TỔNG HỢP CÁC CÂU VỀ QUAN HỆ CHIA HẾT SỐ NGUYÊN TỐ, SỐ CHÍNH PHƯƠNG TRONG ĐỀ THI HSG TP HÀ NỘI

1. Đề thi HSG lớp 9 TP Hà Nội năm 2019-2020

a) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $n^2+3n+11$ không chia hết cho 49.

b) Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương (x, y, p) với p là số nguyên tố thỏa mãn $x^2+p^2y^2=6\left(x+2p\right)$.

2. Đề thi HSG lớp 9 TP Hà Nội năm 2018-2019

a) Biết $a;b$ là các số nguyên dương thỏa mãn a^2-ab+b^2 chia hết cho 9, chứng minh rằng cả a và b đều chia hết cho 3.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho 9^n+11 là tích của $k\left(k\in \mathbb{N},k\ge 2\right)$ số tự nhiên liên tiếp.

3. Đề thi HSG lớp 9 TP Hà Nội năm 2017-2018

Chứng minh rằng không tồn tại các số dương m, n, p với p nguyên tố thỏa mãn:

$m^{2019}+n^{2019}=p^{2018}$

4. Đề thi HSG lớp 9 TP Hà Nội năm 2016-2017

a) Chứng minh rằng n^5+5n^3-6n chia hết cho 30 với mọi số nguyên dương n.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương $\left(x;y\right)$ sao cho x^2+8y và y^2+8x đều là số chính

5. Đề thi HSG lớp 9 TP Hà Nội năm 2015-2016

a) Cho các nguyên a, b, c, d thỏa mãn điều kiện $a^3+b^3=2\left(c^3-8d^3\right)$.

Chứng minh rằng a+ b + c + d chia hết cho 3.

b) Tìm tất cả các số nguyên tố x sao cho 2^x+x^2 là số nguyên tố.

6. Đề thi HSG lớp 9 TP Hà Nội năm 2014-2015

Cho n nguyên dương. Chứng minh rằng $A=2^{3n+1}+2^{3n-1}+1$ là hợp số

7. Đề thi HSG lớp 9 TP Hà Nội năm 2013-2014

Tìm số tự nhiên n để $25^{n^2-3n+1}-12$ là số nguyên tố

8. Đề thi HSG lớp 9 TP Hà Nội năm 2011-2012

Cho biểu thức $A=\left(a^{2012}+b^{2012}+c^{2012}\right)-\left(a^{2008}+b^{2008}+c^{2008}\right)$ với a,b,c là các số nguyên dương. Chứng minh A chia hết cho 30.

9. Đề thi HSG lớp 9 TP Hà Nội năm 2010-2011

Tìm 7 số nguyên dương sao cho tích các bình phương của chúng bằng 2 lần tổng các bình phương của chúng.

ĐÁP ÁN:

1. Đề thi HSG lớp 9 TP Hà Nội năm 2019-2020

a) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $n^2+3n+11$ không chia hết cho 49.

b) Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương (x, y, p) với p là số nguyên tố thỏa mãn $x^2+p^2y^2=6(x+2p)$.

Lời giải

Câu 2.

a) Giả sử tồn tại số tự nhiên n sao cho $n^2+3n+11$ chia hết cho 49. Khi đó, ta có $4(n^2+3n+11)=(2n+3)^2+35$ chia hết cho 49

Mà 35 và 49 cùng chia hết cho 7 nên $(2n+3)^2$ chia hết cho 7. Suy ra 2n + 3 chia hết cho 7. Từ đó $(2n+3)^2$ chia hết cho 49. Kết hợp với (1) ta được 35 chia hết cho 49, mâu thuẫn. Vậy, với mọi số tự nhiên n thì $n^2+3n+11$ không chia hết cho 49.

b) Do 6(x + 2p) chia hết cho 3 nên từ phương trình đã cho ta suy ra $x^2+p^2y^2$ chia hết cho 3. Mặt khác, ta có để ý rằng, với mọi số nguyên a thì a^2 chia cho 3 dư 0 hoặc 1. Do đó, để $x^2+p^2y^2$ chia hết cho 3 thì ta phải có x^2 và p^2y^2 cùng chia hết cho 3. Suy ra x và py cùng chia hết cho 3.

