y = 11$ (1)

Cách 1: Phương pháp tổng quát:

Ta có: $2x + 3y = 11$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{11 - 3y}{2} = 5 - y - \dfrac{y - 1}{2}$

Để phương trình có nghiệm nguyên $\Leftrightarrow \dfrac{y-1}{2}$ nguyên

Đặt $\dfrac{y-1}{2} = t \in Z$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} y = 2t + 1 \\ x = -3t + 4 \end{cases}$

Cách 2 : Dùng tính chất chia hết

Vì 11 lẻ $\Rightarrow 2x + 3y$ luôn là số lẻ mà 2x luôn là số chẵn $\Rightarrow 3y$ lẻ $\Rightarrow y$ lẻ

Do đó : $\begin{cases} y = 2t + 1 \quad \text{với} \quad t \in Z \\ x = -3t + 4 \end{cases}$

Cách 3 : Ta nhân thấy phương trình có một cặp nghiệm nguyên đặc biệt là

$x_0 = 4$; $y_0 = 1$

Thật vậy : 2 . 4 + 3.1 = 11 (2)

Trừ (1) cho (2) vế theo vế ta có :

$2(x - 4) + 3(y - 1) = 0$

$\Leftrightarrow 2(x - 4) = -3(y - 1)$ (3)

Từ (3) $\Rightarrow 3(y - 1) \vdots 2$ mà $(2 ; 3) = 1 \Rightarrow y - 1 \vdots 2$

$\Leftrightarrow y = 2t + 1$ với $t \in Z$

Thay $y = 2t + 1$ vào (3) ta có : $x = -3t + 4$

Nhận xét : Với cách giải này ta phải mò ra một cặp nghiệm nguyên (x_0, y_0) của phương trình ax + by = c ; cách này sẽ gặp khó khăn nếu hệ số a, b, c quá lớn.

<u>Các bài tập tương tự :</u> Tìm nghiệm nguyên của phương trình.

a) $3x + 5y = 10$

b) $4x + 5y = 65$

c) $5x + 7y = 112$

VD2 : Hệ phương trình.

Tìm nghiệm nguyên dương của hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} 3x + y + z = 14 & (1) \\ 5x + 3y + z = 28 & (2) \end{cases}$$

<u>Giải</u> : Từ hệ đã cho ta có : $2(x + y) = 14$ vậy $x = 7 - y$ (*)

Thay (*) vào (1) ta được $z = 14 - y - 3x = 2y - 7$

Vì $x > 0$ nên $7 - y > 0 \Rightarrow y < 7$ mà $z > 0$ nên $2y - 7 > 0 \Rightarrow y > \frac{7}{2}$

Vậy $\frac{7}{2} < y < 7$ và $y \in Z \Rightarrow y \in \{4; 5; 6\}$

Giải tiếp hệ đã cho có 3 nghiệm (3; 4; 1); (2; 5; 3); (1; 6; 5)

<u>Bài tập tương tự:</u>

a) Tìm nghiệm nguyên của hệ

$$\begin{cases} 2x - 5y = 5 \\ 2y - 3z = 1 \end{cases}$$

b) Trăm trâu ăn trăm bó cỏ – trâu đứng ăn năm, trâu nằm ăn ba, trâu già 3 con 1 bó. Tìm số trâu mỗi loại.

c) Tìm số nguyên dương nhỏ nhất chia cho 1000 dư 1 và chia cho 761 dư 8.

2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình, hệ phương trình bậc cao.

Phương pháp 1 : Dùng dấu hiệu chia hết để giải phương trình.

VD1: a) Tìm cặp số nguyên (x ; y) thoả mãn phương trình

$$6x^2 + 5y^2 = 74 \quad (1)$$

Cách 1 : Ta có : $6(x^2 - 4) = 5(10 - y^2)$ (2)

Từ (2) $\Rightarrow$ $6(x^2 - 4) \vdots 5$ và $(6 ; 5) = 1 \Rightarrow x^2 - 4 \vdots 5$

$\Rightarrow x^2 = 5t + 4$ với $t \in N$

Thay $x^2 - 4 = 5t$ vào (2) ta có : $y^2 = 10 - 6t$

Vì $x^2 > 0$ và $y^2 > 0 \Rightarrow \begin{cases} 5t + 4 > 0 \\ 10 - 6t > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow -\frac{4}{5} < t < \frac{5}{3}$ với $t \in N$

$\Rightarrow$ t = 0 hoặc t = 1

Với t = 0 $\Rightarrow$ $y^2 = 10$ (loại)

Với t = 1 $\Rightarrow$ $\begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 2 \end{cases}$

Vậy các cặp nghiệm nguyên là :.......................

Cách 2 : Từ (1) ta có $\begin{cases} x^2 + 1 \vdots 5 \\ 0 < x^2 \le 12 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 4$ *hoặc* $x^2 = 9$

Với $x^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 10$ (loại)

Với $x^2 = 9 \Rightarrow y^2 = 4$ (thoả mãn)

Vậy....................

Cách 3 : Ta có :*(1)* $\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 \text{ chẵn} \\ 0 < y^2 \le 14 \end{cases} \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 9$

Vậy...............

VD2 : Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm nguyên

a) $x^5 + 29x = 10(3y + 1)$

b) $7^x = 2^y - 3^z - 1$

<u>Giải :</u> $x^5 - x + 30x = 10(3y+1)$

VP $\not\vdots$ 30 còn VT $\vdots$ 30 $\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm

Phương pháp 2: Phân tích một vế thành tích, một vế thành hằng số nguyên

VD1: Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

a) $xy + 3x - 5y = -3$

b) $2x^2 - 2xy + x - y + 15 = 0$

c) $x^2 + x = y^2 - 19$

Giải : a) Cách 1: $x(y + 3) - 5(y + 3) = -18$

$\Leftrightarrow (x - 5)(y + 3) = -18$...

Cách 2 : $x = \frac{5y-3}{y+3} = 5 - \frac{18}{y+3}$

b) Tương tự.

c) $4x^2 + 4x = 4y^2 - 76$

$\Leftrightarrow (2x + 1)^2 - (2y)^2 = -75...$

Phương pháp 3 : Sử dụng tính chẵn lẻ (đặc biệt của chia hết)

VD2 : Tìm nghiệm nguyên.

$x^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0$

Giải : $\Leftrightarrow x^3 = 2(y^3 + 2z^3)$

$VP \vdots 2 \Rightarrow x^3 \vdots 2 \Rightarrow x \vdots 2$ *đặt* $x = 2k$

$8k^3 = 2(y^3 + 2z^3) \Leftrightarrow 4k^3 = y^3 + 2z^3$

$\Rightarrow y^3 = 4k^3 - 2z^3 = 2(2k^3 - z^3)$

$\Rightarrow$ *y chẵn. Đặt* $y = 2t$ *ta có :*

$8t^3 = 2(2k^3 - z^3) \Rightarrow 4t^3 = 2k^3 - z^3$

$\Rightarrow z^3 = 2k^3 - 4t^3 \Rightarrow$ *z chẵn* $\Rightarrow z = 2m$

$\Rightarrow 8m^3 = 2(k^3 - 2t^3) \Rightarrow$ ......*k chẵn*.......

Phương pháp 4 : Phương pháp sử dụng tính chất của số chính phương

VD1 : Tìm nghiệm nguyên của.

a) $x^2 - 4xy + 5y^2 = 169$

b) $x^2 - 6xy + 13y^2 = 100$

Giải :

a) $(x - 2y)^2 + y^2 = 169 = 0 + 169 = 25 + 144...$

b) $(x - 3y)^2 + (2y)^2 = 100 = 0 + 100 = 36 + 64 = ...$

Phương pháp 5 : Phương pháp công thức nghiệm phương trình bậc 2

VD1 : Tìm nghiệm nguyên của phương trình.

a) $2x^2 - 2xy + x + y + 15 = 0$

b) $5(x^2 + xy + y^2) = 7(x+2y)$ (đề thi học sinh giỏi tỉnh 2009 – 2010)

c) $x(x + 1) = y (y + 1) (y^2 + 2)$

Phương pháp 6 : Phương pháp đặt ẩn phụ

VD: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2} + \frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3} = \frac{7}{6}$ (1)

Đặt $y = x^2 + 2x + 2$ $(y \in Z)$

(1) $\Leftrightarrow \frac{y-1}{y} + \frac{y}{y+1} = \frac{7}{6} \Leftrightarrow 5y^2 - 7y - 6 = 0$

$y_1 = -\frac{3}{5}$ (loại) ; $y_2 = 2$ (thoả mãn) $\Rightarrow x_1 = 0; x_2 = -2$

Các bài tập tương tự:

a) $x^3 + (x + 1)^3 + (x + 2)^3 = (x + 3)^3$

b) $\frac{1}{x(x+2)} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{12}$

**** Một số phương pháp khác.***

VD1 : Tìm nghiệm nguyên của phương trình :

$$2x^2 + 4x = 19 - 3y^2$$

Giải : $\Leftrightarrow 4x^2 + 8x + 4 = 42 - 6y^2$

$$(2x + 2)^2 = 6(7 - y^2)$$

Vì $(2x + 2)^2 \geq 0 \Rightarrow 7 - y^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 \leq 7$

Mà $y \in Z \Rightarrow y = 0 ; \pm 1 ; \pm 2$ Từ đây ta tìm được giá trị tương ứng của x

3. Một số bài toán liên quan tới hình học.

a) Cho tam giác có độ dài của 3 đường cao là những số nguyên dương và đường tròn nội tiếp tam giác đó có bán kính bằng 1(đ.v.đ.d). Chứng minh tam giác đó là tam giác đều

Giải: Gọi độ dài các cạnh và các đường cao tương ứng theo thứ tự là a; b; c và x; y; z. R là bán kính đường tròn nội tiếp.

Ta có $R = 1 \Rightarrow x; y; z > 2$ và giả sử $x \geq y \geq z > 2$

Ta có : $ax = by = cz = (a + b + c).1\ (=2S)$

Suy ra: $x = \dfrac{a+b+c}{a}$; $y = \dfrac{a+b+c}{b}$; $z = \dfrac{a+b+c}{c}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x} = \dfrac{a}{a+b+c}$; $\dfrac{1}{y} = \dfrac{b}{a+b+c}$; $\dfrac{1}{z} = \dfrac{c}{a+b+c}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$ mà $x \geq y \geq z > 2$

$\Rightarrow \dfrac{1}{z} \geq \dfrac{1}{x}$ và $\dfrac{1}{z} \geq \dfrac{1}{y}$ nên $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \leq \dfrac{3}{z}$

$\Rightarrow 1 \leq \dfrac{3}{z} \Rightarrow z \leq 3 \Rightarrow z = 3$ Tương tự ta có: x = 3; y = 3 $\Rightarrow$ tam giác đó là tam giác đều

b) Tìm tất cả các hình chữ nhật với độ dài các cạnh là các số nguyên dương có thể cắt thành 13 hình vuông bằng nhau sao cho mỗi cạnh của hình vuông là số nguyên dương không lớn hơn 4 (đ.v.đ.d)

Giải : Gọi các cạnh hình chữ nhật cần tìm là a và b, cạnh hình vuông là c. Từ giả thiết hình chữ nhật cắt thành 13 hình vuông nên phải có:

$ab = 13c^2$ (1) với $0 < c \leq 4$ (2)

Từ (1) suy ra a hoặc b chia hết cho 13. Vì vai trò a, b như nhau ta có thể giả giả sử a chia hết cho 13, tức là a = 13d

Thay vào (1) ta được : $13db = 13c^2$

Hay $db = c^2$

Ta hãy xét các trường hợp có thể có của c.

Với c = 1, chỉ có thể: d = 1, b = 1, suy ra a = 13

Với c = 2, chỉ có thể: d = 1, b = 4, suy ra a = 13

d = 2, b = 2, suy ra a = 26

d = 4, b = 1, suy ra a = 52

Với c = 3, chỉ có thể: d = 1, b = 9, suy ra a = 13
d = 3, b = 3, suy ra a = 39
d = 9, b = 1, suy ra a = 117

Với c = 4, chỉ có thể: d = 1, b = 16, suy ra a = 13
d = 2, b = 8, suy ra a = 26
d = 4, b = 4, suy ra a = 52
d = 8, b = 2, suy ra a = 104
d = 16, b = 1, suy ra a = 208

Với 12 nghiệm của phương trình (1) chỉ có 4 trường hợp thoả mãn bài toán. Bài toán có 4 nghiệm. Ta tìm được 4 hình chữ nhật thoả mãn đề bài:

(a = 13, b = 1); (a = 26, b = 2); (a = 39, b = 3); (a = 52, b = 4)

<u>Chuyên đề 3</u>: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

(Dành cho bồi dưỡng học sinh giỏi tỉnh)

I. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

**** Các phương pháp***

1. Luỹ thừa khử căn

2. Đặt ẩn phụ

3. Dùng bất đẳng thức

4. Xét khoảng

II. ÁP DỤNG CÁC PHƯƠNG PHÁP

A. Phương pháp luỹ thừa khử căn

1. Giải các phương trình

a) $\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-3}=2(1)$

Điều kiện: $\frac{3}{2} \le x$

Với $x \ge \frac{3}{2}$ PT (1) $\Leftrightarrow x-1+2x-3+2\sqrt{2x^2-5x+3}=4$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2-5x+3}=8-3x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(2x^2-5x+3)=64+9x^2-48x(2) \\ x \le \frac{8}{3} \end{cases}$

PT (2) $\Leftrightarrow x^2-28x+52=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2(tm) \\ x=26(Kotm) \end{array}\right.$

Vậy PT đã cho có nghiệm x=2

b) $3(x^2-x+1)=(x+\sqrt{x-1})^2(1)$

ĐK: $x \ge 1$

Với $x \ge 1$ PT (1) $\Leftrightarrow 3(x^2-x+1)=x^2+2x\sqrt{x-1}+x-1$

$\Leftrightarrow 2x^2-4x+4=2x\sqrt{x-1} \quad \Leftrightarrow x^2-2x+2=x\sqrt{x-1}$

Do $x \ge 1$ nên 2 vế của PT này không âm vì vậy PT này

$\Leftrightarrow x^4-4x^2+4-4x^3-8x+4x^2=x^3-x^2$

$\Leftrightarrow x^4-5x^3+9x^2-8x+4=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2(x^2-x+1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ x^2-x+1=0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x=2$ TM

c) $\sqrt[3]{x-2}-\sqrt[3]{2x-2}=-1(1)$

Giải:

Pt (1) $\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x-2}-\sqrt[3]{2x-2}\right)^3=-1$

$\Leftrightarrow x-2-2x+2-3\sqrt[3]{(x-2)(2x-2)}.(\sqrt[3]{(x-2)}-\sqrt[3]{(2x-2)}=-1$

$\Rightarrow 1-x=3\sqrt[3]{2x^2-6x+4}$

$\Leftrightarrow 1-3x+3x^2-x^3=27(2x^2-6x+4)$

$\Leftrightarrow x^3+51x^2-159x+107=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+52x-107)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-52x+107=0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-26+\sqrt{783} \\ x=-26-\sqrt{783} \end{array}\right.$

B. Phương pháp đặt ẩn phụ

(2) Giải các phương trình:

a) $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x+1}=3$

Giải:

ĐK: $x \geq -1$

Đặt $\sqrt[3]{x-2}=a$; $\sqrt{x+1}=b\,(b \geq 0)$

Ta có hệ PT $\begin{cases} a^3-b^2=-3 \\ a+b=3 \end{cases}$

Suy ra $a^3-a^2+6a-6=0$ $\Leftrightarrow (a-1)(a^2+6)=0$

$\Leftrightarrow a=1 \Rightarrow x=3(T/m)$

Vậy phương trình nghiệm $x=3$

b. $x^2-\sqrt{x+5}=5(1)$

ĐK: $x \geq -5$

Đặt : $\sqrt{x+5}=y$ $(y \geq 0)$ ta có hệ phương trình

$\begin{cases} x^2-y=5 \\ y^2-x=5 \end{cases} \Rightarrow (x^2-y^2)+(x-y)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x+y+1=0 \end{cases}$

+) $x=y \Rightarrow \sqrt{x+5}=x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2-x-5=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x=\dfrac{1 \pm \sqrt{21}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$ (Ko T/m)

+) $x+y+1=0$ $\Rightarrow x+\sqrt{x+5}+1=0$

$\Leftrightarrow x+1=-\sqrt{x+5}$ $\Leftrightarrow \sqrt{x+5}=-(x+1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \leq 0 \\ x^2+2x+1=x+5(*) \end{cases}$

PT (*) $x^2+x-4=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ x=\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$ (ko t/m)

Vậy PT vô nghiệm

c) $(x+2)(x+4)+5(x+2).\sqrt{\dfrac{x+4}{x+2}}=6$; ĐK: $\dfrac{x+4}{x+2} \geq 0$

Đặt $\sqrt{\dfrac{x+4}{x+2}}.(x+2)=a \Rightarrow a^2=(x+4)(x+2)$; Ta có PT: $a^2+5a-6=0$; $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=-6 \end{array}\right.$

+) $a=1 \Rightarrow x^2+6x+8-1=0$

$\Rightarrow x^2+6x+7=0$

$$\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-3+\sqrt{2}}{1}(tm) \\ x=-3-\sqrt{2} \end{array}\right.$$

+) $a=-6 \Rightarrow x^2+6x+8-36=0$

$\Rightarrow x^2+6x-28=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x=-3+\sqrt{37} \\ x=-3-\sqrt{37}(tm) \end{array}\right.$

Vậy pt có 2 nghiệm $\quad x=-3+\sqrt{2};-3-\sqrt{37}$

C. áp dụng bất đẳng thức

(3) Giải các phương trình

a) $\sqrt{2x+4+6\sqrt{2x-5}}+\sqrt{2x-4-2\sqrt{2x-5}}=4\,(1)$ $\quad$ ĐK: $x\ge\dfrac{5}{2}$

Với Đk: $x\ge\dfrac{5}{2}$ PT (1) $\quad \Leftrightarrow \left|\sqrt{2x-5}+3\right|+\left|\sqrt{2x-5}-1\right|=4$

Ta có: $\quad \left|\sqrt{2x-5}+3\right|+\left|\sqrt{2x-5}-1\right|\ge 4$

Đẳng thức xẩy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{2x-5}+3)(\sqrt{2x-5}-1)\le 0 \\ x\ge\dfrac{5}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \dfrac{5}{2}\le x\le 3$

Vậy nghiệm của PT đã cho là $\dfrac{5}{2}\le x\le 3$

b) $\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}=x^2-10x+27(1)$

Giải

ĐK $4\le x\le 6$

Trên TXĐ $\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}\le\sqrt{(1^2+1^2)(x-4+6-x)} \quad \Leftrightarrow \sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}\le 2$

