SỐ CHÍNH PHƯƠNG

A. KiÕn thøc cÇn nhí

1. Định nghĩa số chính phương.

Số chính phương là số bằng bình phương của một số nguyên.

(tức là nếu n là số chính phương thì: $n = k^2 \ (k \in Z)$)

2. Một số tính chất cần nhớ

1- Số chính phương chỉ có thể có chữ số tận cùng bằng 0, 1, 4, 5, 6, 9; không thể có chữ tận cùng bằng 2, 3, 7, 8.

2- Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, số chính phương chỉ chứa các thừa số nguyên tố với số mũ chẵn.

3- Số chính phương chỉ có thể có một trong hai dạng 4n hoặc 4n+1. Không có số chính phương nào có dạng 4n + 2 hoặc 4n + 3 (n $\in$ N).

4- Số chính phương chỉ có thể có một trong hai dạng 3n hoặc 3n +1. Không có số chính phương nào có dạng 3n + 2 (n $\in$ N).

5- Số chính phương tận cùng bằng 1, 4 hoặc 9 thì chữ số hàng chục là chữ số chẵn.

Số chính phương tận cùng bằng 5 thì chữ số hàng chục là 2.

Số chính phương tận cùng bằng 6 thì chữ số hàng chục là chữ số lẻ.

6- Số chính phương chia hết cho 2 thì chia hết cho 4.

Số chính phương chia hết cho 3 thì chia hết cho 9

Số chính phương chia hết cho 5 thì chia hết cho 25

Số chính phương chia hết cho 8 thì chia hết cho 16.

7. Mọi số chính phương khi chia cho 5, cho 8 chỉ dư 1, 0, 4.

8. Giữa hai số chính phương liên tiếp không có số chính phương nào.

9. Nếu hai số nguyên liên tiếp có tích là một số chính phương thì một trong hai số đó là số 0.

10. Số các ước của một số chính phương là số lẻ. Ngược lại, một số có số các ước là số lẻ thì số đó là số chính phương.

11. Nếu $n^2 < k < (n+1)^2$ (n $\in$ Z) thì k không là số chính phương.

12. Nếu hai số tự nhiên a và b nguyên tố cùng nhau có tích là một số chính phương thì mỗi số a, b cũng là các số chính phương.

13. Nếu a là một số chính phương, a chia hết cho số nguyên tố p thì a chia hết cho p^2.

14. Nếu tích hai số a và b là một số chính phương thì các số a và b có dạng $a = mp^2; b = mq^2$

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1: Chứng minh một số là số chính phương, hoặc là tổng nhiều số chính phương.

*** Cơ sở phương pháp:**

Để chứng minh một số n là số là số chính phương ta thường dựa vào định nghĩa, tức là chứng minh : $n = k^2 \ (k \in Z)$

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Cho n là một số tự nhiên. Chứng minh rằng: $A = n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ là số chính phương.

Bài toán 2. Cho: $B = 1.2.3 + 2.3.4 + ... + k(k+1)(k+2)$với k là số tự nhiên. Chứng minh rằng 4B + 1 là số chính phương.

Bài toán 3. Chứng minh rằng: $C = \underbrace{11...1}_{2n} + \underbrace{44...4}_{n} + 1$với n là số tự nhiên. Chứng minh rằng C là số chính phương.

Bài toán 4. Cho $a = \underbrace{11...1}_{2016},\ b = \underbrace{10...05}_{2015}$. Chứng minh $\sqrt{ab+1}$ là số tự nhiên.

Dạng 2: Chứng minh một số không là số chính phương.

**** Cơ sở phương pháp:***

Để chứng minh n không là số chính phương, tùy vào từng bài toán ta có thể sử dụng các cách sau:

1) *Chứng minh n không thể viết được dưới dạng một bình phương một số nguyên.*
2) *Chứng minh $k^2 < n < (k+1)^2$ với k là số nguyên.*
3) *Chứng minh n có tận cùng là 2; 3; 7; 8*
4) *Chứng minh n có dạng 4k + 2; 4k + 3*
5) *Chứng minh n có dạng 3k + 2*
6) *Chứng minh n chia hết cho số nguyên tố p mà không chia hết cho p^2.*

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1.Một số tự nhiên có tổng các chữ số bằng 2018 thì có thể là số chính phương được không ? tại sao?