Đặt x = 3a với a nguyên dương. Phương trình đã cho có thể được viết lại thành $9a^2+p^2y^2=18a+12p \ (1)$

Do $9a^2, p^2y^2$ và 18a chia hết cho 9 nên từ phương trình trên, ta suy ra 12p chia hết cho 9, tức là p chia hết cho 3. Mà p là số nguyên tố nên p = 3. Khi đó, phương trình (1) có thể viết lại thành $a^2+y^2=2a+4$.

Hay $(a-1)^2+y^2=5 \qquad (2)$

Vì $(a-1)^2 \geq 0$ nên từ phương trình trên, ta suy ra $y^2 \leq 5$. Do y là số nguyên dương nên ta có $y \in \{1,2\}$. Bằng phép thử trực tiếp, ta tìm được các cặp số nguyên dương (a, y) thỏa mãn phương trình (2) là (3,1) và (2,2). Từ đó suy ra, có hai bộ (x, y, p) thỏa mãn yêu cầu đề bài là (9, 1, 3) và (6, 2, 3).

2. Đề thi HSG lớp 9 TP Hà Nội năm 2018-2019

a) Biết $a;b$ là các số nguyên dương thỏa mãn a^2-ab+b^2 chia hết cho 9, chứng minh rằng cả a và b đều chia hết cho 3.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho 9^n+11 là tích của $k\ (k \in \mathbb{N}, k \geq 2)$ số tự nhiên liên tiếp.

Lời giải

a) Ta có: $(a^2+ab+b^2)\,\vdots\, 9 \Rightarrow 4(a^2+ab+b^2)\,\vdots\, 9$

$\Rightarrow \left[\left(2a-b \right)^2 + 3b^2 \right] \vdots 9$ (1)

Mà $3b^2 \vdots 3$ nên $\left(2a-b \right)^2 \vdots 3$ mà 3 là số nguyên tố nên $\left(2a-b \right) \vdots 3$.

$\left(2a-b \right) \vdots 3$ nên $\left(2a-b \right)^2 \vdots 9$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 3b^2 \vdots 9 \Rightarrow b^2 \vdots 3$ mà 3 là số nguyên tố $\Rightarrow b \vdots 3$.

$\left(2a-b \right) \vdots 3$ và $b \vdots 3 \Rightarrow 2a \vdots 3$ mà $\left(2;3 \right) = 1$ nên $a \vdots 3$.

Vậy cả a và b đều chia hết cho 3.

b) Ta có tích của từ ba số tự nhiên liên tiếp trở lên thì chia hết cho 3.

Theo đề bài $9^n + 11$ là tích k số tự nhiên liên tiếp mà $9^n + 11$ không chia hết cho 3 nên $k = 2$.

Đặt $9^n + 11 = a\left(a+1 \right)$ với a là số nguyên dương.

$9^n + 11 = a\left(a+1 \right) \Leftrightarrow 4.9^n + 45 = 4a^2 + 4a + 1$

$\Leftrightarrow \left(2a+1 \right)^2 - \left(2.3^n \right)^2 = 45 \Leftrightarrow \left(2a+1-2.3^n \right)\left(2a+1+2.3^n \right) = 45 \cdot$

Vì a, n nguyên dương và $2a+1+2.3^n \ge 9$ nên xảy ra các trường hợp sau:

Trường hợp 1. $\begin{cases} 2a+1-2.3^n = 9 & (1) \\ 2a+1+2.3^n = 5 & (2) \end{cases}$

Từ (1) và (2) ta có $4a+2 = 14 \Leftrightarrow a = 3 \Rightarrow 9^n + 11 = 12 \Leftrightarrow 9^n = 1 \Leftrightarrow n = 0$ (Loại).

Trường hợp 2. $\begin{cases} 2a+1-2.3^n = 15 & (3) \\ 2a+1+2.3^n = 3 & (4) \end{cases}$

Từ (3) và (4) ta có $4a+2 = 18 \Leftrightarrow a = 4 \Rightarrow 9^n + 11 = 20 \Leftrightarrow 9^n = 9 \Leftrightarrow n = 1$ (Thỏa mãn).

Trường hợp 3. $\begin{cases} 2a+1-2.3^n = 45 & (5) \\ 2a+1+2.3^n = 1 & (6) \end{cases}$

Từ (5) và (6) ta có $4a+2 = 46 \Leftrightarrow a = 11 \Rightarrow 9^n + 11 = 132 \Leftrightarrow 9^n = 121 \Leftrightarrow n \in \varnothing$.

Vậy $n = 1$.