Lại có $\quad x^2-10x+27=(x-5)^2+2\ge 2$

$\Rightarrow x^2-10x+27\ge\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}$

Đẳng thức xẩy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-4}=\sqrt{6-x} \\ x=5 \\ 4\le x\le 6 \end{cases} \quad \Leftrightarrow x=5$$

Vậy PT (1) có nghiệm là x=5

c) Giải phương trình

$\sqrt{x\ \ +x-1}+\sqrt{x-x^2+1}=x^2-x+2$

Giải

ĐK: $\begin{cases} x^2+x-1\ge 0 \\ -x^2+x+1\ge 0 \end{cases}$

áp dụng BĐT cô si cho các số không âm ta có

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{(x^2+x-1).1}\le\dfrac{x^2+x-1+1}{2}\\ \sqrt{(-x^2+x+1).1}\le\dfrac{-x^2+x+1+1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\quad \sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x-x^2+1}\le x+1$$

Ta có $x^2-x+2\ge x+1$ (Vì $(x-1)^2\ge 0$)

$\Rightarrow \sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x-x^2+1}\le x^2-x+2$

Đẳng thức xẩy ra $\Leftrightarrow x=1$; Vậy pt có nghiệm là x=1

D. Xét khoảng

(4) Giải các PT

a) $\sqrt{x^2+48}=4x-3+\sqrt{x^2+35}(1)$

Giải

TXĐ: $\forall x$

PT(1) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+48}-\sqrt{x^2+35}=4x-3 \quad\Leftrightarrow \dfrac{13}{\sqrt{x^2+48}+\sqrt{x^2+35}}=4x-3$

Thấy $x=1$ là nghiệm của PT (1)

+) $x>1\Rightarrow\sqrt{x^2+48}+\sqrt{x^2+35}>13 \quad\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\dfrac{13}{\sqrt{x^2+48}+\sqrt{x^2+35}}<1\\ 4x-3>1\end{array}\right\}\Rightarrow$PT vô nghiệm

+) $\dfrac{3}{4}\le x<1$

$\Rightarrow\sqrt{x^2+48}+\sqrt{x^2+35}<13 \quad\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\dfrac{13}{\sqrt{x^2+48}+\sqrt{x^2+35}}>1\\ 4x-3<1\end{array}\right\}\Rightarrow$ PT vô nghiệm

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là x=1

b) $\sqrt{5-x^6}-\sqrt[3]{3x^4-2}=1(1)$

Giải

Ta có:

$|x|>1$ thì $x^4;x^6>1$

$|x|<1$ thì $x^4;x^6<1$

+) Xét $|x|>1\ \Rightarrow 5-x^6<4;3x^4-2>1$

$\Rightarrow\sqrt{5-x^6}-\sqrt[3]{3x^4-2}$

 PT (1) vô nghiệm

Xet $|x|<1$ týừng tự ta suy ra phýừng trõnh vụ nghiệm

Thấy x= 1 hoặc x= -1 là nghiệm của PT (1)

Bài tập:

Giải các PT

(1) a) $2(x^2+2)=5\sqrt{x^3+1}(B)$

(b) $x+\sqrt{17-x^2}+x.\sqrt{17-x^2}=9(B)$

(2) $\sqrt{\sqrt{3}-x}=x.\sqrt{\sqrt{3}+x}$ (A)

(3) $\sqrt{x^2+24}+1=3x+\sqrt{x^2+8}$ (D)

(4) $\sqrt{6-x}+\sqrt{x+2}=x^2-6x+13(C)$

(5) $\sqrt{4-3\sqrt{10-3x}}=x-2(A)$

(6) $\sqrt[5]{27}.x^{10}-5x^6+\sqrt[5]{864}=0$ (C)

III. Giải hệ phương trình

* Các phương pháp:

1. Phương pháp thế

2. Công thức trừ, nhân, chia các vế

3. Đặt ẩn phụ

4. Dùng bất đẳng thức.

IV. áp dụng các phương pháp.

A. Phương pháp thế.

1. Giải các hệ pgương trình

a) $\begin{cases}3x+y=11\\7x+4y=29\end{cases}$

Giải

Hệ đã cho tương đương với

$\begin{cases}y=11-3x\\7x+4(11-3x)=29\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=11-3x\\5x=15\end{cases} \quad \begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm là: (x;y) = (3;2)

b) $\begin{cases}x^2-5xy+6^2=0\\4x^2+2xy+6y-27=0\end{cases}$

Giải

Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases}(x-2y)(x-3y)=0\\4x^2+2xy+6y-27=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2y\\20y^2+6y-27=0\end{cases}\\ \begin{cases}x=3y\\42y^2+6y-27=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2y\\ \left[\begin{array}{l}y=\dfrac{\sqrt{549}-3}{20}\\ y=\dfrac{-3-\sqrt{549}}{20}\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x=3y\\ \left[\begin{array}{l}y=\dfrac{1+\sqrt{127}}{14}\\ y=\dfrac{-1-\sqrt{127}}{14}\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.$$

$\begin{cases}x=\dfrac{-3+\sqrt{549}}{10}\\ y=\dfrac{-3+\sqrt{549}}{20}\end{cases}$ Hoặc $\begin{cases}x=\dfrac{-3-\sqrt{549}}{10}\\ y=\dfrac{-3-\sqrt{549}}{20}\end{cases}$

$\begin{cases}x=\dfrac{-3+3\sqrt{127}}{14}\\ y=\dfrac{-1+\sqrt{127}}{14}\end{cases}$ Hoặc $\begin{cases}x=\dfrac{-3-3\sqrt{127}}{14}\\ y=\dfrac{-1-\sqrt{127}}{14}\end{cases}$

c) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx\\x^{2003}+y^{2003}+z^{2003}=3^{2004}\end{cases}$

Giải:

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx(1)\\x^{2003}+y^{2003}+z^{2003}=3^{2004}(2)\end{cases}$$

Ta có:

PT (1) $\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx=0$

$\Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$

$\Leftrightarrow x=y=z$

Thế vào (2) ta có: $3x^{2003}=3^{2004}$

$x^{2003}=3^{2003}$

$x=3$

Do đó x= y=z = 3

Vậy nghiệm của hệ đã cho là:

(x;y;z) = (3;3;3)

B. Phương pháp cộng, trừ, nhân, chia các vế

(2) Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases}5x\sqrt{3}+y=2\sqrt{2}\\x\sqrt{6}-y\sqrt{2}=2\end{cases}$

Giải:

Hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} 5x\sqrt{6}+y\sqrt{2}=4 \\ x\sqrt{6}-y\sqrt{2}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\sqrt{6}x=6 \\ 5x\sqrt{3}+y=2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ y=\dfrac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

b) $\begin{cases} x^3=2y+1 \\ y^3=2x+1 \end{cases}$

Giải:

Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x^3=2y+1 \\ x^3-y^3+2(x-y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3=2y+1 \\ (x-y)(x^2+xy+y^2+2)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3=2y+1 \\ x=y \end{cases} \quad (\text{do } x^2+xy+y^2+2>0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-2x-1=0 \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x^2-x-1)=0 \\ x=y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ y=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

c) $\begin{cases} (x+xy+y=1 \\ y+yz+z=4 \\ z+zx+x=9 \end{cases}$ trong đó $x,y,z\succ 0$

Giải

Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} (x+1)(y+1)=2 \\ (y+1)(z+1)=5 \\ (z+1)(x+1)=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [(x+1)(y+1)(z+1)]^2=100 \\ (x+1)(y+1)=2 \\ (y+1)(z+1)=5 \\ (z+1)(x+1)=10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(y+1)(z+1)=10 \\ (x+1)(y+1)=2 \\ (y+1)(z+1)=5 \\ (z+1)(x+1)=10 \end{cases} \quad (\text{Do x,y,z>0})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z+1=5 \\ x+1=2 \\ y+1=1 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=4 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm là

(x;y;z)=(1;0;4)

C. Phương pháp đặt ẩn phụ

(3). Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} x^2+x=5+y^2+y \\ x^3+y^3=x^2y+xy^2+6 \end{cases}$

Đặt: x-y=a; x+y =b

Hệ đã cho trở thành $\begin{cases} ab+a=5(1) \\ a^2b=6(2) \end{cases}$

Từ PT (2) ta suy ra $a \neq 0$

Do đó: $b=\dfrac{6}{a^2}$

Thế vào (1) ta được: $\dfrac{6}{a}+a=5$

$\Leftrightarrow a^2-5a+6=0$ (Vì $a \neq 0$)

$\Leftrightarrow (a-2)(a-3)=0 \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ a=3 \end{cases}$

+) $a=2 \Rightarrow b=\dfrac{3}{2}$ Hay $\begin{cases} x+y=\dfrac{3}{2} \\ x-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{7}{4} \\ y=\dfrac{-1}{4} \end{cases}$

+) $a=3 \Rightarrow b=\dfrac{2}{3}$ Hay $\begin{cases} x+y=\dfrac{2}{3} \\ x-y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{11}{6} \\ y=\dfrac{-7}{6} \end{cases}$

Tóm lại hệ phương trình đã cho có nghiệm là:

(x;y) = $\left(\dfrac{7}{4};\dfrac{-1}{4}\right);\left(\dfrac{11}{6};\dfrac{-7}{6}\right)$

b) $\begin{cases} x^3+x^3y^3+y^3=17 \\ x+xy+y=5 \end{cases}$

Giải: Đặt x+y = a; xy=b

Hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} a^3+b^3-3ab=17 \\ a+b=5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a=5-b \\ b^2-5b+6=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a=5-b \\ (b-2)(b-3)=0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$ Hoặc $\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$

+) $\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$ Ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - y \\ y^2 - 3y + 2 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - y \\ (y-1)(y-2) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ Hoặc $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

+) $\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$ Ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - y \\ y^2 - 2y + 3 = 0 \end{cases}$ (Vô nghiệm)

Hệ này vô nghiệm

Vậy nghiệm của hệ đã cho là:

(x;y) = (1;2); (2;1)

c) $\begin{cases} (x + y)^4 = 6x^2y^2 - 215 \\ xy(x^2 + y^2) = -78 \end{cases}$

Giải

Hệ đã cho tương đương với

$\begin{cases} x^4 + 4x^3y + 4xy^3 + y^4 = -215 \\ x^3y + xy^3 = -78 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 78x^4 + 312x^3y + 312xy^3 + 78y^4 = -16770 \\ 215x^3y + 215xy^3 = -16770 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 78x^4 + 97x^3y + 97xy^3 + 78y^4 = 0(1) \\ x^3y + xy^3 = -78 \end{cases}$

Đặt $t = \dfrac{x}{y}$ PT (1) trở thành $78t^4 + 97t^3 + 97t + 78 = 0$

$\Leftrightarrow (3t+2)(2t+3)(13t^2 - 12t + 13) = 0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-2}{3} \\ t = \dfrac{-3}{2} \end{array} \right.$

+) $t = \dfrac{-2}{3} \Rightarrow x = \dfrac{-2}{3}y$

Thế vào (2) ta được $\dfrac{26}{27}y^4 = 78$

$\Leftrightarrow y^4 = 81$

$\Leftrightarrow y = 3$ Hoặc $y = -3$

Suy ra: $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$ Hoặc $\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$

+) $t = \frac{-3}{2} \Rightarrow x = \frac{-3}{2}y$

Thế vào (2) ta được $\frac{39}{8}y^4 = 78$

$\Leftrightarrow y^4 = 16$

$\Leftrightarrow y = 2$ Hoặc $y = -2$

Suy ra: $\begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases}$ Hoặc $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$

Tóm lại hệ đã cho có nghiệm là:

(x;y) = (-2;3); (2;-3); (-3;2) ; (3;-2)

D. áp dụng bất đẳng thức

(4) Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^4 + y^4 + z^4 = xyz \end{cases}$

Giải:

Nhận xét: Từ BĐT $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$

Ta suy ra: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca (*)$

áp dụng liên tiếp BĐT (*) ta được

$x^4 + y^4 + z^4 \geq x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq xyz(x+y+z)$

$\Leftrightarrow x^4 + y^4 + z^4 \geq xyz$

Đẳng thức xẩy ra khi: $x = y = z = \frac{1}{3}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm là: $(x;y;z) = \left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$

b) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt[4]{32-x} = y^2 - 3 \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt{32-x} = 24 - 6y \end{cases}$

Giải:

ĐK: $0 \leq x \leq 32$

Hệ đã cho tương đương với

$\begin{cases} (\sqrt{x} + \sqrt{32-x}) + (\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{32-x}) = y^2 - 6y + 21 \\ \sqrt{x} + \sqrt[4]{32-x} = y^2 - 3 \end{cases}$

Theo bất đẳng thức BunhiaCốp xki ta có

$(\sqrt{x} + \sqrt{32-x})^2 \leq (1^2 + 1^2)(x + 32 - x) = 64$

$\Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{32-x} \leq 8$

$\left(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{32-x}\right)^4 \leq \left[2(\sqrt{x} + \sqrt{32-x})\right]^2 \leq 256$

$\Rightarrow \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{32-x}\le 4$

Suy ra $(\sqrt{x}+\sqrt{32-x})+(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{32-x})\le 12$

Mặt khác $y^2-6y+21=(y-3)^2+12\ge 12$

Đẳng thức xẩy ra khi x= 16 và y=3 (t/m)

Vậy hệ đã có nghiệm là (x;y) = (16;3)

Chuyên đề 4:

BẤT ĐẲNG THỨC VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

A - CÁC PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

1) Phương pháp đổi tương đương

□ Để chứng minh: $A\ge B$

Ta biến đổi $A\ge B\Leftrightarrow A_1\ge B_1\ge \ldots A_n\ge B_n$ (đây là bất đẳng thức đúng)

Hoặc từ bất đẳng thức đứng $A_n\ge B_n$, ta biến đổi

$A_n\ge B_n\Leftrightarrow A_{n-1}\ge B_{n-1}\ge\ldots A_1\ge B_1\Leftrightarrow A\ge B$

Ví dụ 1.1

$CMR: a)\ 2(a^2+b^2)\ge(a+b)^2 \qquad (1)$

b) $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca \quad (1)$

Giải

$a)(1)\Leftrightarrow 2(a^2+b^2)-(a+b)^2\ge 0$

$\Leftrightarrow a^2+b^2-2ab\ge 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2\ge 0 \quad (2)$

Do bất đẳng thức (2) đúng nên bất đẳng thức (1) được chứng minh.

$b)(1)\Leftrightarrow 2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)\ge 0$

b) $\Leftrightarrow (a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\ge 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0 \quad (2)$

Bất đẳng thức (2) đúng suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 1.2 CMR

$a)\quad 2(a^4+b^4)\ge(a+b)(a^3+b^3) \qquad (1)$

$b)\quad 3(a^4+b^4+c^4)\ge(a+b+c)(a^3+b^3+c^3) \quad (1)$

Giải

$$a)(1) \Leftrightarrow 2a^4 + 2b^4 - \left(a^4 + a^3b + ab^3 + b^4\right) \ge 0$$
$$\Leftrightarrow \left(a^4 - a^3b\right) - \left(ab^3 - b^3\right) \ge 0$$
$$\Leftrightarrow a^3(a-b) - b^3(a-b) \ge 0$$
$$\Leftrightarrow (a-b)\left(a^3 - b^3\right) \ge 0 \Leftrightarrow (a-b)^2\left(a^2 + ab + b^2\right) \ge 0 \qquad (2)$$

Do bất đẳng thức (2) đúng suy ra điều phải chứng minh.

$$b)(1) \Leftrightarrow 3a^4 + 3b^4 + 3c^4 - \left(a^4 + a^3b + a^3c + b^4 + ab^3 + b^3c + ac^3 + bc^3 + c^4\right) \ge 0$$
$$\Leftrightarrow \left(a^4 + b^4 - a^3b - ab^3\right) + \left(b^4 + c^4 - b^3c - bc^3\right) + \left(a^4 + c^4 - a^3c - ac^3\right) \ge 0$$
$$\Leftrightarrow (a-b)^2\left(a^2 + ab + b^2\right) + (b-c)^2\left(b^2 + bc + c^2\right) + (a-c)^2\left(a^2 + ac + c^2\right) \ge 0$$

Ví dụ 1.3

$CMR:$ a) $\left(a^2 + b^2\right)\left(x^2 + b^2\right) \ge (\text{ax} + by)^2 \qquad (1)$

b) $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \ge \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \qquad (1)$

Giải

$$a)(1) \Leftrightarrow a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 \ge a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2$$
$$\Leftrightarrow a^2y^2 - 2abxy + b^2y^2 \ge 0$$
$$\Leftrightarrow (ay - bx)^2 \ge 0$$

$$b)(1) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{\left(a^2 + b^2\right)\left(c^2 + d^2\right)} \ge (a+c)^2 + (b+d)^2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(a^2 + b^2\right)\left(c^2 + d^2\right)} \ge ac + bd \qquad (2)$$

Nếu ac + bd < 0 thì (2) đúng

Nếu $ac + bd \ge 0$ thì

$$(2) \Leftrightarrow \left(a^2 + b^2\right)\left(c^2 + d^2\right) \ge (ac + bd)^2$$
$$\Leftrightarrow a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \ge a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2$$
$$\Leftrightarrow (ad - bc)^2 \ge 0 \qquad \Rightarrow dpcm$$

Ví dụ 1.4

Cho a, b, c > 0, chứng minh rằng: $\dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{c}\dfrac{c^2}{a} \ge a + b + c \qquad (1)$

Giải

$$(1) \Leftrightarrow a^3c + b^3a + c^3b - a^2bc - b^2ac - c^2ab \ge 0$$

$$\Leftrightarrow ac\left(a^2 - 2ab + b^2\right) + ab\left(b^2 - 2bc + c^2\right) + bc\left(c^2 - 2ca + a^2\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow ac(a-b)^2 + ab(b-c)^2 + bc(c-a)^2 \ge 0 \qquad \Rightarrow dpcm$$

Ví dụ 1.5

Cho a, b, c > 0. CMR: $a^2(b+c-a) + b^2(a+c-b) + c^2(b+a-c) \le 3abc \quad (1)$

Giải

$G/s \quad a,b \ge c > 0$

$$(1) \Leftrightarrow 3abc - a^2(b+c-a) + b^2(a+c-b) + c^2(b+a-c) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow a\left(a^2 - ab - ac + bc\right) + b\left(b^2 - bc - ba + ac\right) + c\left(c^2 - ac - bc + ab\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(c-a)(c-b) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)\left(a^2 - ac - b^2 + bc\right) + c(a-c)(b-c) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2(a+b-c) + c(a-c)(b-c) \ge 0$$

Suy ra ĐPCM.

