SỐ NGUYÊN TỐ, HỢP SỐ

A. KiÕn thøc cÇn nhí

1. Định nghĩa số nguyên tố, hợp số.

1) Số nguyên tố là những số tự nhiên lớn hơn 1, chỉ có 2 ước số là 1 và chính nó.

Ví dụ: 2, 3, 5, 7, 11, 13,17, 19....

2) Hợp số là số tự nhiên lớn hơn 1 và có nhiều hơn 2 ước.

Ví dụ: 4 có 3 ước số: 1 ; 2 và 4 nên 4 là hợp số.

3) Các số 0 và 1 không phải là só nguyên tố cũng không phải là hợp số.

4) Bất kỳ số tự nhiên lớn hơn 1 nào cũng có ít nhất một ước số nguyên tố.

2. Một số tính chất.

- Có vô hạn số nguyên tố.
- Nếu số nguyên tố p chia hết cho số nguyên tố q thì $p=q$.
- Nếu tích abc chia hết cho số nguyên tố p thì ít nhất một thừa số của tích abc chia hết cho số nguyên tố p.
- Nếu a và b không chia hết cho số nguyên tố p thì tích ab không chia hết cho số nguyên tố p .
- Nếu A là hợp số thì A có ít nhất một ước nguyên tố không vượt quá $\sqrt{A}$.

*Chứng minh.*Vì n là hợp số nên $n=ab$ với $a,b\in \square ,1<a\le b<n$ và a là ước nhỏ nhất của n. Thế thì $n\ge a^2$. Do đó $a\le \sqrt{n}$.

3. Phân tích một số ra thừa số nguyên tố:

- Phân tích một số tự nhiên lớn hơn 1 ra thừa số nguyên tố là viết số đó dưới dạng một tích các thừa số nguyên tố.

+ Dạng phân tích ra thừa số nguyên tố của mỗi số nguyên tố là chính số đó.

+ Mọi hợp số đều phân tích được ra thừa số nguyên tố, phân tích này là duy nhất nếu không tính thứ tự các thừa số.

Chẳng hạn $A=a^\alpha.b^\beta...c^\gamma$, trong đó a, b, c là các số nguyên tố và $\alpha, \beta, ..., \gamma \in N^*$

Khi đó số các ước số của A được tính bằng $(\alpha+1)(\beta+1)...(\gamma+1)$

Tổng các ước số của A được tính bằng $\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}.\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}...\frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1}$

4. Số nguyên tố cùng nhau.

Hai số a và b nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi $(a,b)=1$.

Các số a, b, c nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi $(a,b,c)=1$.

Các số a, b, c đôi một nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi $(a,b)=(b,c)=(c,a)=1$.

5. Cách nhận biết số nguyên tố.

Cách 1

Chia số đó lần lượt cho các số nguyên tố từ nhỏ đến lớn: 2; 3; 5; 7...

- Nếu có một phép chia hết thì số đó không là số nguyên tố.

- Nếu thực hiện phép chia cho đến lúc thương số nhỏ hơn số chia mà các phép chia vẫn có số dư thì số đó là số nguyên tố.

Cách 2

- Một số có hai ước số lớn hơn 1 thì số đó không phải là số nguyên tố.

- Nếu A là hợp số thì A có ít nhất một ước nguyên tố không vượt quá $\sqrt{A}$.

- Với quy tắt trên trong một khoảng thời gian ngắn, với các dấu hiệu chia hết thì ta nhanh chóng trả lời được một số có hai chữ số nào đó là nguyên tố hay không.

B. MỘT SỐ DẠNG TOÁN SỐ NGUYÊN TỐ, HỢP SỐ

🗁 Dạng 1: Chứng minh một số là số nguyên tố hay hợp số

Bài toán 1. Nếu p và $p^2 + 8$ là các số nguyên tố thì $p^2 + 2$ là số nguyên tố.

Bài toán 2. Chứng minh rằng n^4+4 là một số nguyên tố khi $n=1$.

Bài toán 3. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n>1$ thì n^5+n^4+1 là hợp số.

Bài toán 4. Chứng minh rằng nếu 2^n-1 là số nguyên tố $(n>2)$ thì 2^n+1 là hợp số.