3. Đề thi HSG lớp 9 TP Hà Nội năm 2017-2018

Chứng minh rằng không tồn tại các số dương *m, n, p* với p nguyên tố thỏa mãn:

$m^{2019}+n^{2019}=p^{2018}$

Lời giải

a) Giả sử bộ số *(m, n, p)* thỏa mãi yêu cầu. Dễ thấy 0 < m, n < p.

Phương trình đã cho có thể được viết lại thành $(m+n)A=p^{2018}$ (1)

trong đó $A=m^{2018}-m^{2017}n+m^{2017}n^2-...-mn^{2017}+n^{2018}$.

Nếu A không chia hết cho p thì từ (1), ta có A = 1 và

$$m+n=p^{2018}=m^{2019}+n^{2019}.$$

Từ đó, dễ thấy m = n = 1 và $p^{2018}=2$, mâu thuẫn. Vậy A chia hết cho p.

Do m + n > 1 nên từ (1) suy ra m + n chia hết cho p. Khi đó, ta có:

$$A\equiv 2019m^{2018}\ \ (\text{mod } p).$$

Do A chia hết cho p và 0 < m < p nên từ kết quả trên, ta suy ra 2019 chia hết cho p, hay p = 2019. Từ đó, dễ thấy m và n khác tính chẵn lẻ, hay m ≠ n.

Bây giờ, ta viết lại phương trình đã cho dưới dạng:

$$\left(m^3\right)^{673}+\left(n^3\right)^{673}=2019^{2018}\ hay\ (m+n)\left(m^2-mn+n^2\right)B=2019^{2018}$$

Trong đó $B=\left(m^3\right)^{672}-\left(m^3\right)^{671}\left(n^3\right)+...-\left(m^3\right)\left(n^3\right)^{671}+\left(n^3\right)^{672}$.

Do m ≠ n nên $m^2-mn+n^2=(m-n)^2+mn>1$, từ đó ta có m^2-mn+n^2 chia hết cho 2019. Tuy nhiên, điều này không thể xảy ra do

$$\begin{aligned} m^2-mn+n^2 &\equiv 3n^2 &&(\text{mod } 2019)\\ &\equiv 0/ &&(\text{mod } 2019). \end{aligned}$$

Vậy không tồn tại các số m, n, p thỏa mãn yêu cầu của đề bài.

4. Đề thi HSG lớp 9 TP Hà Nội năm 2016-2017

a) Chứng minh rằng n^5+5n^3-6n chia hết cho 30 với mọi số nguyên dương n.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương $(x;y)$ sao cho x^2+8y và y^2+8x đều là số chính phương

Lời giải

Bài 1 (5.0 điểm).

a) Chứng minh rằng n^5+5n^3-6n chia hết cho 30 với mọi số nguyên dương n.

• ***Phân tích.*** *Đặt* $A = n^5 + 5n^3 - 6n$ *và để ý là* $30 = 2.3.5$ *(2, 3, 5 nguyên tố cùng nhau theo từng đôi một) do đó ta phân tích A sao cho A chia hết cho 2, 3, 5.*

• **Lời giải.** Đặt $A = n^5 + 5n^3 - 6n$ khi đó ta có

$$\begin{aligned} A = n^5 + 5n^3 - 6n &= n(n-1)(n+1)(n^2+6) = n(n-1)(n+1)(n^2-4+10) \\ &= n(n-1)(n+1)(n^2-4) + 10n(n-1)(n+1) \\ &= (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) + 10(n-1)n(n+1) \end{aligned}$$

Do $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ là tích của năm số tự nhiên liên tiếp nên tích này chia hết cho cả 2, 3, 5. Mà 2, 3, 5 nguyên tố cùng nhau theo từng đôi 1 nên $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ chia hết cho 30. Mặt khác ta lại có $(n-1)n(n+1)$ chia hết cho 2, 3 nên chia hết cho 6. Do đó $10(n-1)n(n+1)$ chia hết cho 30. Vậy A chia hết cho 30 hay $n^5 + 5n^3 - 6n$ chia hết cho 30.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương $(x;y)$ sao cho $x^2 + 8y$ và $y^2 + 8x$ đều là số chính phương.