2) Phương pháp biến đổi đồng nhất

Để chứng minh BĐT: A ≥ B. Ta biến đổi biểu thức A – B thành tổng các biểu thức có giá trị không âm.

Ví dụ 2.1

Chứng minh rằng:

$a) a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \ge ab + ac + ad \qquad (1)$

$b) a^2 + 4b^2 + 4c^2 \ge 4ab - 4ac + 8bc \qquad (1)$

Giải

$a)$ Ta có $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - ac - ad$

$$= \left(\frac{a^2}{4} - ab + b^2\right) + \left(\frac{a^2}{4} - ac + c^2\right) + \left(\frac{a^2}{4} - ad + d^2\right) + \frac{a^2}{4}$$

$$= \left(\frac{a}{2} - b\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - c\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - d\right)^2 + \frac{a^2}{4} \ge 0$$

$b)$ Ta có $: a^2 + 4b^2 + 4c^2 - 4ab + 4ac - 8bc$

$$= \left(a^2 - 4ab + 4b^2\right) + 4c^2 + (4ac - 8bc)$$

$$= (a-2b)^2 + 4c^2 + 4c(a-2b)$$

$$= (a - 2b + 2c)^2 \ge 0$$

Ví dụ 2.2

Chứng minh rằng:

a) $4\left(a^3+b^3\right)\ge\left(a+b\right)^3$ với a, b > 0

b) $8\left(a^3+b^3+c^3\right)\ge\left(a+b\right)^3+\left(b+c\right)^3+\left(c+a\right)^3$ với a, b, c > 0

c) $\left(a+b+c\right)^3\ge a^3+b^3+c^3+24abc$ với a, b, c ≥ 0

Giải

$a)$ Ta có $:4\left(a^3+b^3\right)-\left(a+b\right)^3=\left(a+b\right)\left[4\left(a^2-ab+b^2\right)-\left(a+b\right)^2\right]$

$=3\left(a+b\right)\left(a-b\right)^2\ge 0$

$b)$ Ta có $:8\left(a^3+b^3+c^3\right)-\left(a+b\right)^3-\left(b+c\right)^3-\left(c+a\right)^3$

$=\left[4\left(a^3+b^3\right)-\left(a+b\right)^3\right]+\left[4\left(a^3+c^3\right)-\left(c+a\right)^3\right]+\left[4\left(b^3+c^3\right)-\left(b+c\right)^3\right]$

$=3\left(a+b\right)\left(a-b\right)^2+4\left(a+c\right)\left(a-c\right)^2+3\left(b+c\right)\left(b-c\right)^2\ge 0$

$c)$ Ta có $:\left(a+b+c\right)^3-a^3-b^3-c^3-24abc$

$=\left(a+b\right)^3+3\left(a+b\right)^2c+3\left(a+b\right)c^2+c^3-a^3-b^3-c^3-24abc$

$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2c+6abc+3ac^2+3bc^2-a^3-b^3-24abc$

$=3\left(a^2b+c^2b-2abc\right)+3\left(a^2c+b^2c-2abc\right)+3\left(b^2a+c^2a-2abc\right)$

$=3b\left(a-c\right)^2+3c\left(a-b\right)^2+3a\left(b-c\right)^2\ge 0$

Ví dụ 2.3

Với a, b, c > 0. Chứng minh rằng:

$a)\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\ge\dfrac{4}{a+b}$

$b)\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\ge\dfrac{9}{a+b+c}$

$c)\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\ge\dfrac{3}{2}$

Giải

$a)$ Ta có $:\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{4}{a+b}=\dfrac{\left(a+b\right)^2-4ab}{a+b}=\dfrac{\left(a-b\right)^2}{a+b}\ge 0$

$b)$Ta có $:\left(a+b+c\right)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)-9=\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}-2\right)+\left(\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b}-2\right)+\left(\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{a}-2\right)$

$=\dfrac{\left(a-b\right)^2}{ab}+\dfrac{\left(b-c\right)^2}{bc}+\dfrac{\left(a-c\right)^2}{ac}\ge 0$

$c)$Ta có: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2}=\left(\frac{a}{b+c}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{b}{c+a}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{c}{a+b}-\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{(a-b)+(a-c)}{2(b+c)}+\frac{(b-a)+(b-c)}{2(c+a)}+\frac{(c-a)+(c-b)}{2(a+b)}$

$=\frac{1}{2}(a-b)\left(\frac{1}{b+c}-\frac{1}{c+a}\right)+\frac{1}{2}(b-c)\left(\frac{1}{a+c}-\frac{1}{a+b}\right)+\frac{1}{2}(c-a)\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{b+c}\right)$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)}+\frac{(b-c)^2}{(a+c)(a+b)}+\frac{(a-c)^2}{(a+b)(b+c)}\right]\geq 0$

Cách 2

Ta có: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2}=\left(\frac{a}{b+c}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{b}{c+a}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{c}{a+b}+1\right)-3$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{(a+b)+(a+c)}{b+c}+\frac{(a+b)+(b+c)}{a+c}+\frac{(a+c)+(b+c)}{a+b}-6\right]$

$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}-2\right)+\left(\frac{b+c}{a+c}+\frac{a+c}{b+c}-2\right)+\left(\frac{a+c}{a+b}+\frac{a+b}{a+c}-2\right)\right]\geq 0$

Ví dụ 2.4

$a)$ Cho a, b $\geq$ 0. CMR: a + b $\geq 2\sqrt{ab}$ (Bất đẳng thức Cô – si)

$b)$ Cho a, b, c $\geq$ 0. CMR: a + b + c $\geq 3\sqrt[3]{abc}$ (Bất đẳng thức Cô – si)

$c)$ Cho a $\geq$ b $\geq$ c và $x\leq y\leq z$.CMR

$(a+b+c)(x+y+z)\geq 3(\mathrm{ax}+by+cz)$ (Bất đẳng thức Trê bư sếp)

Giải

a) Ta có: $a+b-2\sqrt{ab}=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\geq 0$

b) $a+b+c-3\sqrt[3]{abc}=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\right)\left[\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2+\left(\sqrt[3]{c}-\sqrt[3]{b}\right)^2+\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{c}\right)^2\right]\geq 0$

c) $(a+b+c)(x+y+z)-3(\mathrm{ax}+by+cz)$
$=(y-x)(a-b)+(z-x)(b-c)+(x-z)(c-a)\geq 0$

Ví dụ 2.5

Cho a, b, c > 0. Chứng minh:

$a)\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geq a+b+c$

$b)\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geq\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}$

Giải

$$a)\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}-\left(a+b+c\right)=\frac{1}{2}c\frac{\left(a-b\right)^2}{ab}+\frac{1}{2}b\frac{\left(a-c\right)^2}{ac}+\frac{1}{2}a\frac{\left(b-c\right)^2}{bc}\geq 0$$

$$b)\left(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\right)^2-3\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{c^2}{a^2b^2}\left(a^2-b^2\right)^2+\frac{a^2}{c^2b^2}\left(c^2-b^2\right)^2+\frac{b^2}{a^2c^2}\left(a^2-c^2\right)^2\right]\geq 0$$

Ví dụ 2.6

Chứng minh rằng

$$a)\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\geq\frac{2}{1+ab}\quad \text{nếu } ab\geq 0$$

$$b)\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\leq\frac{2}{1+ab}\quad \text{nếu } a^2+b^2<2$$

$$c)\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1-b^2}\geq\frac{2}{1-ab}\quad \text{nếu } -1<a,\ b<1$$

$$d)\frac{1}{\left(1+a\right)^2}+\frac{1}{\left(1+b\right)^2}\geq\frac{1}{1+ab}\quad \text{nếu } a,\ b>0$$

Giải

$$a)\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}-\frac{2}{1+ab}=\left(\frac{1}{1+a^2}-\frac{1}{1+ab}\right)+\left(\frac{1}{1+b^2}-\frac{1}{1+ab}\right)$$

$$\frac{\left(a-b\right)^2\left(ab-1\right)}{\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(ab+1\right)}\geq 0$$

$$b)\left|ab\right|\leq\frac{a^2+b^2}{2}=1\Rightarrow\begin{cases}ab+1\geq 0\\ ab-1\leq 0\end{cases}\Rightarrow\frac{\left(a-b\right)^2\left(ab-1\right)}{\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(ab+1\right)}\leq 0$$

$$c)\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1-b^2}-\frac{2}{1-ab}=\left(\frac{1}{1-a^2}-\frac{1}{1-ab}\right)+\left(\frac{1}{1-b^2}-\frac{1}{1-ab}\right)$$

$$\frac{\left(a-b\right)^2\left(1-a^2b^2\right)}{\left(1-a^2\right)\left(1-b^2\right)\left(ab-1\right)^2}\geq 0$$

$$d)\frac{1}{\left(1+a\right)^2}+\frac{1}{\left(1+b\right)^2}-\frac{1}{1+ab}=\frac{ab\left(a-b\right)^2+\left(ab-1\right)^2}{\left(1+a\right)^2\left(1+b\right)^2\left(1+ab\right)}\geq 0$$

3) Phương pháp sử dung tính chất của bất đẳng thức

Cơ sở của phương pháp này là các tính chất của bất đẳng thức và một số bất đẳng thức cơ bản như:

$a) a \geq b, b \geq c \Rightarrow a \geq c$; $b) a \geq b$ và $a.b > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$

$c) \begin{cases} a \geq b \geq 0 \\ c \geq d \geq 0 \end{cases} \Rightarrow ac \geq bd$; $d) (a-b)^2 \geq 0$

$e) a, b > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$

Ví dụ 3.1

Cho a + b > 1 . Chứng minh: $a^4 + b^4 > \frac{1}{8}$

Giải

$$(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} > \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a^4 + b^4 \geq \frac{(a^2+b^2)^2}{2} > \frac{1}{8}$$

Ví dụ 3.2

Với a, b, c > 0. CMR

$a) \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq ab + ac + bc$

$b) \frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq a + b + c$

Giải

$a)$ Ta có: $\frac{x^2}{y} \geq x^2 + xy - y^2 \quad (x, y > 0)$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq (a^2 + ab - b^2) + (b^2 + bc - c^2) + (c^2 + ac - a^2) = ab + ac + bc$$

$b)$ Ta có: $\frac{x^3}{y^2} \geq 3x - 3y \quad (x, y > 0)$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq (3a - 2b) + (3b - 2c) + (3c - 2a) = a + b + c$$

Ví dụ 3.3

Cho a, b, c > 0. CMR:

$a) \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$

$b) \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$

Giải

a) dễ dàng chứng minh $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\ge 2c\Rightarrow$ đpcm

b) dễ dàng chứng minh $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b+c}{4}\ge a\Rightarrow$ đpcm

Ví dụ 3.4

$a)$ cho x, y, z >0. t/m: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4.CMR:\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\le 1$

b) Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh

$$\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{a+c-b}+\frac{1}{b+c-a}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

c) Cho a, b, c > 0 thỏa mãn: $abc = ab + bc + ca$. Chứng minh:

$$\frac{1}{a+2b+3c}+\frac{1}{b+2c+3a}+\frac{1}{c+2a+3b}\le\frac{3}{16}$$

Giải

$a)$ Ta có: $a,b>0\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$

$$\Rightarrow\frac{1}{2x+y+z}=\frac{1}{(x+y)+(x+zx)}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}\right)\le\frac{1}{16}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

Tương tự: $\frac{1}{x+2y+z}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{z}\right);\frac{1}{x+y+2z}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{z}\right)$

$$\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\le\frac{4}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1$$

$b)\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{a-b+c}\ge\frac{4}{2a}=\frac{2}{a}$

$\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}\ge\frac{2}{b};$

$\frac{1}{a-b+c}+\frac{1}{b+c-a}\ge\frac{2}{c}$

$$\Rightarrow\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{a-b+c}+\frac{1}{b+c-a}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

$c)\dfrac{1}{a+2b+3c}=\dfrac{1}{(a+c)+2(b+c)}\le\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{1}{a+c}+\dfrac{1}{2(b+c)}\right]\le\dfrac{1}{16a}+\dfrac{1}{32b}+\dfrac{3}{32c}$

tt: $\dfrac{1}{3a+b+2c}\le\dfrac{3}{32a}+\dfrac{1}{16b}+\dfrac{1}{32c};\dfrac{1}{2a+3b+c}\le\dfrac{1}{32a}+\dfrac{3}{32b}+\dfrac{1}{16c}$

$\Rightarrow\dfrac{1}{a+2b+3c}+\dfrac{1}{3a+b+2c}+\dfrac{1}{2a+3b+c}\le\dfrac{6}{32}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)=\dfrac{3}{16}$

Ví dụ 3.5

Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng:

$a)\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{c}{c+a}<2$

$b)\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\ge\dfrac{a}{1+a^2}+\dfrac{b}{1+b^2}+\dfrac{c}{1+c^2}$

Giải

a) áp dụng BĐT: $x>y>0,t>0$. ta có: $\dfrac{y}{x}<\dfrac{y+t}{x+t}$

$\text{Ta có}:\dfrac{a}{a+b}<\dfrac{a+c}{a+b+c};\dfrac{b}{b+c}<\dfrac{b+a}{b+c+a};\dfrac{c}{c+a}<\dfrac{c+b}{a+b+c}$

$\Rightarrow\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{c}{c+a}<2$

$\text{Ta có}:a^2+1\ge 2a\Rightarrow\dfrac{a}{a^2+1}\le\dfrac{1}{2}$

b) $\Rightarrow\dfrac{a}{a^2+1}+\dfrac{b}{b^2+1}+\dfrac{c}{c^2+1}\le\dfrac{3}{2}$

mà $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\ge\dfrac{3}{2}$

suy ra điều phải chứng minh.

4)Phương pháp sử dung bất đẳng thức Co-si

*) Cho $a_1,a_2,...,a_n\ge 0$, ta có: $a_1+a_2+...+a_n\ge n\sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}$

Dấu "=" xảy ra khi $a_1=a_2=...=a_n\ge 0$

Ví dụ 4.1

Cho a, b > 0 thỏa mãn ab = 1. CMR: $(a+b+1)(a^2+b^2)+\dfrac{4}{a+b}\ge 8$

Giải

Áp dụng BĐT Cosi ta có

$a^2+b^2\ge 2ab=2$

$a+b\ge 2\sqrt{ab}=2$

$a+b+\dfrac{4}{a+b}\ge 2\sqrt{(a+b)\dfrac{4}{a+b}}=4$

$\Rightarrow (a+b+1)(a^2+b^2)+\dfrac{4}{a+b}\ge 2(a+b+1)+\dfrac{4}{a+b}$

$=\left(a+b+\dfrac{4}{a+b}\right)+(a+b)+2\ge 4+2+2=8$

Ví dụ 4.2

Chứng minh rằng:

$a)\dfrac{(a+b)^2}{2}+\dfrac{a+b}{4}\ge a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$ với $a,\ b\ge 0$

$b)\sqrt{\dfrac{a}{b+c}}+\sqrt{\dfrac{b}{c+a}}+\sqrt{\dfrac{c}{a+b}}>2$ với $a,b,c>0$

Giải

a) Ta có: $\dfrac{(a+b)^2}{2}+\dfrac{a+b}{4}=\dfrac{a+b}{2}\left(a+b+\dfrac{1}{2}\right)\ge\sqrt{ab}\left(a+b+\dfrac{1}{2}\right)$

mà $a+\dfrac{1}{4}\ge\sqrt{a}, b+\dfrac{1}{4}\ge\sqrt{b}\Rightarrow\left(a+b+\dfrac{1}{2}\right)\ge\sqrt{a}+\sqrt{b}$

$\Rightarrow\dfrac{(a+b)^2}{2}+\dfrac{a+b}{4}\ge a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$

$b)\sqrt{\dfrac{b+c}{a}\cdot 1}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b+c}{a}+1\right)=\dfrac{a+b+c}{a}$

$\Rightarrow\sqrt{\dfrac{a}{b+c}}\ge\dfrac{a}{a+b+c}$

tt: $\sqrt{\dfrac{b}{a+c}}\ge\dfrac{b}{a+b+c};\sqrt{\dfrac{c}{a+b}}\ge\dfrac{c}{a+b+c}$

Cộng vế với vế ta được: $\sqrt{\dfrac{a}{b+c}}+\sqrt{\dfrac{b}{c+a}}+\sqrt{\dfrac{c}{a+b}}\ge 2$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}a=b+c\\ b=a+c\Rightarrow a+b+c=0\\ c=a+b\end{cases}$ vô lí.

Vậy dấu "=" không xảy ra.