Bài toán 5. Cho p và $8p-1$ là các số nguyên tố. Chứng minh $8p+1$ là hợp số.

Bài toán 6. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n, luôn chọn được $n^{2020}+n^{2019}+1$ số nguyên dương liên tiếp mà tất cả đều là hợp số.

🗁 Dạng 2: Chứng minh một số bài toán có liên quan đến tính chất của số nguyên tố

Bài toán 1. Chứng minh rằng nếu p và $p+2$ là hai số nguyên tố lớn hơn 3 thì tổng của chúng chia hết cho 12.

Bài toán 2. Chứng minh rằng mọi ước nguyên tố của $2014!-1$ đều lớn hơn 2014.

Bài toán 3. Cho các số $p=b^c+a, q=a^b+c, r=c^a+b$ là các số nguyên tố ($a,b,c\in N^*$). Chứng minh rằng ba số p, q, r có ít nhất hai số bằng nhau.

Bài toán 4. Cho số tự nhiên $n\geq 2$ và số nguyên tố p thỏa mãn $p-1$ chia hết cho n đồng thời n^3-1 chia hết cho p. Chứng minh rằng $n+p$ là một số chính phương

🗁 Dạng 3: Tìm số nguyên tố thỏa mãn điều kiện nào đó

Đối với dạng toán tìm số nguyên tố thỏa mãn điều kiện cho trước, chúng ta thường sử dụng các tính chất của phép chia số nguyên sau để giải:

* Trong n số nguyên liên tiếp có một và chỉ một số chia hết cho n.

* Mọi số nguyên tố lớn hơn 2 đều có dạng $4n \pm 1$.

* Mọi số nguyên tố lớn hơn 3 đều có dạng $3n \pm 1$.

* Mọi số nguyên tố lớn hơn 3 đều có dạng $6n \pm 1$.

Chứng minh:

● Xét m là số nguyên tố lớn hơn 2

Mỗi số tự nhiên khi chia cho 4 có một trong các số dư 0, 1, 2, 3 do đó mọi số tự nhiên đều viết được dưới dạng $4n - 1; 4n; 4n + 1; 4n + 2$.

Do m là số nguyên tố lớn hơn 2 nên không thể chia hết 2 do đó m không có dạng 4n và4n + 2.

Vậy mọi số nguyên tố lớn hơn 2 đều có dạng: $4n \pm 1$

Không phải mọi số có dạng $4n \pm 1$ đều là số nguyên tố.

Chẳng hạn $4.4 - 1 = 15$ không là số nguyên tố .

● Xét m là số nguyên tố lớn hơn 3

+) Ta thấy mọi số nguyên tố lớn hơn 3 đều phải có dạng $3n \pm 1$ vì nếu có dạng 3k thì sẽ chia hết cho 3 nên không thể là số nguyên tố.

Không phải mọi số có dạng $3n \pm 1$ đều là số nguyên tố.

Chẳng hạn $3.5 + 1 = 16$ không là số nguyên tố.

+) Mỗi số tự nhiên khi chia cho 6 có một trong các số dư 0, 1, 2, 3, 4, 5 do đó mọi số tự nhiên đều viết được dưới dạng $6n - 1; 6n; 6n + 1; 6n + 2; 6n + 3$

Do m là số nguyên tố lớn hơn 3 nên không thể chia hết 2 và 3 do đó m không có dạng 6n và 6n;6n + 2; 6n + 3.

Vậy mọi số nguyên tố lớn hơn 3 đề có dạng: $6n \pm 1$.

Không phải mọi số có dạng $6n \pm 1$ đều là số nguyên tố.

Chẳng hạn $6.4 + 1 = 25$ không là số nguyên tố.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1.Tìm tất cả số nguyên tố p sao cho p + 2 và p + 4 là các số nguyên tố.

Bài toán 2.Tìm tất cả số nguyên tố p sao cho p + 2; p + 6; p + 8; p + 14 đều là các số nguyên tố.

Bài toán 3.Tìm số tự nhiên n sao cho $\frac{n^3 - 1}{9}$ là số nguyên tố.

Bài toán 4.Tìm số nguyên tố p sao cho $43p + 1$ là lập phương của một số tự nhiên.

Bài toán 5.Tìm tất cả các số nguyên tố p để p vừa là tổng vừa là hiệu của hai số nguyên tố.

