ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG TOÁN 9

TRƯỜNG CHUYÊN HÀ NỘI AMSTERDAM- NĂM 2018

Câu 1) Cho biểu thức $A=\dfrac{5}{\sqrt{x}+2}, B=\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{2}{\sqrt{x}+2}\right):\dfrac{x+4}{\sqrt{x}+2}$ với $x\geq 0, x\neq 4$.

a) Tính giá trị của A khi $x=\dfrac{1}{9-4\sqrt{5}}$.

b) Rút gọn B .

c) Tìm các số thực x để $P=\dfrac{A}{B}$ là số nguyên.

Câu 2) Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 24km với vận tốc dự định. Khi đi từ B trở về A người đó tang vận tốc trung bình them 4km/h so với lúc đi, nên thời gian về ít hơn thời gian đi là 30 phút. Tính vận tốc trung bình dự định của xe đạp khi đi từ A đến B .

Câu 3)

a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{2x}{x+y}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}=3\\ \dfrac{3y}{x+y}-\sqrt{x}=-2\end{cases}$.

b) Cho phương trình: $x^2-2(m-1)x+m^2-2m-3=0$ với m là tham số.

+ Chứng minh: Phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m .

+ Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình. Tìm m để: $x_1+1=\sqrt{x_2}$.

Câu 4) Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC}=60^0, AC=b, AB=c, (b>c)$. Dựng đường kính EF của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (F nằm trên cung nhỏ CB) vuông góc BC tại M . Gọi I, J lần lượt là hình chiếu của E lên AB, AC . Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của F lên AB, AC .

a) Chứng minh: $AIEJ, CMJE$ là các tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh: I, J, M thẳng hàng.

c) Chứng minh: $IJ\perp HK$.

d) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC theo b, c .

Câu 5) Cho các số thực $a, b\geq 0, 0\leq c\leq 1$ và $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm GTLN,GTNN của $P=ab+bc+ca+3(a+b+c)$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1)

a) Ta có $x=\frac{1}{9-4\sqrt{5}}=\frac{9+4\sqrt{5}}{9^2-\left(4\sqrt{5}\right)^2}=9+4\sqrt{5}=\left(\sqrt{5}+2\right)^2\Rightarrow\sqrt{x}=\sqrt{5}+2$. Suy ra

$$A=\frac{5}{\sqrt{5}+2+2}=\frac{5}{4+\sqrt{5}}=\frac{5\left(4-\sqrt{5}\right)}{4^2-5}=\frac{5}{11}\left(4-\sqrt{5}\right).$$

b) Ta có:

$$B=\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}-\frac{2}{\sqrt{x}+2}\right):\frac{x+4}{\sqrt{x}+2}=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)-2\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}.\frac{\sqrt{x}+2}{x+4}=\frac{x+4}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}.\frac{\sqrt{x}+2}{x+4}=\frac{1}{\sqrt{x}-2}$$

c) Ta có: $P=\frac{A}{B}=\frac{5}{\sqrt{x}+2}:\frac{1}{\sqrt{x}-2}=\frac{5\left(\sqrt{x}-2\right)}{\sqrt{x}+2}$, dễ thấy $\begin{cases}P\neq 5\\P\neq 0\end{cases}$ ta viết lại biểu thức thành:

$P\left(\sqrt{x}+2\right)=5\left(\sqrt{x}-2\right)\Leftrightarrow\sqrt{x}(P-5)=-2(P+5)\Leftrightarrow\sqrt{x}=\frac{-2(P+5)}{P-5}$, do $x\geq 0$ suy ra

$\frac{-2(P+5)}{P-5}\geq 0$ hay $\frac{P+5}{P-5}\leq 0$ suy ra $P+5, P-5$ trái dấu do $P+5>P-5$

$\Rightarrow\begin{cases}P+5\geq 0\\P-5<0\end{cases}\Leftrightarrow -5\leq P<5$. Vì P là số nguyên suy ra $P\in\{-5;-4;-3;-2;-1;1;2;3;4\}$ thay vào

ta tính được: $\sqrt{x}\in\left\{0;\frac{2}{9};\frac{1}{2};\frac{6}{7};\frac{4}{3};3;\frac{14}{3};8;18\right\}\Rightarrow x$

Câu 2) Gọi vận tốc dự định đi từ A đến B là x (km/h), điều kiện $x>0$.