Ví dụ 4.3

Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng:

$a)\ \dfrac{a^2}{b^2+c^2}+\dfrac{b^2}{c^2+a^2}+\dfrac{c^2}{a^2+b^2}\le\dfrac{a^3+b^3+c^3}{2abc}$

$b)\ \dfrac{1}{a^2+b^2}+\dfrac{1}{b^2+c^2}+\dfrac{1}{c^2+a^2}\le\dfrac{a^3+b^3+c^3}{2abc}+3;\quad (a^2+b^2+c^2=1)$

Giải

$a)\ \text{Ta có}: \dfrac{a^2}{b^2+c^2}\le\dfrac{a^2}{2bc}; \dfrac{b^2}{a^2+c^2}\le\dfrac{b^2}{2ac}; \dfrac{c^2}{a^2+b^2}\le\dfrac{c^2}{2ab}$

$\Rightarrow \dfrac{a^2}{b^2+c^2}+\dfrac{b^2}{a^2+c^2}+\dfrac{c^2}{a^2+b^2}\le\dfrac{a^2}{2bc}+\dfrac{b^2}{2ac}+\dfrac{c^2}{2ab}=\dfrac{a^3+b^3+c^3}{2abc}$

$b)\ \text{Ta có}: \dfrac{1}{a^2+b^2}+\dfrac{1}{b^2+c^2}+\dfrac{1}{c^2+a^2}=\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\dfrac{1}{a^2+b^2}+\dfrac{1}{b^2+c^2}+\dfrac{1}{c^2+a^2}\right)$

$=\dfrac{c^2}{a^2+b^2}+\dfrac{a^2}{b^2+c^2}+\dfrac{b^2}{c^2+a^2}+3\le\dfrac{a^3+b^3+c^3}{2abc}+3$

Ví dụ 4.4

Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le\frac{1}{abc}$$

Giải

$\text{Ta có}: a^2+b^2\ge 2ab\Rightarrow a^3+b^3\ge ab(a+b)>0$

$\Rightarrow \dfrac{abc}{a^3+b^3+abc}\le\dfrac{abc}{ab(a+b)+abc}=\dfrac{c}{a+b+c}$

tt: $\dfrac{abc}{b^3+c^3+abc}\le\dfrac{a}{a+b+c}; \dfrac{abc}{c^3+a^3+abc}\le\dfrac{b}{a+b+c}$

Cộng vế với vế suy ra điều phải chứng minh

Ví dụ 4.5

Cho a, b, c > 0 thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\ge 3\quad (1)$$

Gải

$(1)\Leftrightarrow\dfrac{a^2b^2}{c^2}+\dfrac{b^2c^2}{a^2}+\dfrac{c^2a^2}{b^2}+2\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$

$\text{mà}: \dfrac{a^2b^2}{c^2}+\dfrac{b^2c^2}{a^2}+\dfrac{c^2a^2}{b^2}\ge\dfrac{ab}{c}\cdot\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ab}{c}\cdot\dfrac{ac}{b}+\dfrac{bc}{a}\cdot\dfrac{ca}{b}=a^2+b^2+c^2$

Suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 4.6

Cho x, y, z > 0 thỏa mãn xyz = 1. Chứng minh

$$a)\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}\geq\frac{3}{4}$$

$$b)\frac{xy}{x^5+xy+y^5}+\frac{yz}{y^5+yz+z^5}+\frac{zx}{z^5+zx+x^5}\leq 1$$

Giải

a) Áp dụng bất đẳng thức cô si ta có:

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{1+y}{8}+\frac{1+z}{8}\geq\frac{3x}{4}$$

Tương tự suy ra

$$\text{VT}\geq\frac{x+y+z}{2}-\frac{3}{4}\geq\frac{3\sqrt[3]{xyz}}{2}-\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$$

$$b)\text{ Ta có}: x^2+y^2\geq 2xy\Rightarrow x^5+y^5\geq x^2y^2(x+y)>0$$

$$\frac{xy}{x^5+xy+y^5}\leq\frac{xy}{xy+x^2y^2(x+y)}=\frac{1}{1+xy(x+y)}=\frac{z}{x+y+z}$$

$$\text{tt}:\frac{yz}{y^5+yz+z^5}\leq\frac{x}{x+y+z};\frac{zx}{z^5+xz+x^5}\leq\frac{y}{x+y+z}$$

$$\Rightarrow\frac{xy}{x^5+xy+y^5}+\frac{yz}{y^5+yz+z^5}+\frac{zx}{z^5+xz+x^5}\leq 1$$

Ví dụ 4.7

Cho x, y, z > 0. Chứng minh

$$\frac{x^3}{yz}+\frac{y^3}{zx}+\frac{z^3}{xy}\geq x+y+z$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Cosi ta có:

$$\frac{x^3}{yz}+z+y\geq 3x;\frac{y^3}{zx}+z+x\geq 3y;\frac{z^3}{xy}+x+y\geq 3z$$

$$\Rightarrow\frac{x^3}{yz}+\frac{y^3}{zx}+\frac{z^3}{xy}\geq x+y+z$$

5)Phương pháp sử dung bất đẳng thức Bunhiacopski

*) $(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq(xa+by)^2$ dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}a=kx\\b=ky\end{cases}$

*) $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geq(xa+by+cz)^2$ dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}a=kx\\b=ky\\c=kz\end{cases}$

Tổng quát:

$\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)\left(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\right)\geq\left(a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_x\right)^2$ dấu "=" xảy ra khi $a_i = kx_i$

Ví dụ 5.1

Cho a, b > 0. Chứng minh

$$a)\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}$$

$$b)\frac{n^2}{a}+\frac{m^2}{b}\geq\frac{(m+n)^2}{a+b}$$

Giải

a) Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski ta có:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+b)\geq\left(\frac{1}{\sqrt{a}}.\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{b}}.\sqrt{b}\right)^2=4$$

$$\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}$$

$$b)\ \left(\frac{n^2}{a}+\frac{m^2}{b}\right)(a+b)\geq\left(\frac{n}{\sqrt{a}}.\sqrt{a}+\frac{m}{\sqrt{b}}.\sqrt{b}\right)^2=(n+m)^2$$

$$\Rightarrow\frac{n^2}{a}+\frac{m^2}{b}\geq\frac{(n+m)^2}{a+b}$$

Tổng quát:

- Cho $b_i>0, i=\overline{1.n}$ thì $\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+...+\frac{a_n^2}{b_n}\geq\frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{b_1+b_2+...+b_n}$ (1)
- Với $a_ic_i>0$ với $i=\overline{1.n}$ thì $\frac{a_1}{c_1}+\frac{a_2}{c_2}+...+\frac{a_n}{c_n}\geq\frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{a_1c_1+a_2c_2+...+a_nc_n}$ (2)

Thật vậy:

$$\left(\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+...+\frac{a_n^2}{b_n}\right)(b_1+b_2+...+b_n)\geq\left(\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}.\sqrt{b_1}+\frac{a_2}{\sqrt{b_2}}.\sqrt{b_2}+...+\frac{a_n}{\sqrt{b_n}}.\sqrt{b_n}\right)^2=(a_1+a_2+...+a_n)^2$$

$$\Rightarrow\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+...+\frac{a_n^2}{b_n}\geq\frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{b_1+b_2+...+b_n}$$

đặt $a_ic_i = b_i > 0$ thay vào (1) được (2)

Ví dụ 5.2

Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh

$a)\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}\geq a+b+c.\qquad b)\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}\geq\dfrac{a+b+c}{2}$

$c)\dfrac{a^3}{b}+\dfrac{b^3}{c}+\dfrac{c^3}{a}\geq a^2+b^2+c^2\qquad d)\dfrac{a^3}{b+c}+\dfrac{b^3}{c+a}+\dfrac{c^3}{a+b}\geq\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}$

Giải

$$a)\text{ Ta có}: \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq\frac{(a+b+c)^2}{a+b+c}=a+b+c$$

$$b)\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)}=\frac{a+b+c}{2}$$

$$c)\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}=\frac{a^4}{ab}+\frac{b^4}{bc}+\frac{c^4}{ca}\geq\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{ab+bc+ca}\geq a^2+b^2+c^2$$

$$d)\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{a+c}+\frac{c^3}{a+b}=\frac{a^4}{ab+ac}+\frac{b^4}{ab+bc}+\frac{c^4}{ac+bc}\geq\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

Ví dụ 5.3

Cho a, b, c > 0. Chứng minh: $\dfrac{25a}{b+c}+\dfrac{16b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}>8$

Giải

$$\text{Ta có}: VT=25\left(\frac{a}{b+c}+1\right)+16\left(\frac{b}{c+a}+1\right)+\frac{c}{a+b}+1-42=$$

$$(a+b+c)\left(\frac{25}{b+c}+\frac{16}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\geq(a+b+c)\frac{(5+4+1)^2}{2(a+b+c)}-42=8$$

Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{b+c}{5}=\dfrac{a+c}{4}+\dfrac{a+b}{1}\Rightarrow a=0$ vô lí suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 5.4

Cho x, y, z > 0. Chứng minh: $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{z^2}+\dfrac{z^2}{x^2}\geq\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopki ta có

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\geq\frac{1}{3}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)^2\geq\frac{1}{3}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)\geq\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$$

B – CÁC PHƯƠNG PHÁP TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

Cho biểu thức f(x,y…)

- Ta nói M là giá trị lớn nhất của f(x,y…) kí hiệu maxf(x,y…) = M, nếu hai điều kiện sau được thỏa mãn:

- Với mọi x,y… để f(x,y…) xá định thì f(x,y…) ≤ M
- Tồn tại x_0, y_0… sao cho $f(x_0,y_0…) = M$

□ Ta nói m là giá trị nhỏ nhất của f(x,y…) kí hiệu minf(x,y…) = m, nếu hai điều kiện sau được thỏa mãn:

- Với mọi x,y… để f(x,y…) xá định thì f(x,y…) ≥ m
- Tồn tại x_0, y_0… sao cho $f(x_0,y_0…) = m$

I) TÌM GTLN, GTNN CỦA ĐA THỨC BẬC HAI

1) Đa thức bậc hai một biến

Ví dụ 1.1

a) Tìm GTNN của $A = 3x^2 – 4x + 1$

b) Tìm GTLN của $B = - 5x^2 + 6x – 2$

c) Tìm GTNN của $C = (x – 2)^2 + (x – 3)^2$

d) Cho tam thức bậc hai $P = ax^2 + bx + c$

Tìm GTNN của P nếu a > 0

Tìm GTNN của P nếu a > 0

Giải

a) $A = 3\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}\right)-\frac{1}{3}=3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{3}\ge-\frac{1}{3}$. Vậy minA$=-\frac{1}{3}$ khi $x=\frac{2}{3}$

b) $B=-5\left(x^2-\frac{6}{5}x+\frac{9}{25}\right)-\frac{1}{5}=-5\left(x-\frac{3}{5}\right)^2-\frac{1}{5}\le-\frac{1}{5}$. Vậy maxB $=-\frac{1}{5}$ khi $x=\frac{3}{5}$

c) $C=x^2-4x+4+x^2-6x+9=2\left(x^2-5x+\frac{25}{4}\right)+\frac{1}{2}=2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\ge\frac{1}{2}$.

Vậy maxC $=\frac{1}{2}$ khi $x=\frac{5}{2}$

d) Ta có: $P=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a}\right)+c-\frac{b^2}{4a}=a\left(a+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}$

Nếu a > 0 thì $P\ge c-\frac{b^2}{4a}$. Vậy minP $=c-\frac{b^2}{4a}$ khi $x=-\frac{b}{2a}$

Nếu a < 0 thì $P\le c-\frac{b^2}{4a}$. Vậy maxP $=c-\frac{b^2}{4a}$ khi $x=-\frac{b}{2a}$

Ví dụ 1.2

a) Tìm GTNN của $M = x^2 – 3x + 1$ với $x\ge2$

b) Tìm GTLN của $N = x^2 – 5x + 1$ với $-3\le x\le8$

Giải

a) $M=(x-1)(x-2)-1\ge-1$. Vậy minM = -1 khi x = 2

b) N = $\left(x+3\right)\left(x-8\right)+25\le 25$. Vậy maxN = 25 khi x = -3, x = 8

2. Đa thức bậc hai hai biến

a) Đa thức bậc hai hai biến có điều kiện

Ví dụ 2a.1

a) Cho x + y = 1. Tìm GTLN của P = 3xy – 4

b) Cho x – 2y = 2. Tìm GTNN của Q = $x^2 + 2y^2 - x + 3y$

Giải

a) $x+y=1\Rightarrow x=1-y\Rightarrow P=3\left(1-y\right)y-4=-3\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{13}{4}\le\frac{-13}{4}$

Vậy maxP = $\frac{-13}{4}$ khi $x=\frac{1}{2}$

b) $x-2y=2\Rightarrow x=2y+2\Rightarrow Q=4y^2+8y+4+2y^2-2y-2+3y$

$=6y^2+9y+2=6\left(y^2+\frac{3}{2}y+\frac{9}{16}\right)-\frac{11}{8}\ge-\frac{11}{8}$

Vậy minQ = $-\frac{11}{8}$ khi $x=-\frac{3}{4}$

Ví dụ 2a.2

Tìm GTLN của của P = xy vói x, y thỏa mãn

a) $x+y=6, y\ge 4$

b) $x+y=S, y\ge a>\frac{S}{2}$

a) $P=\left(6-y\right)y=8-\left(y-2\right)\left(y-4\right)\le 8$. Vậy maxP = 8 khi x = 2, y = 4

b) $Q=\left(S-y\right)y=\left(S-a\right)a-\left(y-a\right)\left(y+a-S\right)\le\left(S-a\right)a$.

Vậy maxQ = (S – a)a khi x = S – a, y = a

b) Đa thức bậc hai hai biến

Cho đa thức: P(x,y) = $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + h$ (1), với a,b,c $\neq 0$

Ta thường đưa P(x, y) về dạng

P(x, y) = $mF^2(x, y) + nG^2(y) + k$ (2)

P(x, y) = $mH^2(x, y) + nG^2(x) + k$ (3)

Trong đó G(y), H(x) là hai biểu thức bậc nhất một ẩn, H(x, y) là biểu thức bậc nhất hai ẩn.

Chẳng hạn nếu ta biến đổi (1) về (2) với **a, (4ac – b²)** $\neq 0$

$$4aP(x,y)=4a^2x^2+4abxy+4acy^2+4adx+4aey+4ah$$
$$=4a^2x^2+b^2y^2+d^2+4abxy+4adx+2bdy+\left(4ac-b^2\right)+2\left(2ae-bd\right)y+4ah-d^2$$
$$=\left(2ax+by+d\right)^2+\left(4ac-b^2\right)\left(y+\frac{2ae-bd}{4ac-b^2}\right)^2+4ahd^2-\frac{\left(2ae-bd\right)^2}{4ac-b^2}$$

(Tương tự nhân hai vế của (1) với 4c để chuyển về (3))

Ví dụ 3.1

a) Tìm GTNN của P = $x^2+y^2+xy+x+y$

b) Tìm GTLN của Q = $-5x^2-2xy-2y^2+14x+10y-1$

Giải

a) $4P=4x^2+4y^2+4xy+4x+4y=4x^2+y^2+1+4xy+4x+2y+3y^2+2y-1$

$$=\left(2x+y+1\right)^2+3\left(y+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{4}{3}\geq-\frac{4}{3}$$

Vậy minP = $-\frac{4}{3}$ khi $x=y=-\frac{1}{3}$

b) $-5Q=25x^2+10xy+10y^2-70x-50y+5=\left(5x-y-7\right)^2+\left(3y-6\right)^2-80$

$$\Rightarrow Q=-\frac{1}{5}(5x-y-7)^2-\frac{9}{5}(y-2)^2+16\leq16$$

Vậy maxQ = 16 khi x = 1, y = 2

Ví dụ 3.2

Tìm cặp số (x, y) với y nhỏ nhất thỏa mãn: $x^2+5y^2+2y-4xy-3=0$ (*)

Giải

$$(*)\Leftrightarrow\left(x-2y\right)^2+\left(y+1\right)^2=4\Rightarrow\left(y+1\right)^2\leq4\Rightarrow\left(y+3\right)\left(y-1\right)\leq0$$
$$\Rightarrow-3\leq y\leq1$$

Vậy miny = -3 khi x = -6. Vậy ccawpj số (x, y) = (-6; -3)

Ví dụ 3.3

Cho x, y liên hệ với nhau bởi hệ thức $x^2+2xy+7(x+y)+7y^2+10=0$ (**).

Hãy tìm GTLN, GTNN của S = x + y + 1.

Giải

$$\left(**\right)\Leftrightarrow4x^2+8xy+28x+28y+4y^2+40=0$$
$$\Leftrightarrow\left(2x+2y+7\right)^2+4y^2=9\Rightarrow\left(2x+2y+7\right)^2\leq9$$
$$\Leftrightarrow\left(x+y+5\right)\left(x+y+2\right)\leq0\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+5\geq0\\x+y+2\leq0\end{cases}\quad\left(\text{vì } x+y+2\leq x+y+5\right)$$
$$\Leftrightarrow-4\leq S\leq-1$$

Vậy minS = -4 khi x = -5, y = 0. maxS = -1 khi x = -2, y = 0.

II. PHƯƠNG PHÁP MIỀN GIÁ TRỊ

Ví dụ 1

Tìm GTLN, GTNN của A = $\dfrac{x^2+4\sqrt{2}x+3}{x^2+1}$

Giải

Biểu thức A nhận giá trị a khi phương trình sau đây có a nghiệm

$$a = \frac{x^2+4\sqrt{2}x+3}{x^2+1}$$

$$\Leftrightarrow (a-1)x^2-4\sqrt{2}x+a-3=0 \quad (1)$$

Nếu a = 1 thì phương trình (1) có nghiệm x = $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

Nếu a $\neq$ 1 thì phương trình (1) có nghiệm khi $-a^2+4a+5 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq a \leq 5$.

Vậy minA = -1 khi $x=-\sqrt{2}$

maxA = 5 khi $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Ví dụ 2

Tìm GTLN, GTNN của biểu thức B = $\dfrac{x+2y+1}{x^2+y^2+7}$

Giải

Biểu thức B nhận giá trị b khi phương trình sau có nghiệm

$$b = \frac{x+2y+1}{x^2+y^2+7}$$

$$\Leftrightarrow bx^2-x+by^2-2y+7b-1=0 \quad (2)$$

Trong đó x là ẩn, y là tham số và b là tham số có điều kiện

Nếu b = 0 $\Rightarrow x+2y+1=0$

Nếu b $\neq$ để (2) có nghiệm x khi $1-4b(by^2-2y+7b-1) \geq 0$ (3)

Coi (3) là bất phương trình ẩn y. BPT này xảy ra với mọi giá trị của y khi

$16b^2+4b^2(-28b^2+4b+1) \geq 0$

$$\Leftrightarrow -28b^2+4b+5 \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{14} \leq b \leq \frac{1}{2}$$

Vậy minB = $-\dfrac{5}{14}$ khi x = $-\dfrac{7}{5}, y=-\dfrac{14}{5}$

maxB = $\dfrac{1}{2}$ khi x = 1, y = 2

III. PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC

1) Sử dụng bất đẳng thức Cô-si

Ví dụ 1.1

Tìm GTLN, GTNN của A = $\sqrt{3x-5}+\sqrt{7-3x}$ với $\frac{5}{3}\le x\le\frac{7}{3}$

Giải

$A^2=3x-5+7-3x+2\sqrt{(3x-5)(7-3x)}=2+2\sqrt{(3x-5)(7-3x)}$

Vậy $A^2\ge 2\Rightarrow A\ge\sqrt{2}$. Vậy minA = $\sqrt{2}$ khi $x=\frac{5}{3},y=\frac{7}{3}$

$A^2\le 4\Rightarrow A\le 2\Rightarrow$ $\max A=2$ khi $x=2$

(Biểu thức được cho dưới dạng tổng hai căn thức. Hai biểu thức lấy căn có tổng là hằng số)

Ví dụ 1.2

Cho x, y > 0 thỏa mãn x + y ≥ 6. Hãy tìm GTNN của P = $3x+2y+\frac{6}{x}+\frac{8}{y}$

Giải

Ta có: $P=\frac{3}{2}(x+y)+\frac{3x}{2}+\frac{6}{x}+\frac{y}{2}+\frac{8}{y}\ge\frac{3}{2}.6+2\sqrt{\frac{3x}{2}.\frac{6}{x}}+2\sqrt{\frac{y}{2}.\frac{8}{y}}=9+6+4=19$

Vậy minP = 19 khi x = 2, y = 4.