Bài toán 2. Chứng minh rằng số $A = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ trong đó n $\in$ N và n >1không phải là số chính phương.

Bài toán 3. Cho $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{33}$. Hỏi A có là số chính phương không? Vì sao?

Bài toán 4. Chứng minh rằng $A = 2012^{4n} + 2013^{4n} + 2014^{4n} + 2015^{4n}$ không phải là số chính phương với mọi số nguyên dương n.

(Đề thi vào lớp 10 chuyên trường ĐHSP TP Hồ Chí Minh 2015 - 2016)

🗁 Dạng 3: Điều kiện để một số là số chính phương.

**** Cơ sở phương pháp:** Chúng ta thường sử dụng các phương pháp sau:*

- Phương pháp 1: Sử dụng định nghĩa.

- Phương pháp 2: Sử dụng tính chẵn, lẻ.

- Phương pháp 3: Sử dụng tính chất chia hết và chia có dư.

- Phương pháp 4: Sử dụng các tính chất.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1.Tìm số nguyên n sao cho $n(n+3)$ là số chính phương.

Bài toán 2.Tìm số nguyên n sao cho $n+1955$ và $n+2014$ là một số chính phương.

Bài toán 3.Tìm số nguyên dương n để các biểu thức sau là số chính phương:

a) $A = n^2 - n + 2$ b) $B = n^5 - n + 2$

Bài toán 4.Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho các số $n+1,\ 2n+1,\ 5n+1$ đều là các số chính phương.

Bài toán 5.Tìm số tự nhiên n ≥ 1 sao cho tổng 1! + 2! + 3! + … + n! là một số chính phương.

(Đề thi HSG lớp 6 - Phòng giáo dục đào tạo Phúc Yên - Vĩnh Phúc)

🗁 Dạng 4: Tìm số chính phương.

**** Cơ sở phương pháp:** Dựa vào định nghĩa về số chính phương $A = k^2$, với k là số nguyên và các yêu cầu của bài toán để tìm ra số chính phương thỏa bài toán.*

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1.Tìm số chính phương $\overline{abcd}$ biết $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$.

Bài toán 2. Cho A là số chính phương gồm 4 chữ số. Nếu ta thêm vào mỗi chữ số của A một đơn vị thì ta được số chính phương B. Hãy tìm các số A và B.

Bài toán 3.Tìm một số chính phương gồm 4 chữ số sao cho chữ số cuối là số nguyên tố, căn bậc hai của số đó có tổng các chữ số là một số chính phương.

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Cho $a;b;c$ là 3 số nguyên thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$.

Chứng minh rằng $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$ là 1 số chính phương.

Bài 2: Tìm số nguyên dương n sao cho $\dfrac{n(2n-1)}{26}$ là số chính phương .

(Đề TS lớp 10 THPT Chuyên Lam Sơn- Thanh Hóa 2012-2013)

Bài 3: Tìm tất cả các số nguyên n sao cho $A=n^4+n^3+n^2$ có giá trị là số chính phương.

(Đề TS lớp 10 THPT Chuyên Phan Bội Châu-Nghệ An 2010-2011)

Bài 4: Chứng minh rằng mọi số nguyên x, y thì biểu thức

$A=(x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y)+y^4$ có giá trị là số chính phương.

Bài 5: Chứng minh rằng các số sau đây là số chính phương:

a) $A = 224\underbrace{99...9}_{n-2}1\underbrace{00...0}_{n}9$ b) $B = \underbrace{11...1}_{n}\underbrace{55...5}_{n-1}6$

Bài 6: Chứng minh rằng tổng các bình phương của 5 số liên tiếp không thể là số chính phương.

Bài 7: Cho dãy số $49; 4489; 444889; 44448889;...$

Dãy số trên được xây dựng bằng cách thêm số 48 vào giữa số đứng trước nó. Chứng minh rằng tất cả các số của dãy trên đều là số chính phương

Bài 8: Chứng minh rằng nếu p là tích của n số nguyên tố đầu tiên thì $p-1$ và $p+1$ không thể là các số chính phương.

Bài 9: Có hay không số tự nhiên n để 2010 + n^2 là số chính phương.