• ***Phân tích.*** *Dễ thấy vai trò của hai biến x và y trong bài toán như nhau nên ta có thể giả sử* $x \ge y$*, khi đó ta có thấy được mối liên hệ* $x^2 + 8y \le x^2 + 8x < x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2$*. Để ý là* $x^2 < x^2 + 8y$*. Như vậy ta được* $x^2 < x^2 + 8y < (x+4)^2$*. Do* $x^2 + 8y$ *là số chính phương nên ta có thể suy ra được*

$$x^2 + 8y = (x+1)^2, (x+2)^2, (x+3)^2$$

Đến đây ta xét các trường hợp để tìm $(x;y)$ *thỏa mãn.*

• **Lời giải.** Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $x \ge y$. Khi đó ta có

$$x^2 < x^2 + 8y \le x^2 + 8x < x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2$$

Mà $x^2 + 8y$ là số chính phương nên ta có thể suy ra được $x^2 + 8y$ nhận một trong các giá trị

$$(x+1)^2; (x+2)^2; (x+3)^2$$

+ Trường hợp 1. Khi $x^2 + 8y = (x+1)^2$ ta được $x^2 + 8y = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow 8y = 2x + 1$,

trường hợp này không xẩy ra do $8y$ là số chẵn và $2x + 1$ là số lẻ.

+ Trường hợp 2. Khi $x^2 + 8y = (x+2)^2$ ta được $x^2 + 8y = x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow x = 2y - 1$.

Do $y^2 + 8x$ là số chính phương nên suy ra $y^2 + 16y - 8$ là số chính phương.

Khi $y = 1$ ta được $x = 1$ và cặp số $(x;y) = (1;1)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Xét $y \ge 2$, khi đó ta có $y^2 + 16y - 8 = (y+3)^2 + (10y - 17) > (y+3)^2$

Đồng thời ta cũng có $y^2+16y-8=\left(y+6\right)^2-72<\left(y+8\right)^2$.

Do đó suy ra $\left(y+3\right)^2<y^2+16y-8<\left(y+8\right)^2$. Mà $y^2+16y-8$ là số chính phương.

Suy ra $y^2+16y-8\in\left\{\left(y+4\right)^2;\left(y+5\right)^2;\left(y+6\right)^2;\left(y+7\right)^2\right\}$.

Giải trực tiếp các trường hợp ta được các cặp số $\left(x;y\right)=\left(5;3\right),\left(21;11\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Trường hợp 3. Khi $x^2+8y=\left(x+3\right)^2$ ta được $x^2+8y=x^2+6x+9\Leftrightarrow 8y=6x+9$,

trường hợp này không xẩy ra do $8y$ là số chẵn và $6x+9$ là số lẻ.

Vậy các cặp số $\left(x;y\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là

$\left(x;y\right)=\left(1;1\right),\left(3;5\right),\left(5;3\right),\left(11;21\right),\left(21;11\right)$

• ***Nhận xét.*** *Để tìm y thỏa mãn* $y^2+16y-8$ *là số chính phương ta có thể xử lý theo cách khác*

Đặt $y^2+16y-8=k^2\left(k\in N\right)$. *Khi đó ta có*

$$y^2+16y-8=k^2\Leftrightarrow\left(y+8\right)^2=k^2+72\Leftrightarrow\left(y+8-k\right)\left(y+8+k\right)=72$$

Để ý rằng $y+8+k>y+8-k>0$ *và* $y+8+k;y+8-k$ *cùng tính chẵn lẻ.*

Lại có $72=2.36=4.18=6.12$. Đến đây ta xét các trường hợp xẩy ra để tìm y theo bản sau

$y+8-k$	*2*	*4*	*6*
$y+8+k$	*36*	*18*	*12*
k	*17*	*7*	*3*
y	*11*	*3*	*1*

Đến đây ta có kết quả tương tự như trên.

5. Đề thi HSG lớp 9 TP Hà Nội năm 2015-2016

a) Cho các nguyên a, b, c, d thỏa mãn điều kiện $a^3+b^3=2\left(c^3-8d^3\right)$.

Chứng minh rằng a+ b + c + d chia hết cho 3.

b) Tìm tất cả các số nguyên tố x sao cho 2^x+x^2 là số nguyên tố.

Lời giải

Câu 1. (5.0 điểm).

a) Cho các nguyên a, b, c, d thỏa mãn $a^3+b^3=2\left(c^3-8d^3\right)$. Chứng minh rằng $a+b+c+d$ chia hết cho 3.