Ví dụ 1.3

Tìm GTLN của biểu thức M = $\frac{x\sqrt{y-2}+y\sqrt{x-3}}{xy}$ với $x\ge 3;y\ge 2$

Giải

To có: $M=\frac{\sqrt{x-3}}{x}+\frac{\sqrt{y-2}}{y}$

Theo bất đẳng thức Cô – si ta có:

$\sqrt{3(x-3)}\le\frac{x}{2}\Rightarrow\frac{\sqrt{x-3}}{x}\le\frac{\sqrt{3}}{6};\sqrt{2(y-2)}\le\frac{y}{2}\Rightarrow\frac{\sqrt{y-2}}{y}\le\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\Rightarrow M\le\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{\sqrt{2}}{4}\Rightarrow\max M=\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{\sqrt{2}}{4}$ khi $x=6;y=4$

Ví dụ 1.4

Cho x, y, z > 0 thỏa mãn: $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}\ge 2\ (1)$. Tìm TGLN của P = xyz

Giải

$$(1) \Rightarrow \frac{1}{1+x} \geq \left(1-\frac{1}{1+y}\right)+\left(1+\frac{1}{1+z}\right)=\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z} \geq 2\sqrt{\frac{z}{(1+y)(1+z)}}$$

Tương tự: $\frac{1}{1+y} \geq 2\sqrt{\frac{xz}{(1+x)(1+z)}}; \frac{1}{1+z} \geq 2\sqrt{\frac{xy}{(1+x)(1+y)}}$

Nhân vế với vế của ba BĐT trên $\Rightarrow P = xyz \leq \frac{1}{8} \Rightarrow$ $\max P = \frac{1}{8}$ khi $x = y = z = \frac{1}{2}$

Ví dụ 1.5

Cho 0 < x < 1, Tìm GTNN của Q = $\frac{3}{1-x}+\frac{4}{x}$

Giải

$$\text{Ta có}: P = \frac{3x}{1-x}+\frac{4(1-x)}{x}+7 \geq 2\sqrt{\frac{3x}{1-x}.\frac{4(1-x)}{x}}+7=\left(2+\sqrt{3}\right)^2$$

$\Rightarrow$ minP = $\left(2+\sqrt{3}\right)^2$ khi $\frac{3x}{1-x}=\frac{4(1-x)}{x} \Rightarrow x=\left(\sqrt{3}-1\right)^2$

(Đặt P = $\frac{3ax}{1-x}+\frac{4b(1-x)}{x}+c$ đồng nhất hệ số suy ra a = b = 1; c = 7)

Ví dụ 1.6

Cho x, y, z, t > 0. Tìm GTNN của biểu thức.

$$M = \frac{x-t}{t+y}+\frac{t-y}{y+z}+\frac{y-z}{z+x}+\frac{z-x}{x+t}$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ với a, b > 0.

$$\text{Ta có}: M = M+4-4=\left(\frac{x-t}{t+y}+1\right)+\left(\frac{t-y}{y+z}+1\right)+\left(\frac{y-z}{z+x}+1\right)+\left(\frac{z-x}{x+t}+1\right)-4$$

$$=\frac{x+y}{t+y}+\frac{t+z}{y+z}+\frac{y+x}{z+x}+\frac{z+t}{x+t}-4=(x+y)\left(\frac{1}{t+y}+\frac{1}{z+x}\right)+(z+t)\left(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{x+t}\right)$$

$$\geq \frac{4(x+y)}{x+y+z+t}+\frac{4(z+t)}{x+y+z+t}-4=0$$

$\Rightarrow$ minM = 0 khi x = y và $z = t$

2. Sử dụng BĐT Bunhiacopski (BCS)

Ví dụ 2.1

Cho x, y, z thỏa mãn: xy + yz + zx =1. Tìm GTNN của biểu thức

$$A = x^4 + y^4 + z^4$$

Giải

Áp dụng BĐT BCS ta có

$$1=(xy+yz+zx)^2\le(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)=(x^2+y^2+z^2)^2$$

$$\Rightarrow 1\le(x^2+y^2+z^2)^2\le(1+1+1)(x^4+y^4+z^4)$$

$\Rightarrow P\ge\frac{1}{3}\Rightarrow$ minP = $\frac{1}{3}$ khi x = y = z = $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ví dụ 2.2

Tìm GTNN của P = $\frac{4a}{b+c-a}+\frac{9b}{c+a-b}+\frac{16c}{a+b-c}$ trong đó a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Giải

$$P=4\left(\frac{a}{b+c-a}+\frac{1}{2}\right)+9\left(\frac{b}{c+a-b}+\frac{1}{2}\right)+16\left(\frac{c}{a+b-c}+\frac{1}{2}\right)-\frac{29}{2}$$

$$=\frac{a+b+c}{2}\left(\frac{4}{b+c-a}+\frac{9}{c+a-b}+\frac{16}{a+b-c}\right)-\frac{29}{2}$$

$$\ge\frac{a+b+c}{2}.\frac{(2+3+4)^2}{(b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c)}-\frac{29}{2}=$$

$$=\frac{a+b+c}{2}.\frac{81}{a+b+c}-\frac{29}{2}=\frac{81}{2}-\frac{29}{2}=26$$

$\Rightarrow$ minP = 26 khi $\frac{a}{7}=\frac{b}{6}=\frac{c}{5}$

Ví dụ 2.3

Tìm giá trị nhỏ nhất của Q = $\frac{\text{a}}{\text{1+b-a}}+\frac{\text{b}}{\text{1+c-b}}+\frac{\text{c}}{\text{1+a-c}}$

trong đó a, b, c > 0 thỏa mãn a + b + c = 1

Giải

$$\text{Ta có}: Q=\frac{a}{2b+c}+\frac{b}{2c+a}+\frac{c}{2a+b}\ge\frac{(a+b+c)^2}{a(2b+c)+b(2c+a)+c(2a+b)}=\frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)}\ge$$

$\ge 1\sqrt{b^2-4ac}$

$\Rightarrow$ minQ = 1 khi $a=b=c=\frac{1}{3}$

Ví dụ 2.4

Cho a, b, c > 0 thỏa mãn a + b + c = 1. Tìm GTNN của

$$P=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}$$

Giải

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\geq\frac{9}{ab+bc+ca}$$

$$\Rightarrow P\geq\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{9}{ab+bc+ca}$$

$$=\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{4}{2\left(ab+bc+ca\right)}\right)+\frac{7}{ab+bc+ca}$$

$$\geq\frac{\left(1+2\right)^2}{\left(a+b+c\right)^2}+\frac{9}{ab+bc+ca}\geq 9+\frac{21}{\left(a+b+c\right)^2}=30$$

$\Rightarrow$ minP = 30 khi a = b = c = $\frac{1}{3}$

Chuyên đề 5: TỨ GIÁC NỘI TIẾP

I -CÁC DẤU HIỆU NHẬN BIẾT TỨ GIÁC NỘI TIẾP

1- Tổng hai góc đối bằng 180^0

2- Hai góc liên tiếp cùng nhìn một cạnh dưới hai góc bằng nhau.

3- Nếu hai cạnh đối diện cuả giác ABCD cắt nhau tại M thỏa mãn:

MA.MB =MC.MD ; hoặc hai đường chéo cắt nhau tại O thỏa mãn OA.OC = OB.OD thì ABCD là tứ giác nội tiếp

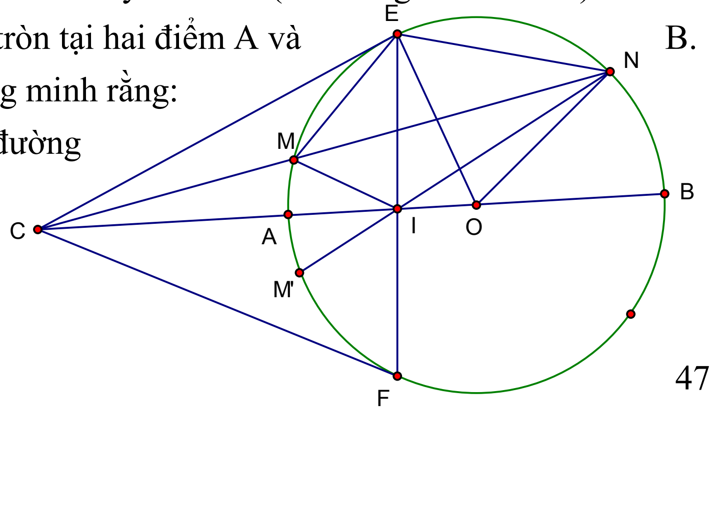
4- Sử dụng định lý Ptôlêmê

II- CÁC VÍ DỤ

Ví dụ1: Cho đường tròn tâm O và một điểm C ở ngoài đường tròn đó. Từ C kẻ hai tiếp tuyến CE ; CF (E và F là các tiếp điểm) và cát tuyến CMN (N nằm giữa C và M) tới đường tròn.Đường thẳng CO cắt đường tròn tại hai điểm A và B. Gọi I là giao điểm của AB với EF. Chứng minh rằng:

a, Bốn điểm O, I, M, N cùng thuộc một đường tròn

b, $\widehat{AIM}=\widehat{BIN}$



Giải

a, Do CE là tiếp tuyến của (O) nên:

$\widehat{CEM} = \widehat{CNE}$ (Cùng chắn **$\overset{\frown}{ME}$**)

□ $\Delta CEM \sim \Delta CNE$.

□ $\dfrac{CE}{CM} = \dfrac{CN}{CE}$

□ $CM.CN = CE^2$

Mặt Khác , do CE; CF là các tiếp tuyến của (O) nên

$AB \perp EF$ tại I vì vậy trong tam giác vuông CEO đường cao EI ta có:

$CE^2 = CI.CO$

Từ (1) và (2) suy ra $CM.CN = CI.CO$ => $\dfrac{CM}{CI} = \dfrac{CO}{CN}$

□ $\Delta CMI \sim \Delta CON$

□ $\widehat{CIM} = \widehat{CNO}$

□ Tứ giác OIMN nội tiếp □

b Kéo dài NI cắt đường tròn tại M’.

Do tứ giác IONM nội tiếp nên :

$\widehat{IOM} = \widehat{INM} = \dfrac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{NM'}$

=> $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{AM'}$. Do đó:

$\widehat{AIM} = \widehat{AIM'} = \widehat{BIN}$ □

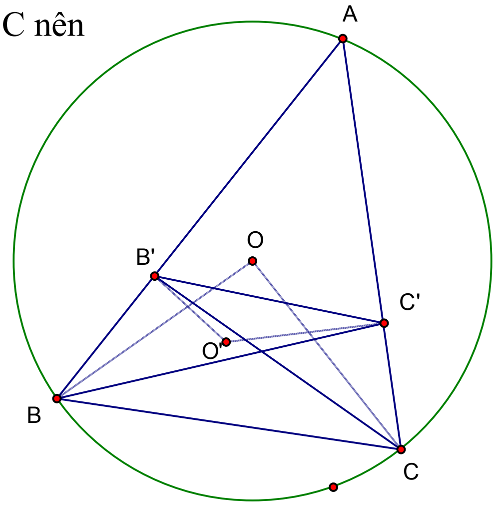
Ví Dụ 2

Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 45^0$; BC =a nội tiếp trong đường tròn tâm O; các đường cao BB’ và CC’. Gọi O’ là điểm đối xứng của O qua đường thẳng B’C’.

a. Chứng minh rằng A; B’; C’; O’ cùng thuộc một đường tròn

b. Tính B’C’ theo a.

Lời giải



a. Do O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên

$\widehat{BOC} = 2\,\widehat{BAC} = 90^0$

Từ đó suy ra các điểm O; B’; C’

Cùng thuộc đường tròn đường kính BC.Xét tứ giác nội tiếp CC’OB’ có :

$\widehat{C'OB'} = 180^0 - \widehat{C'CB'}$

$= 180^0 - (\,90^0 - \widehat{A}\,) = 135^0$.

Mà O’ đối xứng với O qua B’C’ nên:

$\widehat{C'O'B'} = \widehat{C'OB'} = 135^0 = 180^0 - \widehat{A}$

Hay tứ giác AC’O’B’ nội tiếp.

b. Do $\widehat{A} = 45^0$ nên ΔBB’A vuông cân tại B’

Vì vậy B’ nằm trên đường trung trực của đoạn AB hay B’O ⊥ AB

□ C’OB’C là hình thang cân nên B’C’ =OC

Mặt khác ΔBOC vuông cân nên: B’C’ =OC = $\frac{BC\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

III bài tập áp dụng

Bài tập 1:

Cho tứ giác ABCD nội tiế đường tròn đường kính AD. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại E. Vẽ EF vuông góc với AD. Chứng minh:

a/ Tứ giác EBEF, tứ giác DCEF nội tiếp.

b/ CA là phân giác của $\widehat{BCF}$

c/ Gọi M là trung điểm của DE. Chứng minh tứ giác BCMF nội tiếp.

Bài tập 2:

Tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn đường kính AD. Hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại E. Hình chiếu vuông góc của E trên AD là F. Đường thẳng CF cắt đường tròn tại điểm thứ hai là M. Giao điểm của BD và CF là N. Chứng minh:

a/ CEFD là tứ giác nội tiếp

b/ Tia FA là phân giác của góc BFM

c/ BE.DN = EN.BD.

Bài tập 3:

Cho tam giác ABC vuông ở A và một điểm D nằm giữa A và B. Đường tròn đường kính BD cắt BC tại E. Các đường thẳng CD, AE lần lượt cắt đường tròn tại các điểm thứ hai F, G. Chứng minh:

a/ Tam giác ABC đồng dạng với tam giác EBD

b/ Tứ giác ADEC và AFBC nội tiếp được một đường tròn

c/ AC song song với FG

d/ Các đường thẳng AC, DE, BF đồng quy.

Bài tập 4:

Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 90^0$; AB > AC, và một điểm M nằm trên đoạn AC (M không trùng với A và C). Gọi N và D lần lượt là giao điểm thứ hai của BC và MB với đường tròn đường kính MC; gọi S là giao điểm thứ hai giữa AD với đường tròn đường kính MC; T là giao điểm của MN và AB. Chứng minh:

a/ Bốn điểm A, M, N, B cùng thuộc một đường tròn

b/ CM là phân giác của góc BCS.

c/ $\frac{TA}{TD} = \frac{TC}{TB}$

Bài tập 5:

Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn. Qua A dựng hai tiếp tuyến AM và AN với đường tròn (M, N là các tiếp điểm) và một cact tuyến bất kỳ cắt đường tròn tại P, Q. Gọi L là trung điểm của PQ.

a/ Chứng minh 5 điểm: O, L, M, A, N cùng thuộc một đường tròn

b/ Chứng minh LA là phân giác của góc MLN

c/ Gọi I là giao điểm của MN và LA. Chứng minh: $MA^2 = AI. AL$

d/ Gọi K là giao điểm của ML với (O). Chứng minh rằng: KN // AQ

e/ Chứng minh tam giác KLN cân.

Bài tập 6:

Cho đường tròn (O;R) tiếp xúc với đường thẳng d tại A. Trên d lấy điểm H không trùng với điểm A và AH < R. Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với d, đường thẳng này cắt đường tròn tại hai điểm E và B (E nằm giữa B và H)

a/ Chứng minh: góc ABE bằng góc EAH và tam giác AHB đồng dạng với tam giác EAH.

b/ Lấy điểm C trên d sao cho H lá trung điểm của đoạn AC, đường thẳng CE cắt AB tại K. Chứng minh: AHEK là tứ giác nội tiếp

c/ Xác định vị trí của điểm H để AB = $R\sqrt{3}$

Bài tập 7:

Từ điểm P nằm ngoài đường tròn (O), kẻ hai tiếp tuyến PM và PN với đường tròn (O) (M, N là tiếp điểm). Đường thẳng đi qua điểm P cắt đường tròn (O) tại hai điểm E và F. Đường thẳng qua O song song với MP cắt PN tại Q. Gọi H là trung điểm của đoạn EF. Chứng minh:

a/ Tứ giác PMON nội tiếp đường tròn

b/ Các điểm P, N, O, H cùng nằm trên một đường tròn

c/ Tam giác PQO cân

d/ $MP^2 = PE.\ PF$

e/ $\widehat{PHM} = \widehat{PHN}$

Bài tập 8:

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H và cắt đường tròn (O) lần lượt tại M, N, P.

Chứng minh rằng:

a/ Các tứ giác AEHF, BFHD nội tiếp.

b/ Bốn điểm B, C, E, F cùng nằm trên một đường tròn.

c/ AE. AC = AH. AD và AD. BC = BE. AC

d/ H và M đối xứng nhau qua BC

e/ Xác định tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

Bài tập 9:

Cho tam giác ABC không cân, đường cao AH, nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi E, F thứ tự là hình chiếu của B, C lên đường kính AD của đường tròn (O) và M, N thứ tự là trung điểm của BC, AB. Chứng minh:

a/ Bốn điểm A, B, H, E cùng nằm trên một đường tròn tâm N và HE // CD.

b/ M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF.

Bài tập 10:

Cho đường tròn (O) và điểm A ở bên ngoài đường tròn. Vẽ các tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến ADE với đường tròn (B và C là các tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của DE.

a/ CMR: A, B,H, O, C cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm của đường tròn này.

b/ Chứng minh: HA là tia phân giác . $\widehat{DHC}$

c/ Gọi I là giao điểm của BC và DE. Chứng minh: $AB^2 = AI.AH$

d/ BH cắt (O) tại K. Chứng minh: AE // CK.

Bài tập 11:

Từ một điểm S ở ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến SA, SB và cát tuyến SCD của đường tròn đó.

a/ Gọi E là trung điểm của dây CD. Chứng minh 5 điểm S, A, E, O, B cùng thuộc một đường tròn.

b/ Nếu SA = AO thì SAOB là hình gì? Tại sao?.

c/ CMR: AC.BD = BC.DA = $\frac{AB.CD}{2}$

Bài tập 12:

Trên đường thẳng d lấy 3 điểm A, B, C theo thứ tự đó. Trên nửa mặt phẳng bờ d kẻ hai tia Ax, By cùng vuông góc với d. Trên tia Ax lấy I. Tia vuông góc với CI tại C cắt By tại K. Đường tròn đường kính IC cắt IK tại P.

a/ Chứng minh tứ giác CBPK nội tiếp được đường tròn

b/ Chứng minh: AI. BK = AC. CB

c/ Giả sử A, B, I cố định hãy xác định vị trí điểm C sao cho diện tích hình thang vuông ABKI lớn nhất.