Vận tốc thực tế khi đi từ B về A là $x+4$ (km/h).

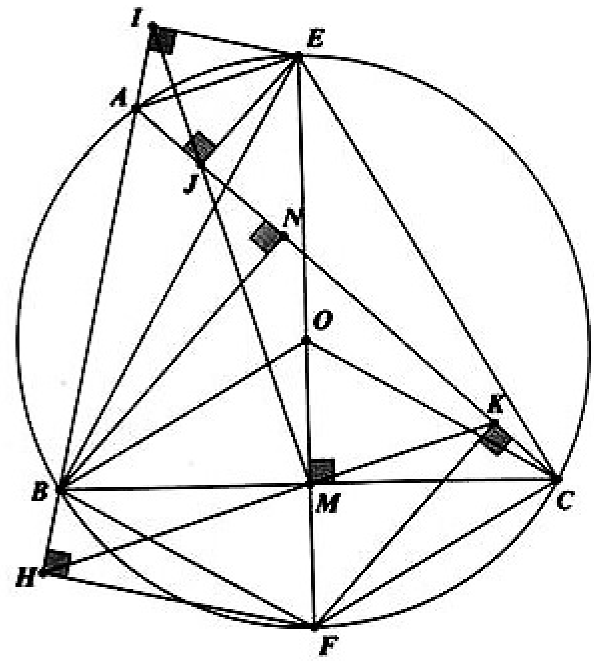
Thời gian dự định đi từ A đến B là $\frac{24}{x}$ giờ. Thời gian thực tế đi từ B về A là: $\frac{24}{x+4}$.

Theo giả thiết ta có:

$\frac{24}{x+4}+\frac{1}{2}=\frac{24}{x}\Leftrightarrow\frac{48+x+4}{2(x+4)}=\frac{24}{x}\Leftrightarrow x^2+4x-192=0\Leftrightarrow(x-12)(x+16)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=12\\x=-16\end{array}\right.$ đối chiếu với điều kiện ta suy ra $x=12$ thỏa mãn. Vậy vận tốc dự định đi từ A đến B là 12 km/h.

Câu 3)

Câu 4)



a) Học sinh tự chứng minh.

b) Từ các tứ giác $IAJE$, $EJMC$, $EABC$ nội tiếp, ta có biến đổi góc sau:

$\widehat{EJI} = \widehat{EAI} = \widehat{ECB} = \widehat{ECM} = 180^0 - \widehat{EJM}$. Từ đó suy ra $\widehat{EJI} + \widehat{EJM} = 180^0$ hay I, J, M thẳng hàng.

Chú ý: Đây là kết quả hình học khá quen thuộc Đường thẳng I, J, M là đường thẳng Simson của điểm E đối với tam giác ABC.

c) Chứng minh tương tự câu b ta có 3 điểm H, M, K thẳng hàng.

Ta có: $\widehat{IHM} = \widehat{BFM} = \widehat{BFE} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{BE}$, tứ giác $BIEM$ nội tiếp nên $\widehat{HIM} = \widehat{BIM} = \widehat{BEM} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{BF}$. Từ đó suy ra $\widehat{IHM} + \widehat{HIM} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{BE} + \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{BF} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{EF} = 90^0$ hay $IM \perp HK$.

d) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì $OB = R$. Dựng đường cao BN của tam giác ABC ($N \in AC$). Ta có:

$BC^2 = BN^2 + NC^2 = BN^2 + (AC - AN)^2 = AC^2 + BN^2 + AN^2 - 2AC.AN = AC^2 + AB^2 - 2AC.AB.\cos\widehat{BAC}$

Hay $BC^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos 60^0 = b^2 + c^2 - bc$.