Bài 10: Chứng minh rằng tổng các bình phương của 5 số tự nhiên liên tiếp không thể là một số chính phương

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:Ta có: $a^2+1=a^2+ab+bc+ca=(a+b)(a+c)$

Tương tự: $b^2+1=(a+b)(b+c)$; $c^2+1=(b+c)(c+a)$

Do đó: $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)=\left[(a+b)(b+c)(c+a)\right]^2$

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 2:

Đặt $n(2n-1) = 26q^2$ (1)

Do VP chẵn và $(2n-1)$ lẻ nên n chẵn hay $n = 2k$

Do đó: (1) suy ra $k(4k-1) = 13q^2$ (2)

Nhận thấy $(k, 4k-1) = 1$ nên:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} k = u^2 \\ 4k-1 = 13v^2 \end{cases} \vee \begin{cases} k = 13u^2 \\ 4k-1 = v^2 \end{cases}$$

Xét trường hợp 1 ta có:

$$\begin{cases} k = u^2 \\ 4k-1 = 13v^2 \end{cases} \Rightarrow 4k = 13v^2 + 1 = 12v^2 + v^2 + 1 \Rightarrow v^2 + 1 \vdots 4 \Rightarrow v^2 \equiv 3 \pmod 4 \text{ (vô lý)}$$

Xét trường hợp 2 ta có:

$$\begin{cases} k = 13u^2 \\ 4k-1 = v^2 \end{cases} \Rightarrow 4k = v^2 + 1 \text{ (vô lý)}$$

Vậy không tồn tại n thỏa mãn yêu cầu đầu bài.

Bài 3: Ta có A = $n^4 + n^3 + n^2 = n^2\left(n^2 + n + 1\right)$

Với $n = 0$ thì $A = 0$ (thỏa mãn)

Với $n \neq 0$ thì A là số chính phương khi và chỉ khi $n^2 + n + 1$ là số chính phương.

Khi đó $n^2 + n + 1 = k^2$ $(k \in \mathbb{N})$. $\Rightarrow 4\left(n^2 + n + 1\right) = 4k^2 \Rightarrow (2n+1)^2 - 4k^2 = -3$

$\Rightarrow (2n+1-2k)(2n+1+2k) = -3$

Vì $2n+1+2k \geq 2n+1-2k, \ \forall n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}$ nên

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2n+1-2k = -3 \\ 2n+1+2k = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 2n+1-2k = -1 \\ 2n+1+2k = 3 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} 2n+1-2k = -3 \\ 2n+1+2k = 1 \end{cases} \Rightarrow n = -1 \quad \text{(thỏa mãn)}$$

$$\begin{cases} 2n+1-2k = -1 \\ 2n+1+2k = 3 \end{cases} \Rightarrow n = 0 \quad \text{(loại)}$$

Vậy $n = 0; n = -1$

Bài 4: Ta có

$$A = (x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y) + y^4 = \left(x^2 + 5xy + 4y^2\right)\left(x^2 + 5xy + 6y^2\right) + y^4$$

Đặt $x^2 + 5xy + 5y^2 = t \quad (t \in Z)$ thì

$$A = (t - y^2)(t + y^2) + y^4 = t^2 - y^4 + y^4 = t^2 = (x^2 + 5xy + 5y^2)^2$$

Vì x, y, z $\in$ Z nên $x^2 \in Z, \quad 5xy \in Z, \quad 5y^2 \in Z \ \Rightarrow x^2 + 5xy + 5y^2 \in Z$

Vậy A là số chính phương.

Bài 5: a) Ta có:

$$A = 2249\underbrace{9...9}_{n-2}10\underbrace{0...0}_{n}9$$
$$= 224.10^{2n} + 99...9.10^{n+2} + 10^{n+1} + 9$$
$$= 224.10^{2n} + \left(10^{n-2} - 1\right).10^{n+2} + 10^{n+1} + 9$$
$$= 224.10^{2n} + 10^{2n} - 10^{n+2} + 10^{n+1} + 9$$
$$= 225.10^{2n} - 90.10^{n} + 9$$
$$= \left(15.10^{n} - 3\right)^2$$

Vậy A là số chính phương.

b) Ta có :

$$B = \underbrace{11..1}_{n}\underbrace{55..5}_{n-1}6 = \underbrace{11..1}_{n}\underbrace{55..5}_{n}+1 = \underbrace{11...1}_{n}.10^n + 5.\underbrace{11...1}_{n}+1$$
$$= \frac{10^n-1}{9}.10^n + 5.\frac{10^n-1}{9} + 1 = \frac{10^{2n} - 10^n + 5.10^n - 5 + 9}{9}$$
$$= \frac{10^{2n} + 4.10^n + 4}{9}$$
$$= \left(\frac{10^n + 2}{3}\right)^2$$

Do đó B là số chính phương.