Bài tập 13:

Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). M là điểm di động trên cung nhỏ BC. Trên đoạn thẳng MA lấy điểm D sao cho MD = MC.

a/ Chứng minh: $\triangle$DMC đều

b/ Chứng minh: MB + MC = MA

c/ Chứng minh tứ giác ADOC nội tiếp được.

d/ Khi M di động trên cung nhỏ BC thì D di động trên đường cố định nào?.

Bài tập 14:

Cho đường tròn (O;R), từ một điểm A trên O kẻ tiếp tuyến d với O. Trên đường thẳng d lấy điểm M bất kỳ (M khác A) kẻ cát tuyến MNP và gọi K là trung điểm của NP, kẻ tiếp tuyến MB (B là tiếp điểm). Kẻ AC $\perp$ MB, BD $\perp$ MA, gọi H là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của OM và AB.

a/ Chứng minh tứ giác AMBO nội tiếp

b/ Chứng minh năm điểm O, K, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn.

c/ Chứng minh OI. OM = R^2; OI. IM = IA^2

d/ Chứng minh OAHB là hình thoi

e/ chứng minh ba điểm O, H, M thẳng hàng

f/ Tìm quỹ tích của điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d.

Bài tập 15:

Cho hình thang cân ABCD (AB > CD; AB // CD) nội tiếp trong đường tròn (O). Tiếp tuyến với đường tròn (O) tại A và D cắt nhau tại E. Gọi I là giao điểm của hai đường chéo

AC và BD.

a/ Chứng minh tứ giác AEDI nội tiếp.

b/ Chứng minh AB // EI

c/ Đường thẳng EI cắt cạnh bên AD và BC của hình thang tương ứng ở R và S. Chứng minh: * I là trung điểm của RS

$$* \ \frac{1}{AB} = \frac{1}{CD} = \frac{2}{RS}$$

Bài tập 16:

Cho ba điểm M, N, P thẳng hàng theo thứ tự đó. Một đường tròn (O) thay đổi đi qua hai điểm M, N. Từ P kẻ các tiếp tuyến PT, PQ với đường tròn (O).

a/ Chứng minh: $PT^2 = PM.PN$. Từ đó suy ra khi (O) thay đổi vẫn qua M, N thì T, Q thuộc một đường tròn cố định.

b/ Gọi giao điểm của TQ với PO, PM là I và J. K là trung điểm của MN. Chứng minh các tứ giác OKTP, OKIJ nội tiếp.

c/ CMR: Khi đường tròn (O) thay đổi vẫn đi qua M, N thì TQ luôn đi qua điểm cố định.

d/ Cho MN = NP = a. Tìm vị trí của tâm O để $\widehat{TPQ} = 60^0$

Bài tập 17:

Cho tam giác ABC vuông ở A. Trên AC lấy điểm M ($M \neq A$ và C). Vẽ đường tròn đường kính MC. Gọi T là giao điểm thứ hai của cạnh BC với đường tròn. Nối BM kéo dài cắt đường tròn tại điểm thứ hai là D. Đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai S. Chứng minh:

a/ Tứ giác ABTM nội tiếp.

b/ Khi M chuyển động trên AC thì $\widehat{ADM}$ có số đo không đổi

c/ AB // ST.

Bài tập 18:

Cho đường tròn (O), đường kính AB cố định, điểm I nằm giữa A và O sao cho AI = 2/3AO. Kẻ dây MN vuông góc với AB tại I, gọi C là điểm tùy ý thuộc cung lớn MN sao cho C không trùng với M, N và B. Nối AC cắt MN tại E.

a/ Chứng minh tứ giác IECB nội tiếp.

b/ Chứng minh: $\Delta AME \sim \Delta ACM$

c/ Chứng minh $AM^2 = AE.AC$

d/ chứng minh $AE.AC - AI.IB = AI^2$

e/ Hãy xác định vị trí của C sao cho khoảng cách từ N đến tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CME là nhỏ nhất.

Bài tập 19:

Cho điểm A bên ngoài đường tròn (O; R). Từ A vẽ tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến ADE đến đường tròn (O). Gọi H là trung điểm của DE.

a/ Chứng minh năm điểm: A, B, H, O, C cùng nằm trên một đường tròn.

b/ Chứng minh AH là tia phân giác của $\widehat{DHC}$

c/ DE cắt BC tại I. Chứng minh: $AB^2 = AI.AH$

d/ Cho $AB = R\sqrt{3}$ và $OH = \frac{R}{2}$. Tính HI theo R.

Bài tập 20:

Cho đường tròn (O) đường kính AB = 2R. Đường thẳng (d) tiếp xúc với đường tròn (O) tại A. M và Q là hai điểm trên (d) sao cho $M \neq A$, $M \neq Q$, $Q \neq A$. Các đường thẳng BM và BQ lần lượt cắt đường tròn (O) tại các điểm thứ hai là N và P. Chứng minh:

a/ Tích BN. BM không đổi

b/ Tứ giác MNPQ nội tiếp

c/ Bất đẳng thức: BN + BP + BM + BQ > 8R.

Chuyên đề 6: ĐƯỜNG ĐI QUA ĐIỂM CỐ ĐỊNH

Trong các đề thi học sinh giỏi, thi vào trường chuyên, lớp chọn thường có những bài toán liên quan đến tìm điểm cố định, chứng minh đường đi qua điểm cố định. Thực tế cho thấy đây là bài toán khó, học sinh thường khó khăn khi gặp phải bài toán dạng này.

Bài toán "Đường đi qua điểm cố định" đòi hỏi HS phải có kĩ năng nhất định cộng với sự đầu tư suy nghĩ, tìm tòi nhưng đặc biệt phải có phương pháp làm bài.

Tìm hiểu nội dung bài toán

Dự đoán điểm cố định

Tìm tòi hướng giải

Trình bày lời giải

***Tìm hiểu bài toán*:**

- Yếu tố cố định.(điểm, đường …)
- Yếu tố chuyển động.(điểm, đường …)
- Yếu tố không đổi.(độ dài đoạn, độ lớn góc …)
- Quan hệ không đổi (Song song, vuông góc, thẳng hàng …)

Khâu tìm hiểu nội dung bài toán là rất quan trọng. Nó định hướng cho các thao tác tiếp theo. Trong khâu này đòi hỏi học sinh phải có trình độ phân tích bài toán, khả năng phán đoán tốt. Tuỳ thuộc vào khả năng của từng đối tượng học sinh mà giáo viên có thể đưa ra hệ thống câu hỏi dẫn dắt thích hợp nhằm giúp học sinh tìm hiểu tốt nội dung bài toán. Cần xác định rõ yếu tố cố định, không đổi, các quan hệ không đổi và các yếu tố thay đổi, tìm mối quan hệ giữa các yếu tố đó.

Dự đoán điểm cố định:

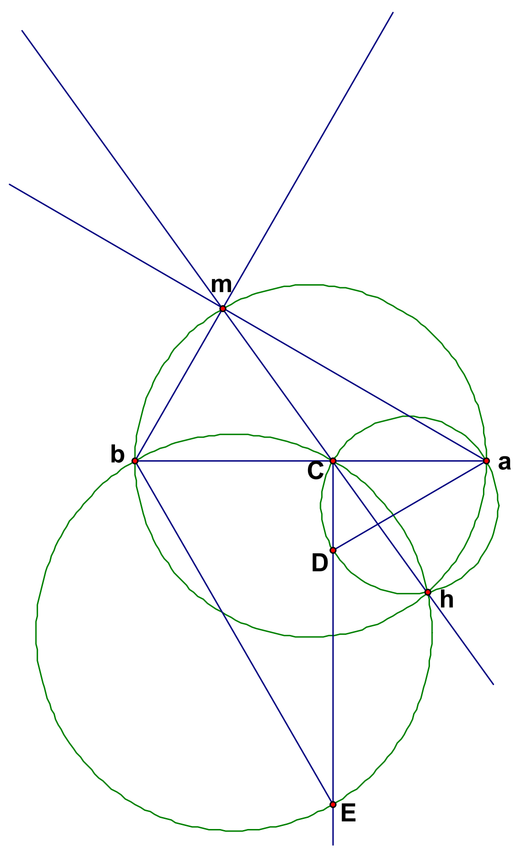
Dựa vào những vị trí đặc biệt của yếu tố chuyển động để dự đoán điểm cố định. Thông thường ta tìm một hoặc hai vị trí đặc biệt cộng thêm với các đặc điểm bất biến khác như tính chất đối xứng, song song, thẳng hàng … để dự đoán điểm cố định

Tìm tòi hướng giải

Từ việc dự đoán điểm cố định tìm mối quan hệ giữa điểm đó với các yếu tố chuyển động, yếu tố cố định và yếu tố không đổi. Thông thường để chứng tỏ một điểm là cố định ta chỉ ra điểm đó thuộc hai đường cố định, thuộc một đường cố định và thoả mãn một điều kiện (thuộc một tia và cách gốc một đoạn không đổi, thuộc một đường tròn và là mút của một cung không đổi ...) thông thường lời giải của một bài toán thường được cắt bỏ những suy nghĩ bên trong nó chính vì vậy ta thường có cảm giác lời giải có cái gì đó thiếu tự nhiên, không có tính thuyết phục chính vì vậy khi trình bày ta cố gắng làm cho lời giải mang tính tự nhiên hơn, có giá trị về việc rèn luyện tư duy cho học sinh.

MỘT VÀI VÍ DỤ:

Bài 1: Cho ba điểm A, C, B thẳng hành theo thứ tự đó. Vẽ tia Cx vuông góc với AB.Trên tia Cx lấy hai điểm D, E sao cho $\frac{CE}{CB}=\frac{CA}{CD}=\sqrt{3}$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BEC tại H khác C. Chứng minh rằng: Đường thẳng HC luôn đi qua một điểm cố định khi C di chuyển trên đoạn thẳng AB.



Tìm hiểu đề bài:

* Yếu tố cố định: Đoạn AB

* Yếu tố không đổi:

+ Góc BEC = 30^0, Góc ADB = 60^0 do đó sđ cung BC, cung CA không đổi

+ B, D, H thẳng hàng; E, H, A thẳng hàng

Dự đoán điểm cố định:

khi C trùng B thì (d) tạo với BA một góc 60^0 => điểm cố định thuộc tia By tạo với tia BA một góc 60^0

khi C trùng A thì (d) tạo với AB một góc 30^0 => điểm cố định thuộc tia Az tạo với tia AB một góc 30^0

By và Az cắt nhau tại M thì M là điểm cố định? Nhận thấy M nhìn AB cố định dưới 90^0 => M thuộc đường tròn đường kính AB.

Tìm hướng chứng minh:

M thuộc đường tròn đường kính AB cố định do đó cần chứng minh sđ cung AM không đổi thật vậy:

sđ cung $\overset{\frown}{AM}$ = 2sđGóc MCA=2sđGóc CHA =2sđGóc CDA = 120^0

Lời giải:

Ta có $tgD = \dfrac{CA}{CD} = \sqrt{3}$ => Góc D=60^0

có Góc $\widehat{CHA}$ = Góc $\widehat{CDA}$ = 60^0

G/s đường tròn đường kính AB cắt CH tại M

ta có Góc $\widehat{MHA}$= 60^0 => sđ cung MA không đổi

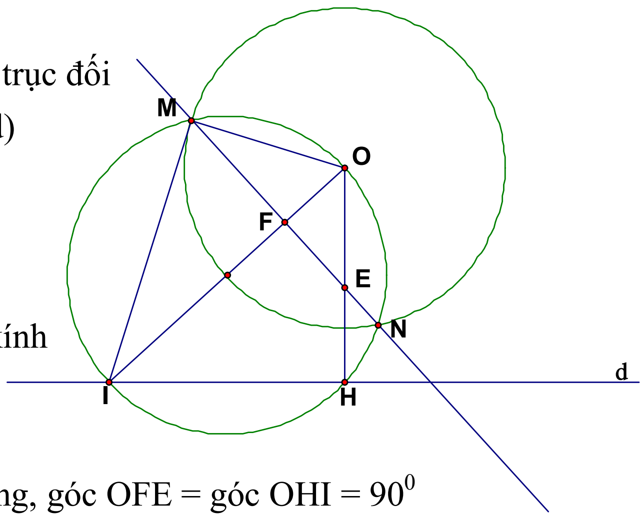
lại có đường tròn đường kính AB cố định vậy:

M cố định do đó CH luôn qua M cố định.

Bài 2: Cho đường tròn (O) và đường thẳng (d) nằm ngoài đường tròn. I là điểm di động trên (d). Đường tròn đường kính OI cắt (O) tại M, N. Chứng minh đường tròn đường kính OI luôn đi qua một điểm cố định khác O và đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn:

do tính chất đối xứng nên điểm cố định nằm trên trục đối xứng hay đường thẳng qua O và vuông góc với (d)



Giải:

Kẻ OH vuông góc với (d) cắt MN tại E.

ta có H cố định và H thuộc đường tròn đường kính OI vậy đường tròn đường kính OI luôn đi qua K cố định.

Xét tam giác OEF và tam giác OIH có góc O chung, góc OFE = góc OHI = 90^0

Nên tam giác OEF đồng dạng với tam giác OIH do đó: OF/ OE = OH/ OI => OE. OH = OF. OI

Lại có góc IMO = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính OI)

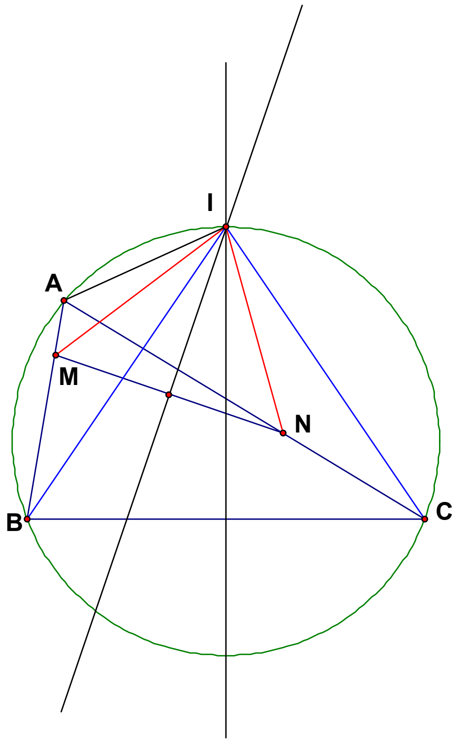
Xét tam giác vuông OMI có đường cao ứng với cạnh huyền MF nên:

OF. OI = OM^2

Do đó: $OE = \dfrac{OM^2}{OH}$ = hằng số vậy E cố định do đó MN đi qua E cố định.

Bài 3: Cho đường tròn (O; R) và dây AB cố định. C là một điểm chuyển động trên đường tròn và M là trung điểm của AC. Chứng minh rằng đường thẳng kẻ từ M vuông góc với BC luôn đi qua một điểm cố định.

Giải:



Vẽ đường kính BD => D cố định.

Giả sử đường thẳng qua M và vuông góc với BC cắt BC cắt AD tại I.

Dễ thấy góc BCD = 90^0 hay MI // CD.

Xét tam giác ACD có MC = MA; MI // CD => I là trung điểm của DA cố định hay đường thẳng qua M vuông góc với BC đi qua I cố định.

Bài 4: Cho tam giác ABC và hai điểm M, N thứ tự chuyển động trên hai tia BA, CA sao cho BM= CN. Chứng minh rằng đường trung trực của MN luôn đi qua một điểm cố định.

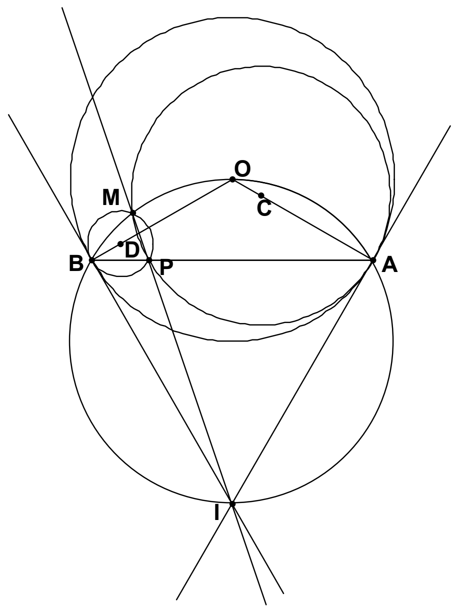
Hướng dẫn:

Khi M $\equiv$B thì N $\equiv$C khi đó đường trung trực của MN là trung trực của BC. Vậy điểm cố định nằm trên đường trung trực của BC

Giải: Giả sử trung trực của BC cắt trung trực của MN tại I

Dễ thấy tam giác IMB = tam giác INC (c-c-c) vậy góc MBI = góc NCI

Xét tứ giác ABCI có góc MBI = góc NCI vậy tứ giác ABCI nội tiếp hay I thuộc đường tròn Ngoại tiếp tam giác ABC cố định, mà Trung trực của BC cố định Vậy I cố định hay trung trực của MN đi qua I cố định.



Bài 5: Cho đường tròn (O; R) và dây cung AB = $R\sqrt{3}$. Điểm P khác A và B. Gọi (C; R_1) là đường tròn đi qua P tiếp xúc với đường tròn (O; R) tại A.Gọi (D; R_2) là đường tròn đi qua P tiếp xúc với đường tròn (O; R) tại B. Các đường tròn (C; R_1) và

(D; R_2) cắt nhau tại M khác P. Chứng minh rằng khi P di động trên AB thì đường thẳng PM luôn đi qua một điểm cố định.