🗁 Dạng 4: Nhận biết số nguyên tố, sự phân bố nguyên tố trong tập hợp số tự nhiên

Từ 1 đến 100 có 25 số nguyên tố, trong trăm thứ hai có 21 số nguyên tố, trong trăm thứ ba có 16 số nguyên tố, … Trong nghìn đầu tiên có 168 số nguyên tố, trong nghìn thứ hai có

145 *số nguyên tố, trong nghìn thứ ba có* 127 *số nguyên tố, … Như vậy càng đi xa theo dãy số tự nhiên, các số nguyên tố càng thưa dần.*

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Nếu $p \geq 5$ và $2p+1$ là các số nguyên tố thì $4p+1$ là số nguyên tố hay là hợp số?

Bài toán 2. Tìm số tự nhiên k để dãy : $k+1, k+2, k+3, ..., k+10$ chứa nhiều số nguyên tố nhất.

Bài toán 3. Chứng minh rằng trong 30 số tự nhiên liên tiếp lớn hơn 5, có ít nhất 22 hợp số.

Bài toán 4. Có tồn tại 1000 số tự nhiên liên tiếp đều là hợp số không?

Bài toán 5. (Tổng quát bài số 4)

Chứng minh rằng có thể tìm được 1 dãy số gồm n số tự nhiên liên tiếp (n > 1) không có số nào là số nguyên tố ?

🗁 Dạng 5: Chứng minh có vô số số nguyên tố dạng $\mathbf{ax+b}$ (với $\mathbf{x \in N}$ và $\mathbf{(a,b)=1}$)

Đây là dạng toán tương đối khó, chúng ta thường giải bằng phương pháp phản chứng. Với dạng toán này, ở trình độ THCS các em chỉ giải quyết được những bài tập ở dạng đơn giản như $3x-1$ *và* $4x+3$*. Việc chứng các bài tập ở dạng này phức tạp hơn, các em sẽ gặp nhiều khó khăn chứ không thể dễ dàng chứng minh được. Chẳng hạn chứng minh về vô số số nguyên tố có dạng 4a + 1; 6a + 1……… phức tạp hơn nhiều.*

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Chứng minh rằng có vô số số nguyên tố dạng $3k-1$.

Bài toán 2. Chứng minh rằn tồn tại vô số các số nguyên tố có dạng $4k+3$.

🗁 Dạng 6: Sử dụng nguyên lý Dirichlet trong bài toán số nguyên tố

Bài toán 1. Cho $p > 5$ là số nguyên tố. Chứng minh rằng tồn tại một số có dạng 111…11 chia hết cho p.

Bài toán 2. Chứng minh rằng trong 12 số nguyên tố phân biệt luôn chọn ra được 6 số ký hiệu p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 sao cho $(p_1-p_2)(p_4-p_3)(p_5+p_6) \vdots 1800$.

🗁 Dạng 7: Áp dụng định lý Fermat

Cho p là số nguyên tố và a là số nguyên sao cho $(a,p)=1$. Khi đó: $a^{p-1} \equiv 1$ (mod p).

Chứng minh

Xét các số a, $2a$, …, $(p-1)a$. Dễ thấy, không có số nào trong $p-1$ số trên chia hết cho p và không có hai số nào có cùng số dư khi chia cho p. Vậy khi chia $p-1$ số nói trên cho p, ta nhận được các số dư là 1, 2, …, $p-1$. Suy ra $a.(2a).(3a)...((p-1)a) \equiv 1.2.3.(p-1)$ (mod p) hay $(1.2.3...(p-1)).a^{p-1} \equiv 1.2.3...(p-1)$ (mod p)

Vì $(1.2.3...(p-1), p) = 1$ nên $a^{p-1} = 1$(mod p).

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1.Tìm số nguyên tố p sao cho $2^p + 1$ chia hết cho p.

Bài toán 2. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 2. Chứng minh rằng có vô số số tự nhiên thỏa $n.2^n - 1$ chia hết cho p.

Bài toán 3. Cho p là số nguyên tố, chứng ming rằng số $2^p - 1$ chỉ có ước nguyên tố có dạng $2pk + 1$.