Do $\widehat{BAC} = 60^0 \Rightarrow \widehat{BOC} = 120^0 \Rightarrow \widehat{BOM} = 60^0$. Trong tam giác vuông BOM ta có:

$\sin\widehat{BOM} = \frac{BM}{OB} \Leftrightarrow OB = \frac{BM}{\sin\widehat{BOM}} = \frac{BC}{2\sin 60^0} = \frac{\sqrt{b^2+c^2-bc}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{b^2+c^2-bc}{3}}$, vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R = \sqrt{\frac{b^2+c^2-bc}{3}}$.

Câu 5) Cho các số thực $a, b \geq 0, 0 \leq c \leq 1$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm GTLN,GTNN của $P = ab + bc + ca + 3(a + b + c)$.

Giải:

a) Điều kiện $x \geq 0, x \neq 1, x+y \neq 0$. Ta viết lại hệ phương trình thành: $\begin{cases} \dfrac{6x}{x+y}+\dfrac{3}{\sqrt{x}-1}=9 \\ \dfrac{6y}{x+y}-2\sqrt{x}=-4 \end{cases}$

Cộng 2 phương trình của hệ ta có: $\dfrac{6x}{x+y}+\dfrac{6y}{x+y}+\dfrac{3}{\sqrt{x}-1}-2\sqrt{x}=9-4$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{\sqrt{x}-1}-2\sqrt{x}+1=0 \Leftrightarrow 3-\left(2\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)=0 \Leftrightarrow 2x-3\sqrt{x}-2=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-2\right)\left(2\sqrt{x}+1\right)=0$

suy ra $\sqrt{x}=2 \Leftrightarrow x=4$ (thỏa mãn) hoặc $\sqrt{x}=-\dfrac{1}{2}$ (loại).

Thay $x=4$ vào ta tìm được $y=0$, vậy hệ có nghiệm $(x;y)=(4;0)$.

b) Xét phương trình: $x^2-2(m-1)x+m^2-2m-3=0$ với m là tham số.

Ta có $\Delta'=(m-1)^2-\left(m^2-2m-3\right)=4>0$ nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Ta tính được: $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{m-1-2}{1}=m-3 \\ x=\dfrac{m-1+2}{1}=m+1 \end{array}\right.$

Xét điều kiện: $x_1+1=\sqrt{x_2}$ (*)

TH 1: $x_1=m-3, x_2=m+1$ thay vào (*) ta có:

$$m-2=\sqrt{m+1} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ m^2-5m+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{5+\sqrt{13}}{2} \\ m=\dfrac{5-\sqrt{13}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow m=\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}.$$

TH 2: $x_1=m+1, x_2=m-3$ thay vào (*) ta có: $m+2=\sqrt{m-3} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m^2+3m+7=0 \end{cases} (VN)$.

Vậy $m=\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$ là giá trị cần tìm.

Ta viết lại $2(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)=(a+b+c)^2-3$ thì

$2P=(a+b+c)^2+6(a+b+c)-3$.

Từ đánh giá quen thuộc: $(a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2)=9 \Rightarrow a+b+c \le 3$. Ta cũng có $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \ge a^2+b^2+c^2=3 \Rightarrow a+b+c \ge \sqrt{3}$ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi 1 trong 2 số a hoặc b bằng 0 và $c=0$.

Từ đó ta có: $3+6\sqrt{3}-3 \le 2P \le 3^2+6.3-3 \Leftrightarrow 3\sqrt{3} \le P \le 12$.

GTLN của P bằng 12 tại $a=b=c=1$, GTNN của P bằng $3\sqrt{3}$ khi $a=\sqrt{3}, b=0, c=0$ hoặc $a=0, b=\sqrt{3}, c=0$.

Chú ý: Bài toán này chỉ cần giả thiết $a,b,c \ge 0$ và $a^2+b^2+c^2=3$ là đủ.