Tìm hiểu đề bài:

* Yếu tố cố định: (O; R), dây AB

* Yếu tố không đổi: DPCO là hình bình hành. Sđ cung BP của (D), sđ cung AP của (C), Góc BMA không đổi

Dự đoán

Khi P ≡ A thì PM là tiếp tuyến của (O; R) => điểm cố định nằm trên tiếp tuyến của (O; R) tại A

Khi P ≡ B thì PM là tiếp tuyến của (O; R)=> điểm cố định nằm trên tiếp tuyến của (O; R) tại B

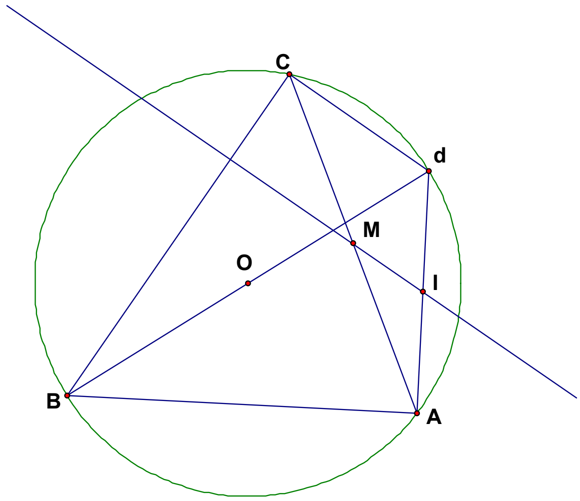
Do tính chất đối xứng của hình => Điểm cố định nằm trên đường thẳng qua O và vuông góc với AB

=> Điểm cố định nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB

Lời giải:

Vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB cắt PM tại I .

vì AB = $R\sqrt{3}$ => sđ cung AB của (O) bằng 120^0



tam giác BDP cân do đó góc OBA = góc DPB

tam giác OAB cân do đó góc OBA = góc OAB => góc BDP = góc BOA => sđcung BP của (D) = sđ cung BA của (O) = 120^0 .

tương tự sđ cung PA của (C) = 120^0 .

ta có góc BMP = $\frac{1}{2}$sđ cung BP của (D) = 60^0

ta có góc AMP = $\frac{1}{2}$sđ cung AP của (C) = 60^0

Vậy góc BMA = góc BMP + góc AMP = 120^0 = góc BOA

xét tứ giác BMOA có góc BMA = góc BOA do đó tứ giác BMOA nội tiếp hay M thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác BOA.

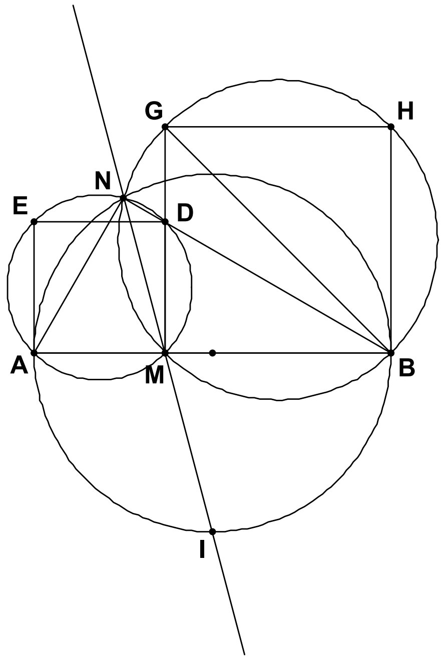
Vậy $\frac{1}{2}$sđ cung IA = góc IMA = góc PMA = $\frac{1}{2}$sđ cung PA của (C) = 120^0 .Vậy I thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác AOB và sđ cung IA = 120^0 => I cố định hay MP đi qua I cố định.

Bài 6: Cho đoạn AB cố định, M di động trên AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ hai hình vuông MADE và MBHG. Hai đường tròn ngoại tiếp hai hình vuông cắt nhau tại N. Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định khi M di chuyển trên AB.

Hướng dẫn:

Tương tự bài 1

Giải:



Giả sử MN cắt đường tròn đường kính AB tại I

Ta có Góc ANM = Góc ADM = 45^0(góc nội tiếp cùng chắn cung AM của đường tròn ngoại tiếp hình vuông AMDE)

Ta có Góc BNM = Góc BGM = 45^0(góc nội tiếp cùng chắn cung BM của đường tròn ngoại tiếp hình vuông MBGH)

=> gócANB = Góc ANM + Góc BNM = 90^0 => N thuộc đường tròn đường đường kính AB vậy sđ cung AI = 2sđGóc ANI

=2sđGóc ANM = 90^0

Vậy I thuộc đường tròn đường kính AB và số đo cung AI bằng 90^0

=> I cố định hay MN đi qua I cố định

Vµi ®Þnh h-íng khai th¸c bµi to¸n h×nh häc

Để có được một giờ luyện tập tốt cần lưu ý một số vấn đề sau

- Chọn hệ thống bài tập như thế nào cho một giờ luyện tập;
- Phải sắp xếp hệ thống các câu hỏi từ dễ đến khó (có gợi mở);
- Phải tổ chức tốt và thể hiện vai trò chủ đạo của người thày;
- Sau mỗi bài cần tập dượt cho học sinh nghiên cứu sâu lời giải (nếu có).

Nội dung chính của bài viết tôi bắt đầu từ một số bài toán đơn giản trong chương trình lớp 9 bậc THCS rồi phát triển nó rộng ra ở mức độ tương đương, phức tạp hơn rồi cao hơn nhưng vẫn phù hợp với tư duy lôgíc của các em để tạo cho các em niềm say mê học tập môn toán đặc biệt là môn hình học.

Từ bài tập số 7 trang 134 (SGK hình học lớp 9-NXB Giáo dục 2005), sau khi học sinh được làm, tôi đã thay đổi thành bài toán có nội dung như sau:

Bài toán 1: Cho ΔABC đều cạnh a, gọi O là trung điểm của BC. Trên cạnh AB, AC theo thứ tự lấy M, N sao cho góc MON = 60^0.

a) Chứng minh $BM.CN = \frac{a^2}{4}$;

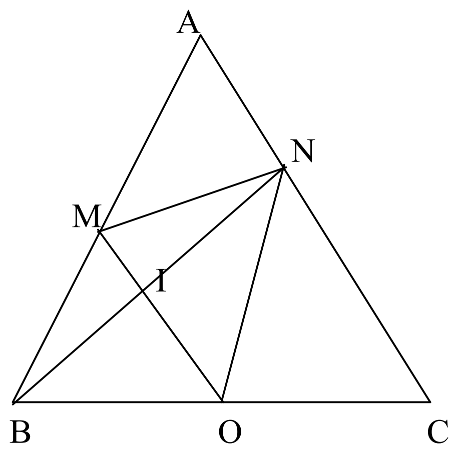
b) Gọi I là giao điểm của BN và OM. Chứng minh BM.IN = BI.MN;

c) Chứng minh MN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Phân tích bài toán:

a) Ở phần a là một dạng toán chứng minh hệ thức, chính vì vậy việc hướng dẫn học sinh tìm lời giải bài toán hết sức quan trọng nhằm phát triển tư duy hình học ở học sinh.

Chúng ta có thể dùng phương pháp phân tích đi lên để tìm lời giải bài toán. Với sơ đồ như sau:



$BM.CN = \frac{a^2}{4}$

$\Uparrow$

$BM.CN = \frac{a}{2}.\frac{a}{2}$

$\Uparrow$

$BM.CN = BO.CO$

$\Uparrow$

$\frac{BM}{BO} = \frac{CO}{CN}$

$\Uparrow$

ΔBMO đồng dạng ΔCON

$\Uparrow$

$\hat{B} = \hat{C} = 60^0$

gócBMO = gócCON

$\Uparrow$

gócB+gócBMO+gócBOM = gócBMO+gócMON+gócNOC (= 180^0).

Căn cứ vào sơ đồ ta có lời giải sau:

Ta có ΔBMO: gócB+gócM+gócO = 180^0

gócBMO+gócMON+gócNOC = 180^0 (gócBOC = 180^0)

$\Rightarrow$gócBMO = gócCON; lại có $\hat{B} = \hat{C} = 60^0$ (vìΔABCđều)

$\Rightarrow$ΔBMO đồng dạng ΔCON (g.g), từ đó suy ra $\frac{BM}{BO} = \frac{CO}{CN}$

hay $BM.CN = BO.CO$; mà $BO = CO = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$ do đó

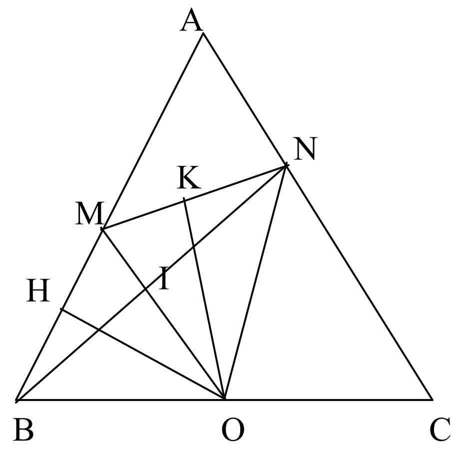
$BM.CN = \frac{a^2}{4}$ (đpcm)

b) Cũng tương tự như vậy ở phần b) thày giáo cũng giúp học sinh phát triển tư duy lôgic, thao tác tư duy phân tích, tổng hợp, đặc biệt là tư duy phân tích đi lên- một thao tác tư duy đặc trưng của môn hình học. Với sự phân tích như vậy học sinh sẽ thấy đó chính là sử dụng tính chất đường phân giác của tam giác BMN. Nghĩa là học sinh cần chỉ ra MI là tia phân giác của gócBMN. Từ đó ta có lời giải sau:

Theo phần a) ΔBMO đồng dạng ΔCON suy ra $\frac{BM}{CO} = \frac{MO}{ON} hay \frac{BM}{BO} = \frac{MO}{ON}$ lại có gócB = gócMON (=60^0) $\Rightarrow$ΔBMO đồng dạng ΔOMN (c.g.c). Từ đó suy ra gócBMO = gócOMN do đó MO là tia phân giác của góc BMN hay MI là tia phân giác gócBMN.

Xét ΔBMN có MI là tia phân giác của gócBMN, áp dụng tính chất đường phân giác trong tam giác ta có $\frac{MB}{MN} = \frac{IB}{IN}$ hay $BM.IN = BI.MN$ (đpcm).

c) Đây là một dạng toán liên quan giữa tính bất biến (cố định) và tính thay đổi: Ứng với mỗi điểm M, N thì ta có vị trí của đoạn thẳng MN thay đổi theo (chuyển động) nhưng lại luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định (bất biến). Vậy trước khi tìm lời giải của bài toán giáo viên cần cho học sinh chỉ ra yếu tố cố định, yếu tố nào thay đổi.



Ta có lời giải sau: Từ O kẻ OH, OK theo tứ tự vuông góc với AB và MN. Do O, AB cố định nên OH cố định Vậy đường tròn (O;OH) là đường tròn cố định.

Vì MO là tia phân giác của góc BMN nên OK = OH (t/c đường phân giác)

$\rightarrow$ K$\in$(O;OH) (1) lại có OK$\perp$MN (cách dựng) (2)

từ (1) và (2) suy ra MN là tiếp tuyến của đường tròn (O;OH). Vậy MN luôn tiếp xúc với một đường tròn (O;OH) cố định.

Khai thác bài toán:

Ở phần a) của bài toán ta thấy tích BM.CN không đổi, nếu sử dụng BĐT Côsi ta có thêm câu hỏi sau:

1.1: Tìm vị trí của M, N trên AB, AC để BM + CN đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải: Áp dụng BĐT Côsi cho hai số không âm là BM, CN ta có $BM + CN \geq 2\sqrt{BM.CN}$

dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ BM = CN. Theo phần a) $BM.CN = \frac{a^2}{4}$

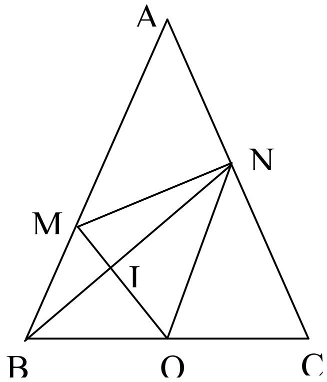
do đó $BM + CN \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{4}} = a$ (không đổi).

Vậy GTNN của BM+CN = a $\Leftrightarrow$ BM = CN = $\frac{a}{2}$ $\Leftrightarrow$ M, N theo thứ tự là trung điểm của AB và AC.

1.2: Ta thử suy nghĩ nếu tam giác ABC là tam giác cân thì bài toán còn đúng không? và giả thiết như thế nào? từ đó ta có bài toán sau:

Bài toán 1.2: Cho tam giác ABC cân ở A, O là trung điểm BC. Trên cạnh AB, AC theo thứ tự lấy các điểm M, N sao cho gócBMO = gócCON.

Chứng minh rằng:



a) $BM.CN = \frac{BC^2}{4}$;

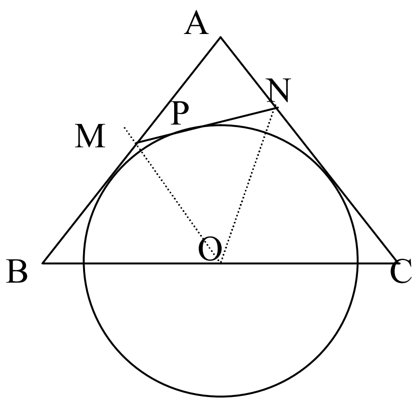
b) BN $\cap$ MO = $\{I\}$, Chứng minh BI.MN = IN.BM;

c) Khi M, N thay đổi trên AB, AC thì MN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Bài toán 1.3: Cho tam giác ABC cân ở A, O thuộc cạnh BC đường tròn tâm O tiếp xúc với các cạnh AB, AC của tam giác. Trên AB, AC theo thứ tự lấy hai điểm M, N.

Chứng minh rằng MN là tiếp tuyến của đ ường tròn (O) $\Leftrightarrow$ $BM.CN = \frac{BC^2}{4}$

Giải: Vì (O) tiếp xúc với các cạnh AB, AC nên O cách đều AB, AC do đó O thuộc tia phân giác của góc A. Lại có ΔABC cân nên phân giác góc A đồng thời là trung tuyến mà O$\in$BC nên O là trung điểm cạnh BC.



($\Rightarrow$): Giả sử MN là tiếp tuyến (O).

Nối OM, ON.

Do MB, MP là hai tiếp tuyến cắt nhau của (O), NP, NC cũng là hai tiếp tuyến cắt nhau của (O), sử dụng tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta suy ra được

góc MON = gócB; gócBOM = gócONC; gócNOC = gócBMO; từ đó suy ra ΔBMO đồng dạng ΔCON (g.g) $\Rightarrow \frac{BM}{CO} = \frac{BO}{CN} \Rightarrow BM.CN = \frac{BC^2}{4}$ (đpcm).

($\Leftarrow$) Giả sử có $BM.CN = \frac{BC^2}{4}$ cần phải chứng minh MN là tiếp tuyến của (O).

Cách 1: Chứng minh tương tự bài toán 1;

Cách 2: Từ M dựng tiếp tuyến với (O) cắt AC ở N'. Ta chứng minh N'$\equiv$N.

Theo phần thuận ta có $BM.CN' = \frac{BC^2}{4}$ kết hợp với giả thiết ta suy ra BM.CN' = BM.CN $\Leftrightarrow$ CN' = CN. Mà N', N cùng thuộc cạnh AC do đó N' $\equiv$ N (đpcm).

Chú ý: - Nếu M nằm trong đoạn AB thì N nằm trong đoạn AC.

- Nếu M nằm ngoài đoạn AB thì N cũng nằm ngoài đoạn AC.

<u>Bài toán 1.4:</u> Cho tam giác ABC cân ở B có gócB = 40^0, O là trung điểm cạch AC, K là chân đường vuông góc kẻ từ O xuống AB, (O) là đường tròn tâm O bán kính OK.

1) Chứng minh (O) tiếp xúc với BC;

2) Giả sử E là một điểm thay đổi trên cạnh AC sao cho góc AOE = $\alpha\ (20^0 < \alpha < 90^0)$, kẻ tiếp tuyến EF với đường tròn (O) tiếp súc với (O) tại P.

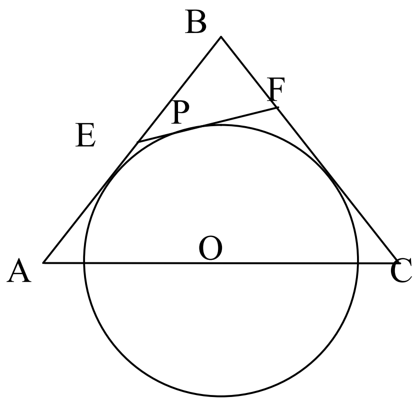
a) Tính theo α các góc của tứ giác AEFC;

b) ΔAEO đồng dạng với ΔCOF;

c) Tính α để AE + CF nhỏ nhất. *(Đề thi chuyên toán ĐHSP H N năm 2005)*

<u>HD Giải:</u>

1) Kẻ OH vuông góc với BC. do tam giác ABC cân ở B nên OH = OK do đó H nằm trên (O), lại có OH $\perp$BC tại H nên BC là tiếp tuyến của (O).

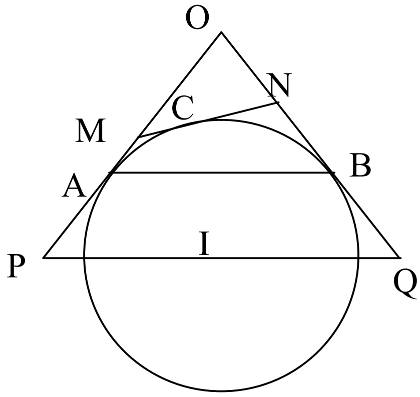


2) a) Ta có $\hat{A} = \hat{C} = 70^0$, tương tự bài toán trên ta suy ra góc AEF = $2(110^0 - \alpha)$, góc CFE = 2α.

b) ΔAEO đồng dạng với ΔCOF (c.g.c)

c) Tương tự lời giải bài ý 1.1 ta suy ra

<u>Bài toán 1.5:</u> Cho đường tròn (I) tiếp xúc với hai cạnh của góc xOy tại A và B. Từ C trên cung nhỏ AB kẻ tiếp tuyến với đường tròn (I) cắt Ox, Oy theo thứ tự tại M, N. Xác định vị trí của C trên cung nhỏ AB để MN có độ dài nhỏ nhất.



Giải: Vì (O) tiếp xúc với các cạnh AB, AC nên O cách đều AB, AC do đó O thuộc tia phân giác của góc A. Lại có ΔABC cân nên phân giác góc A đồng thời là trung tuyến mà O$\in$BC nên O là trung điểm cạnh BC.

($\Rightarrow$): Giả sử MN là tiếp tuyến (O).

Nối OM, ON.

Do MB, MP là hai tiếp tuyến cắt nhau của (O), NP, NC cũng là hai tiếp tuyến cắt nhau của (O), sử dụng tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta suy ra được

Ta có MN = AM + BN = MP + NQ - AP - BQ = MP + NQ - 2AP.

Do đó MN nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ MP + NQ nhỏ nhất (Áp dụng kết quả bài toán 1.1) ta có được C là điểm chính giữa cung nhỏ AB.

Nếu vẫn tiếp tục khai thác bài toán ban đầu ta có thể đưa ra một số bài toán cho học sinh tự làm, coi như bài tập về nhà để học sinh tự giải quyết.

Bài toán 1.6: Cho ΔABC cân ở A. Lấy M, N trên cạnh AB, AC sao cho $BM.CN = \frac{BC^2}{4}$. Tìm vị trí của M, N sao cho ΔAMN có diện tích lớn nhất.