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Tìm số nguyên tố p sao cho các số sau cũng là số nguyên tố:

a) p + 2 và p + 10.

b) p + 10 và p + 20.

Bài 2. Chứng minh rằng nếu n và $n^2 + 2$ là các số nguyên tố thì $n^3 + 2$ cũng là số nguyên tố.

Bài 3. Chứng minh rằng nếu a, a + k, a + 2k ($a, k \in N^*$) là các số nguyên tố lớn hơn 3 thì k chia hết cho 6.

Bài 4. Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì (p - 1)(p + 1) chia hết cho 24.

Bài 5. Một số nguyên tố p chia cho 42 có dư là một hợp số r. Tìm r.

Bài 6. Một số nguyên tố p chia cho 30 có số dư là r. Tìm r biết rằng r không là số nguyên tố.

Bài 7. Chứng minh rằng số $\underbrace{11...1}_{n}2\underbrace{11...1}_{n}$ là hợp số với $n \geq 1$.

Bài 8.Tìm n số sao cho 10101...0101 (n chữ số 0 và n + 1 chữ số 1 xen kẽ nhau) là số nguyên tố.

Bài 9. Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên dương m, n, p với p nguyên tố thỏa mãn: $m^{2019} + n^{2019} = p^{2018}$

(Trích đề thi HSG lớp 9 TP. Hà Nội 2017-2018)

Bài 10. *(Trích đề thi HSG TP. Hà Nội năm học 2013-2014)*

Tìm số tự nhiên n để $25^{n^2-3n+1} - 12$ là số nguyên tố

Bài 11.*(Trích đề thi HSG thành phố Hà Nội năm 2019-2020)*

Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương (x, y, p) với p là số nguyên tố thỏa mãn

$x^2 + p^2y^2 = 6(x + 2p)$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. a) b) Đáp số: p = 3. Xét p dưới các dạng: p = 3k, p = 3k + 1, p = 3k + 2 (k$\in$N).

Bài 2. n = 3.

Bài 3. Số nguyên tố lớn hơn 3 có dạng 6n +1, 6n + 5. Do đó 3 số a, a + k, a + 2k phải có ít nhất 2 số có cùng một dạng, hiệu là k hoặc 2k chia hết cho 6, suy ra k chia hết cho 3.

Bài 4. Ta có $(p-1)p(p+1)\vdots 3$ mà (p,3) = 1 nên

$(p-1)(p+1)\vdots 3$ (1).

p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ, p - 1 và p + 1 là hai số chẵn liên tiếp. Trong hai số chẵn liên tiếp, có một số là bội của 4 nên tích chúng chia hết cho 8 (2).

Từ (1) và (2) suy ra (p -1)(p + 1) chia hết cho hai số nguyên tố cùng nhau 3 và 8.

Vậy (p - 1)(p + 1)$\vdots$ 24.

Bài 5. Ta có p = 42k + r = 2. 3. 7k + r (k, r $\in$N, 0 < r < 42). Vì p là số nguyên tố nên r không chia hết cho 2, 3, 7.

Các hợp số nhỏ hơn 42 và không chia hết cho 2 là 9, 15, 21, 25, 27, 33, 35, 39.

Loại đi các số chia hết cho 3, cho 7, chỉ còn 25. Vậy r = 25.

Bài 6. Ta có p = 30k + r = 2. 3. 5k + r (k,r $\in$N,0 < r < 30). Vì p là số nguyên tố nên p không chia hết cho 2, 3, 5.

Các hợp số nhỏ hơn 30 và không chia hết cho 2 là 9, 15, 21, 25, 27.

Loại đi các số chia hết cho 3, 5 thì không còn số nào nữa. Vậy r không phải là hợp số.

r không phải là hợp số cũng không phải là số nguyên tố, suy ra r =1.

Bài 7. $\underbrace{11...1}_{n}2\underbrace{11...1}_{n}=\underbrace{11...1}_{n+1}\underbrace{0...0}_{n}+\underbrace{11...1}_{n+1}=\underbrace{11...1}_{n+1}(10^n+1)$.

suy ra đpcm.

Bài 8. $p=1010...101=\dfrac{(10^{n+1}-1)(10^{n+1}+1)}{9.11}$.

n =1: p = 101 là số nguyên tố.

n > 1: p là hợp số.