Bài 6: Giả sử: $n-2; n-1; n; n+1; n+2$ với $2 \le n \in \mathbb{N}$ là 5 số tự nhiên liên tiếp

Ta có: $(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 5\left(n^2+2\right)$

Vì n^2 không thể có chữ số tận cùng là 3 hoặc 8 nên $\left(n^2+2\right) \not\vdots\, 5 \Rightarrow 5\left(n^2+2\right)$ không là số chính phương.

Vậy tổng các bình phương của 5 số tự nhiên liên tiếp không phải số chính phương.

Bài 7:Ta có $\underbrace{44...4}_{n}\underbrace{88...8}_{n-1}9 = \underbrace{44...4}_{n}\underbrace{88..8}_{n}+1 = \underbrace{44...4}_{n}.\, 10^n + 8.\,\underbrace{11...1}_{n}+1$

$$= 4.\frac{10^n-1}{9}.10^n + 8.\frac{10^n-1}{9} + 1$$

$$= \frac{4.10^{2n} - 4.10^n + 8.10^n - 8 + 9}{9} = \frac{4.10^{2n} + 4.10^n + 1}{9}$$

$$= \left(\frac{2.10^n + 1}{3}\right)$$

Ta thấy $2.10^n + 1 = 200...01$ (có $n-1$ chữ số 0) có tổng các chữ số chia hết cho 3 nên nó chia hết cho 3

Suy ra $\left(\frac{2.10^n+1}{3}\right) \in \mathbb{N}$ hay các số có dạng 44...488...89 là số chính phương.

Bài 8: Vì p là tích của n số nguyên tố đầu tiên

Nên $p\,\vdots\,2$ và p không chia hết cho 4 (1)

a) Giả sử $p+1$ là số chính phương. Đặt $p+1=m^2\left(m\in\square\right)$

Vì p chẵn nên $p+1$ lẻ $\Rightarrow m^2$ lẻ $\Rightarrow m$ lẻ.

Đặt $m=2k+1\left(k\in\square\right)$.

Ta có: $m^2=4k^2+4k+1$

$\Rightarrow p+1=4k^2+4k+1$

$\Rightarrow p=4k^2+4k=4k\left(k+1\right)\vdots\,4$ mâu thuẫn với (1)

$\Rightarrow p+1$ là số chính phương.

b) $p=2\cdot3\cdot5\cdots$ là số chia hết cho 3 $\Rightarrow p-1$ có dạng $3k+2$.

Không có số chính phương nào có dạng $3k+2$

Nên $p-1$ không là số chính phương.

Vậy nếu p là tích n số nguyên tố đầu tiên thì $p-1$ và $p+1$ không là số chính phương.

Bài 9: Giả sử 2010 + n^2 là số chính phương thì 2010 + n^2 = m^2 ($m\in N$)

Từ đó suy ra m^2 - n^2 = 2010 $\Leftrightarrow$ (m + n) (m – n) = 2010

Như vậy trong 2 số m và n phải có ít nhất 1 số chẵn (1)

Mặt khác m + n + m – n = 2m $\Rightarrow$ 2 số m + n và m – n cùng tính chẵn lẻ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ m + n và m – n là 2 số chẵn.

$\Rightarrow$ (m + n) (m – n) $\vdots$ 4 nhưng 2006 không chia hết cho 4

$\Rightarrow$ Điều giả sử sai.

Vậy không tồn tại số tự nhiên n để 2010 + n^2 là số chính phương.

Bài 10: Gọi 5 số tự nhiên liên tiếp đó là $n-2,n-1,n,n+1,n+2\left(n\in\square,n\geq2\right)$.

Ta có: $\left(n-2\right)^2+\left(n-1\right)^2+n^2+\left(n+1\right)^2+\left(n+2\right)^2=5.\left(n^2+2\right)$

Vì n^2 không thể tận cùng bởi 3 hoặc 8

Do đó n^2+2 không thể chia hết cho 5

Suy ra: $5.\left(n^2+2\right)$ không là số chính phương

Hãy nói cách khác: A không là số chính phương