• ***Phân tích.*** *Để chứng minh được* $a+b+c+d$ *chia hết cho 3 thì ta cần tạo ra tổng trong đó có chứa biểu thức* $a+b+c+d$ *và tổng đó chia hết cho 3. Để ý đến giả thiết*

$a^3+b^3=2\left(c^3-8d^3\right)$*, ta nghĩ đến biến đổi để làm xuất hiện* $\left(a+b\right)^3+\left(c+d\right)^3$*. Do đó ta sẽ thêm bớt một lượng thích hợp cho giả thiết của bài toán. Ta có*

$$a^3+b^3+3ab\left(a+b\right)+\left(c^3+d^3\right)+3cd\left(c+d\right)=3ab\left(a+b\right)+3cd\left(c+d\right)+3c^3-15d^3$$
$$\Leftrightarrow \left(a+b\right)^3+\left(c+d\right)^3=3ab\left(a+b\right)+3cd\left(c+d\right)+3c^3-15d^3$$

Dễ thấy $3ab\left(a+b\right)+3cd\left(c+d\right)+3c^3-15d^3$ *chia hết cho 3 nên ta được* $\left(a+b\right)^3+\left(c+d\right)^3$ *chia hết cho 3. Đến đây ta thấy nếu viết* $\left(a+b\right)^3+\left(c+d\right)^3$ *về dạng* $\left(a+b+c+d\right).A$ *thì ta chưa thể khẳng định được* $a+b+c+d$ *chia hết cho 3. Do đó ta sẽ viết biểu thức* $\left(a+b\right)^3+\left(c+d\right)^3$ *về dạng lũy thừa bậc ba của* $a+b+c+d$*. Ta có*

$$\left(a+b\right)^3+\left(c+d\right)^3=\left(a+b+c+d\right)^3-3\left(a+b\right)\left(c+d\right)\left(a+b+c+d\right)$$

Đến đây ta có được điều cần chứng minh.

• **Lời giải.** Từ giả thiết $a^3+b^3=2\left(c^3-8d^3\right)$ ta có

$$a^3+b^3+3ab\left(a+b\right)+\left(c^3+d^3\right)+3cd\left(c+d\right)=3ab\left(a+b\right)+3cd\left(c+d\right)+3c^3-15d^3$$
$$\Leftrightarrow \left(a+b\right)^3+\left(c+d\right)^3=3ab\left(a+b\right)+3cd\left(c+d\right)+3c^3-15d^3$$

Dễ thấy $3ab\left(a+b\right)+3cd\left(c+d\right)+3c^3-15d^3$ chia hết cho 3 nên ta được $\left(a+b\right)^3+\left(c+d\right)^3$ chia hết cho 3.

Mặt khác ta lại có $\left(a+b\right)^3+\left(c+d\right)^3=\left(a+b+c+d\right)^3-3\left(a+b\right)\left(c+d\right)\left(a+b+c+d\right)$

Mà $3\left(a+b\right)\left(c+d\right)\left(a+b+c+d\right)$ chia hết cho 3 nên suy ra $\left(a+b+c+d\right)^3$ chia hết cho 3.

Do vậy $a+b+c+d$ chia hết cho 3.

• ***Nhận xét.*** *Bản chất bài toán trên chính là bài toán cơ bản: Nếu* x^3+y^3 *chia hết cho 3 thì* $x+y$ *chia hết cho 3.*

b) Tìm tất cả các số nguyên tố x sao cho 2^x+x^2 là số nguyên tố.

• ***Phân tích.*** *Dễ thấy* $x=2$ *không thỏa mãn yêu cầu bài toán còn* $x=3$ *thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ta cần chứng minh rằng khi* $x>3$ *thì không tồn tại số nguyên tố thỏa mãn. Chú ý rằng khi* $x>3$ *thì x là số nguyên tố lẻ ta luôn có* x^2 *chia 3 có số dư là 1. Ngoài ra khi số nguyên tố* $x>3$ *thì* 2^x *chia 3 luôn dư 2. Điều này dẫn đến* 2^x+x^2 *luôn chia hết cho 3, do đó khi* $x>3$ *thì* 2^x+x^2 *luôn là hợp số.*

• **Lời giải.** Ta xét các trường hợp sau

+ Khi $x=2$ ta được $2^x+x^2=2^2+2^2=8$ không phải là số nguyên tố.

+ Khi $x = 3$ ta được $2^x + x^2 = 2^3 + 3^2 = 17$ là số nguyên tố.

+ Khi $x > 3$ thì x là số nguyên tố lẻ. Khi đó x^2 chia 3 có số dư là 1.

Ngoài ra do x là số nguyên tố lẻ nên ta đặt $x = 2k + 1\left(k \in N^*\right)$.