Bài toán 1.7: Cho M, M' trên tia AB và tia đối của tia BA; N, N' thuộc tia CA và tia đối của tia CA. Chứng minh rằng:

1) Nếu MB.NC = M'B.N'C = $\frac{BC^2}{4}$ thì tứ giác MM'N'N ngoại tiếp được một đường tròn;

2)Phân giác tạo bởi MN và MM' đi qua một điểm cố định.

Bài toán 1.8:

1) Cho ΔABC. Dựng hai điểm P, Q thứ tự trên AB và AC sao cho AP = AQ và BP.CQ = $\frac{PQ^2}{4}$;

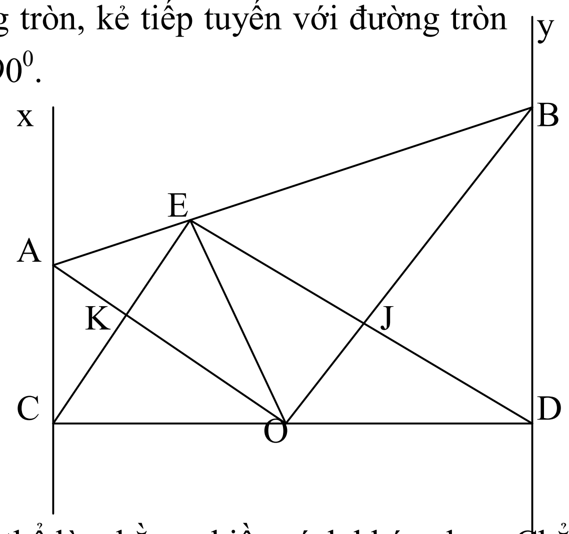
2) Cho hình vuông ABCD, lấy điểm F thuộc CD, G thuộc BC sao cho EG//AF (với E là trung điểm của AB). Chứng minh rằng FG là tiếp tuyến của đường tròn nội tiếp hình vuông.

Bài toán 1.9: Cho tam giác ABC cân ở A. Đường tròn có tâm O là trung điểm của BC tiếp xúc với AB, AC thứ tự ở H và K. Lấy P thuộc đoạn AB, Q thuộc đoạn AC sao cho PQ là tiếp tuyến của (O). Tìm quĩ tích tâm O' của đường tròn ngoại tiếp tam giác OPQ.

Với cách làm tương tự trên, bằng phương pháp đặc biệt hoá, khái quát hoá, tương tự và thao tác tư duy thuận đảo ta cũng hình thành cho học sinh tư duy lôgíc, tư duy sáng tạo, tính độc đáo trong toán học. Chẳng hạn ta có bài toán sau:

Bài toán 2: Cho đường tròn (O) đường kính CD. Từ C và D kẻ hai tiếp tuyến Cx, Dy với đường tròn. Từ một điểm E nằm trên đường tròn, kẻ tiếp tuyến với đường tròn ít Cx tại A và Dy tại B. Chứng minh góc AOB = 90^0.

Phân tích bài toán:



Để chứng minh góc AOB = 90^0, ta có thể làm bằng nhiều cách khác nhau. Chẳng hạn:

- Ta chứng minh OA, OB là hai tia phân giác của cặp góc kề bù;

- Ta chứng minh góc AOB = góc CED, mà góc CED = 90^0 nên gócAOB = 90^0.

Do +) ΔAOB đồng dạng với ΔCED (g.g) nên góc AOB = góc CED, mà góc CED = 90^0 vậy góc AOB = 90^0.

+) Tứ giác OKEJ là hình chữ nhật (có ba góc vuông) nên góc AOB = 90^0.

Tiếp tục tư duy chúng ta còn tìm được thêm một vài cách giải khác nữa. Sau đây ta xét một trong các cách giải đó:

Ta có góc ACO = gócAEO = 90^0 (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

suy ra gócACO + góc AEO = 180^0 suy ra tứ giác ACOE nội tiếp

Do đó ta có gócEAO = gócECO (hai góc cùng chắn một cung OE)

Tương tự ta cũng có gócEBO = gócEDO, mà gócECO + gócEDO = 90^0 (vì gócCEO = 90^0-góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Nên gócEAO + gócEBO = 90^0. Từ đó suy ra gócAOB = 90^0. (Đpcm).

Khai thác bài toán:

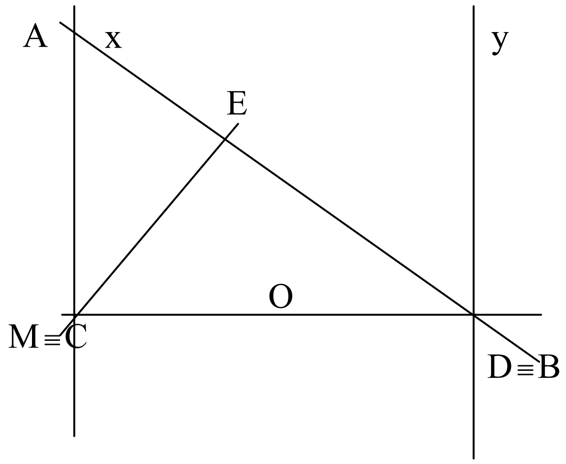
- Nếu ta thay đổi một vài điều kiện của bài toán, chẳng hạn vị trí của điểm O thay bằng điểm M bất kì trên CD. Khi đó đường thẳng vuông góc với ME tại E không còn là tiếp tuyến nữa mà trở thành cát tuyến với (O). Thế thì yêu cầu của bài toán chứng minh gócAMB = 90^0 còn đúng nữa hay không?. Điều này vẫn còn đúng, từ đó ta có bài toán khác như sau:

Bài toán 2.1: Cho đường tròn (O) đường kính CD. Từ C, D kẻ hai tiếp tuyến Cx, Dy. Một điểm E bất kỳ nằm trên đường tròn, điểm M bất kỳ nằm trên CD (M không trùng với C, D, O). Qua E kẻ đường thẳng vuông góc với ME cắt Cx, Dy theo thứ tự tại A và B.

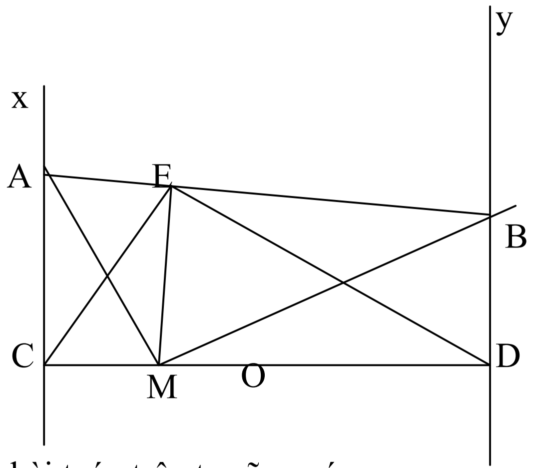
-)Tại sao ta lại đặt vấn đề M khác C, D, O.

- Vì nếu M ≡ O thì trở lại bài toán trên.
- Còn nếu M ≡ C thì đường thẳng ⊥ME cắt Cx tại A, cắt Dy tại B ≡ D. Khi đó ta có góc AMB = 90^0.

Nếu M ≡ D thì tương tự trên.



Chứng minh rằng góc AMB = 90^0.



Ta trở lại bài toán: Như vậy tương tự bài toán trên ta cũng có:

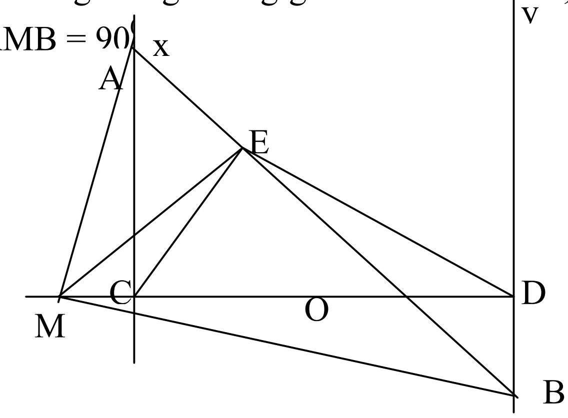
gócMAB = gócECM (do tứ giác ACME nội tiếp)

gócEBM = gócEDM (do tứ giác BDME nội tiếp)

mà gócECM + góc EDM = 90^0 (do gócCED = 90^0). Nên gócAMB = 90^0.

-) Ta tiếp tục khai thác và mở rộng bài toán, chẳng hạn điểm M không nằm trong đoạn CD mà nằm trên đường thẳng CD và giữ nguyên các điều kiện của bài toán 2.1 thì sao? từ đó ta có bài toán sau:

<u>Bài toán 2.2:</u> Cho đường tròn (O) đường kính CD. Từ C, D kẻ hai tiếp tuyến Cx, Dy. Một điểm E bất kỳ nằm trên đường tròn, điểm M bất kỳ nằm trên đường thẳng CD (M không trùng với C, D, O). Qua E kẻ đường thẳng vuông góc với ME cắt Cx, Dy theo thứ tự tại A và B. Chứng minh rằng gócAMB = 90^0.



- Muốn chứng minh góc AMB = 90^0 ta dựa vào cách chứng minh bài toán trên. Ta chứng minh gócMAB + gócMBA = 90^0.

Muống chứng minh gócMAB + góc MBA = 90^0 ta chứng minh

gócMAB + gócMBA = gócCDE + gócDCE = 90^0

Để chứng minh điều này ta cần chứng minh gócMAB = gócECD,

gócMBA = gócMDE. Như vậy ta cần phải chứng minh các tứ giác AMCE, MEDB nội tiếp.

Từ đó ta có lời giải sau:

Chứng minh: Ta có gócACM = gócAEM = 90^0, do đó tứ giác AMCE nội tiếp

$\Rightarrow$ gócMAB = góc ECD (cùng bù gócMCE)

Tương tự tứ giác MEDB nội tiếp $\Rightarrow$ gócMAB = gócMDE (cùng chắn một cung).

Mà gócECD + gócEDC = 90^0. Do đó gócMBA + gócMAB = 90^0.

Suy ra gócAMB = 90^0.

Như vậy nhìn lại bài toán trên ta có thể đưa thành bài toán tổng quát hơn như sau:

<u>Bài toán 2.3:</u> (Bài toán tổng quát)

Cho đường tròn (O) đường kính CD. Một điểm E thuộc đường tròn (O). M là điểm bất kì thuộc đường thẳng CD. Kẻ đường thẳng vuông góc với ME tại E cắt các tiếp tuyến Cx, Dy của đường tròn tại A và B. Chứng minh góc AMB = 90^0.

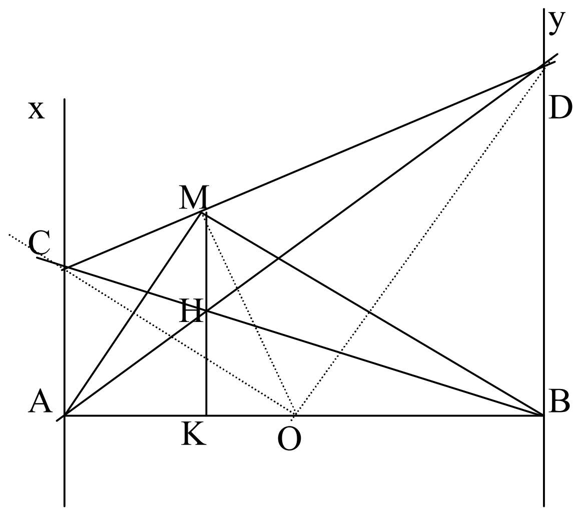
Vẫn tiếp tục bài toán 2 ta khai thác theo khía cạnh khác, ta có bài toán sau:

<u>Bài toán 2.4:</u> Cho đường tròn (O;$\frac{AB}{2}$), qua A và B kẻ hai tiếp tuyến Ax, By của đường tròn. Một điểm M thuộc đường tròn, qua M kẻ tiếp tuyến cắt Ax, By theo thứ tự ở C và D.

1) Chứng minh CD = AC + BD;

2) Đường tròn ngoại tiếp tam giác COD luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định khi M thay đổi trên đường tròn.

3) AD cắt BC ở H chứng minh MH // AC.



Phân tích bài toán:

1) Với phần này rất phù hợp với học sinh trung bình khi học xong bài tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, Ta thấy ngay CM = CA; DM = DB
từ đó suy ra CM + DM = CA + DB mà M nằm giữa C và D nên CD = CA + DB.

2) Cũng tương tự bài toán trên ta có ΔCOD vuông ở O. Mặt khác gọi I là trung điểm của CD thì O $\in \left(I;\dfrac{CD}{2}\right)$ (1).

Lại có tứ giác ABDC là hình thang, OI là đường trung bình nên OI // CA, mà CA $\perp$ AB do đó IO $\perp$ AB (2)

Từ (1) và (2) suy ra AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác COD. Mà AB là đường thẳng cố định nên đường tròn ngoại tiếp tam giác COD luôn tiếp xúc với đường thẳng AB cố định khi M thay đổi trên đường tròn.

3) Với phần này là một bài toán rất hay vì nó đòi hỏi học sinh phải dùng phương pháp phân tích đi lên để tìm lời giải của bài toán. Hơn nữa để tìm ra lời giải học sinh còn phải huy động kiến thức về định lí Talét đảo.

Giáo viên hướng dẫn học sinh tìm lời giải của bài toán bằng sơ đồ phân tích đi lên, như sau:

MH //AC

$\Uparrow$

$\dfrac{DM}{MC}=\dfrac{DH}{HA}$

$\Uparrow$

$\dfrac{DB}{AC}=\dfrac{DH}{HA}$ *(vì DM=DB; MC=CA)*

$\Uparrow$

AC // DB ($\perp$AB)

Từ đó yêu cầu học sinh lên bảng căn cứ vào sơ đồ trình bày lời giải của bài toán:

Ta có AC, BD là hai tiếp tuyến của (O) đường kính AB nên AC$\perp$AB, BD$\perp$AB do đó AC // BD.

Xét ΔACH có AC // BD áp dụng hệ quả định lí Talét, ta có $\dfrac{DB}{AC}=\dfrac{DH}{HA}$ mà DB = DM; AC = MC nên ta có $\dfrac{DM}{MC}=\dfrac{DH}{HA}$ áp dụng định lí Talét đảo trong tam giác DAC suy ra MH // AC.

Khai thác bài toán:

-) Giáo viên đặt vấn đề cho học sinh suy nghĩ. Gọi giao điểm của MH và AB là K, có nhận xét gì về vị trí của H đối với MK? Từ đó ta có bài toán:

<u>Bài toán 2..5:</u> Với giả thiết của bài toán trên. Chứng minh H là trung điểm của MK.

-) Nếu gọi P là giao điểm của BM và Ax. Thì ta cũng có kết quả C là trung điểm của AP.

-) Nếu giáo viên cho thêm điều kiện AC = R$\sqrt{3}$ (AB = 2R) thì chúng ta lại có bài toán liên quan đến tính toán. Từ đó ta có bài toán sau:

Bài toán 2.6: Cho $\left(O;\dfrac{AB}{2}\right)$, từ A, B kẻ các tiếp tuyến Ax, By của đường tròn. Một điểm C trên tia Ax sao cho AC = R$\sqrt{3}$. Từ C kẻ tiếp tuyến CM tới đường tròn cắt By ở D. AD cắt BC ở H.

1) Tính số đo gócAOM;

2) Chứng minh trực tâm của tam giác ACM nằm trên (O);

3) Tính MH theo R.

-) Bây chúng ta lại xét bài toán không tĩnh như trên nữa, mà cho điểm C thay đổi trên tia Ax sao cho AC $\geq R\sqrt{3}$ thì khi đó trực tâm của ΔACM cũng thay đổi theo. Từ đó ta có bài toán sau:

Bài toán 2.7: Cho $\left(O;\dfrac{AB}{2}\right)$, từ A, B kẻ các tiếp tuyến Ax, By của đường tròn. Một điểm C trên tia Ax sao cho AC ≥ R$\sqrt{3}$. Từ C kẻ tiếp tuyến CM tới đường tròn cắt By ở D.Gọi H là trực tâm của tam giác ACM. Tìm quĩ tích điểm H.

-) Lại nhìn bài toán dưới góc độ bài toán cực trị hình học, ta có bài toán sau:

Bài toán 2.8: Cho $\left(O;\dfrac{AB}{2}\right)$ từ A, B kẻ các tiếp tuyến Ax, By của đường tròn. Một điểm M trên đường tròn, từ M kẻ tiếp tuyến của (O) cắt Ax, By thứ tự ở C và D. Tìm vị trí của điểm M để:

1) CD có độ dài nhỏ nhất;

2) Diện tích tam giác COD nhỏ nhất.

Như vậy xuất phát từ bài toán trong SGK, bằng những thao tác tư duy lật ngược vấn đề, tương tự, khái quát hoá, tương tự hoá,… chúng ta đã sáng tạo ra được rất nhiều bài toán xuất phát từ bài toán gốc trong quá trình tìm lời giải, nghiên cứu sâu lời giải: như bài toán tính toán, bài toán quĩ tích, bài toán cực trị,…. Việc làm như thế ở người thày được lặp đi, lặp lại và thường xuyên trong quá trình lên lớp sẽ dần dần hình thành cho học sinh có phương pháp, thói quen đào sâu suy nghĩ, khai thác bài toán ở nhiều góc độ khác nhau. Đặc biệt là rèn cho học sinh có phương pháp tìm lời giải bài toán bằng phương pháp phân tích đi lên-một phương pháp tư duy rất đặc trưng và cực kì hiệu quả khi học môn hình học. Thông qua đó học sinh được phát triển năng lực sáng tạo toán học, nhất là những học sinh khá giỏi. Qua mỗi giờ dạy người thày cần giúp học sinh làm quen và sau đó tạo cơ hội cho học sinh luyện tập, thể hiện một cách thường xuyên thông qua hệ thống câu hỏi gợi mở, hệ thống bài tập từ dễ đến khó.

Trên đây là một vài ý tưởng của tôi đã đưa ra trong quá trình lên lớp trong giờ luyện tập hình học. Theo tôi nó có tác dụng:

- Giúp các em củng cố kiến thức đã học;
- Giúp các em biết vận dụng kiến thức đã học vào bài tập;
- Rèn kĩ năng trình bày cho học sinh;
- Phát triển tư duy toán học thông qua các thao tác tư duy khái quát hoá, đặc biệt hoá, tương tự hoá, tư duy thuận đảo,…
- Dần dần hình thành phương pháp tìm lời giải bài toán hình học, tư duy linh hoạt, phương pháp học toán, học sáng tạo toán học.