Bài 9. Giả sử tồn tại bộ số (m,n,p) thỏa mãn yêu cầu đề bài. Dễ thấy $0<m,\ n<p$.
Phương trình đã cho có thể được viết lại thành

$$(m+n)A=p^{2018},\ (1)$$

trong đó $A=m^{2018}-m^{2017}n+m^{2017}n^2-...-mn^{2017}+n^{2018}$

Nếu A không chia hết cho p thì từ (1), ta có $A=1$ và

$$m+n=p^{2018}=m^{2019}+n^{2019}.$$

Từ đó dễ thấy $m = n = 1$ và $p^{2018} = 2$, mâu thuẫn. Vậy A chia hết cho p.

Do $m + n > 1$ nên từ (1) suy ra $m + n$ chia hết cho p. Khi đó, ta có

$$A \equiv 2019m^{2018} \pmod{p}.$$

Do A chia hết cho p và $0 < m < p$ nên từ kết quả trên, ta suy ra 2019 chia hết cho p, hay $p = 2019$. Từ đây, dễ thấy m và n khác tính chẵn lẻ, hay $m \neq n$.

Bây giờ, ta viết lại phương trình đã cho dưới dạng\ $\left(m^3\right)^{673} + \left(n^3\right)^{673} = 2019^{2018}$,

hay $(m+n)\left(m^2 - mn + n^2\right) = 2019^{2018}$,

trong đó, $B = \left(m^3\right)^{672} - \left(m^3\right)^{671}\left(n^3\right) + \ldots - \left(m^3\right)\left(n^3\right)^{671} + \left(n^3\right)^{672}$. Do $m \neq n$ nên $m^2 - mn + n^2 = (m-n)^2 + mn > 1$, từ đó ta có $m^2 - mn + n^2$ chia hết cho 2019. Tuy nhiên, điều này không thể xảy ra do

$$m^2 - mn + n^2 \equiv 3n^2 \pmod{2019}$$

$$m^2 - mn + n^2 \not\equiv 0 \pmod{2019}.$$

Vậy không tồn tại các số m, n, p thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bài 10. Ta có $2n^2 - 6n + 2 = 2\left[n(n-3) + 1\right]$

Vì n(n – 3) chẵn nên n(n – 3) + 1 = 2k +1 với $k \in N \cup \{-1\}$.

Suy ra $5^{2n^2-6n+2} - 12 = 25^{2k+1} + 1 - 13 \vdots 13$

Vì vậy $5^{2n^2-6n+2} - 12$ nguyên tố hay $5^{2n^2-6n+2} - 12 = 13$

nên n(n – 3) + 1 = 1 , suy ra n = 0 hoặc n = 3.

Bài 11. Do 6(x + 2p) chia hết cho 3 nên từ phương trình đã cho ta suy ra $x^2 + p^2y^2$ chia hết cho 3. Mặt khác, ta có để ý rằng, với mọi số nguyên a thì a^2 chia cho 3 dư 0 hoặc 1. Do đó, để $x^2 + p^2y^2$ chia hết cho 3 thì ta phải có x^2 và p^2y^2 cùng chia hếtt cho 3. Suy ra x và py cùng chia hết cho 3.

Đặt x = 3a với a nguyên dương. Phương trình đã cho có thể được viết lại thành $9a^2 + p^2y^2 = 18a + 12p$ (1)

Do $9a^2, p^2y^2$ và 18a chia hết cho 9 nên từ phương trình trên, ta suy ra 12p chia hết cho 9, tức là p chia hết cho 3. Mà p là số nguyên tố nên p = 3. Khi đó, phương trình (1) có thể viết lại thành $a^2 + y^2 = 2a + 4$.

Hay $(a-1)^2 + y^2 = 5$ (2)

Vì $(a-1)^2 \geq 0$ nên từ phương trình trên, ta suy ra $y^2 \leq 5$. Do y là số nguyên dương nên ta có $y \in \{1, 2\}$. Bằng phép thử trực tiếp, ta tìm được các cặp số nguyên dương (a, y) thỏa mãn phương trình (2) là (3,1) và (2,2). Từ đó suy ra, có hai bộ (x, y, p) thỏa mãn yêu cầu đề bài là (9, 1, 3) và (6, 2, 3).