Từ đó ta có $2^x = 2^{2k+1} = 2.4^k = 2\left(3+1\right)^k$ chia 3 có số dư là 2.

Như vậy $2^x + x^2$ luôn chia hết cho 3. Do đó $2^x + x^2$ luôn là hợp số khi $x > 3$.

Vậy $x = 3$ là giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- ***Nhận xét.*** *Với bài toán số học dạng này ta thường thử với một số nguyên tố nhỏ* $x = 2;3$.

Với các số nguyên tố lớn hơn ta chứng minh không thỏa mãn.

6. Đề thi HSG lớp 9 TP Hà Nội năm 2014-2015

Cho n nguyên dương. Chứng minh rằng $A = 2^{3n+1} + 2^{3n-1} + 1$ là hợp số

Lời giải

Ta có:

$2A = 2^{3n+2} + 2^{3n} + 2 = 5.8^n + 2$

$Do\ 8 \equiv 1\left(\bmod 7\right) \Rightarrow 8^n \equiv 1\left(\bmod 7\right) \Rightarrow A \equiv 5 + 2 \equiv 0\left(\bmod 7\right) \Rightarrow A \vdots 7$

Mặt khác ta chứng minh được A > 0 nên A là hợp số.

7. Đề thi HSG lớp 9 TP Hà Nội năm 2013-2014

Tìm số tự nhiên n để $25^{n^2-3n+1} - 12$ là số nguyên tố

Lời giải

Ta có $2n^2 - 6n + 2 = 2\left[n\left(n-3\right) + 1\right]$

Vì n(n – 3) chẵn nên n(n – 3) + 1 = 2k +1 với $k \in N \cup \{-1\}$.

Suy ra $5^{2n^2-6n+2} - 12 = 25^{2k+1} + 1 - 13 \vdots 13$

Vì vậy $5^{2n^2-6n+2} - 12$ nguyên tố hay $5^{2n^2-6n+2} - 12 = 13$

nên n(n – 3) + 1 = 1 , suy ra n = 0 hoặc n = 3.

8. Đề thi HSG lớp 9 TP Hà Nội năm 2011-2012

Cho biểu thức $A = \left(a^{2012} + b^{2012} + c^{2012}\right) - \left(a^{2008} + b^{2008} + c^{2008}\right)$ với a,b,c là các số nguyên dương. Chứng minh A chia hết cho 30.

Lời giải

1) Ta có:

$n^5 - n = n\left(n^2+1\right)\left(n-1\right)\left(n+1\right) = n\left(n^2 - 4 + 5\right)\left(n-1\right)\left(n+1\right)$

$= \left(n-2\right)\left(n-1\right)n\left(n+1\right)\left(n+2\right) + 5n\left(n-1\right)\left(n+1\right).$

Do $n \in N^*$ nên $\left(n^5 - n\right) \vdots 30$. Từ đó suy ra $A = a^{2017}\left(a^5 - a\right) + b^{2007}\left(b^5 - b\right) + c^{2007}\left(c^5 - c\right) \vdots 30$.

9. Đề thi HSG lớp 9 TP Hà Nội năm 2010-2011

Lời giải

Tìm 7 số nguyên dương sao cho tích các bình phương của chúng bằng 2 lần tổng các bình phương của chúng.

* Goi 7 số nguyên dương phải tìm là $x_1, x_2, \ldots, x_7$;

$x_1^2.x_2^2...x_7^2 = 2(x_1^2 + x_2^2 + ...x_7^2)$

* Giả sử $x_1 \ge x_2 \ge \ldots \ge x_7 \ge 1$ có $x_1^2.x_2^2...x_7^2 \le 2.7x_1^2 = 14x_1^2$

$\Rightarrow x_2^2...x_7^2 \le 14$

* $x_2 \ldots x_7 \le <4 = 2^2 \Rightarrow x_2 = \ldots = x_7 = 1$

$\Rightarrow x_1^2.x_2^2 = 2(x_1^2 + x_2^2 + 5)$

* Đặt $x_1^2 = a$, $x_2^2 = b$ với a, b là các số nguyên dương chính phương

$ab = 2a + 2b + 10 \Leftrightarrow (a-2)(b-2) = 14.1 = 7.2$

* Trường hợp 1: $\begin{cases} a - 2 = 14 \\ b - 2 = 2 \end{cases} \Rightarrow b = 3$ không phải lá số chính phương

* Trường hợp 2: $\begin{cases} a - 2 = 7 \\ b - 2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 9 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$ và kết luận