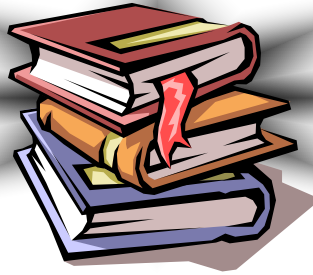


Tailieumontan.com



Tài liệu sưu tầm



**CÁC CHUYÊN ĐỀ  
CHỌN LỌC TOÁN 6 TẬP 1**



*Thanh Hóa, ngày 12 tháng 5 năm 2020*

## Chương I: ÔN TẬP VÀ BỔ TÚC VỀ SỐ TỰ NHIÊN

### Chuyên đề 1: TẬP HỢP CÁC SỐ TỰ NHIÊN

#### I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

##### 1. Tập hợp. Tập hợp con

- Tập hợp là một khái niệm cơ bản của Toán học. Để kí hiệu một tập hợp, ta dùng các chữ cái in hoa A, B, ... còn để viết một tập hợp, ta có thể sử dụng một trong hai cách:

- Liệt kê các phần tử của tập hợp.
- Chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp.

- Một tập hợp có thể có một phần tử, nhiều phần tử, vô số phần tử nhưng cũng có thể không có phần tử nào. Tập hợp không có phần tử nào gọi là *tập rỗng*, kí hiệu là  $\emptyset$ . Để minh họa một tập hợp cùng các phần tử của nó, người ta dùng biểu đồ Ven.

- Nếu mọi phần tử của tập hợp A đều thuộc tập hợp B thì ta nói A là *tập hợp con* của B. kí hiệu:  $A \subset B$ .

- Hai tập hợp A và B gọi là bằng nhau nếu mọi phần tử của tập hợp A đều thuộc tập hợp B và ngược lại. Kí hiệu:  $A = B$ .

- Một số tính chất:

- Với mọi tập hợp A, ta có:  $\emptyset \subset A$  và  $A \subset A$ .
- Nếu  $A \subset B$  và  $B \subset A$  thì  $A = B$ .
- Nếu  $A \subset B$  và  $B \subset C$  thì  $A \subset C$  (tính chất bắc cầu).

##### 2. Tập hợp các số tự nhiên

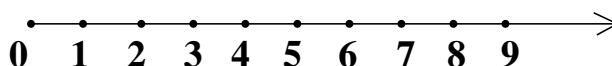
- Tập hợp các số tự nhiên được kí hiệu là N.

$$N = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$$

Tập hợp các số tự nhiên khác 0 kí hiệu là  $N^*$ .

$$N^* = \{1; 2; 3; 4; \dots\}$$

- Tia số tự nhiên:



Mỗi số tự nhiên được biểu diễn bởi một điểm trên tia số. Điểm biểu diễn số tự nhiên  $a$  trên tia số gọi là điểm  $a$ .

- Để ghi số tự nhiên trong hệ thập phân, ta dùng 10 chữ số là: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9.

Trong hệ La Mã, ta dùng bảy kí hiệu: I, V, X, L, C, D, M với giá trị tương ứng trong hệ thập phân lần lượt là: 1; 5; 10; 50; 100; 500; 1000.

- Thứ tự trong tập hợp số tự nhiên: Với hai số tự nhiên  $a$  và  $b$  bất kì, xảy ra một trong ba khả năng sau:  $a < b$ ;  $a = b$ ;  $a > b$ .

Nếu  $a < b$  thì trên tia số tự nhiên, điểm  $a$  nằm bên trái điểm  $b$ .

## II. MỘT SỐ VÍ DỤ

### Dạng 1. Viết tập hợp, tập hợp con và sử dụng các kí hiệu $\in$ , $\notin$ , $\subset$

**Ví dụ 1:** Cho hai tập hợp  $A = \{1; 2; 4; 5; 7; 9\}$  và  $B = \{2; 3; 5; 6; 7\}$ .

- Viết tập hợp  $C$  gồm các phần tử thuộc tập hợp  $A$  mà không thuộc tập hợp  $B$ .
- Viết tập hợp  $D$  gồm các phần tử thuộc tập hợp  $B$  mà không thuộc tập hợp  $A$ .
- Viết tập hợp  $E$  gồm các phần tử thuộc cả hai tập hợp  $A$  và  $B$ .
- Viết tập hợp  $G$  gồm các phần tử hoặc thuộc tập hợp  $A$  hoặc thuộc tập hợp  $B$ .

### *Giải*

a) Ta thấy phần tử  $1 \in A$  mà  $1 \notin B$ , do đó  $1 \in C$ . Tương tự, ta cũng có:  $4; 9 \in C$

Vậy  $C = \{1; 4; 9\}$

b) Làm tương tự câu a), ta có:  $D = \{3; 6\}$

c) Ta thấy phần tử 2 vừa thuộc  $A$ , vừa thuộc  $B$  nên  $2 \in E$ . Tương tự, ta có:  $5; 7 \in E$ .

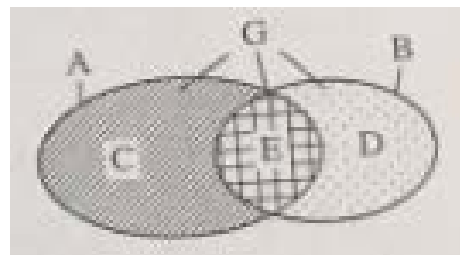
Vậy  $E = \{2; 5; 7\}$ .

d) Ta thấy phần tử  $1 \in A$  nên  $1 \in G$ ;  $3 \in B$  nên  $3 \in G$ ; ...

Vậy  $G = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 9\}$

### *Nhận xét:*

Tập hợp  $C$  gồm những phần tử thuộc tập hợp  $A$ , trừ những phần tử của  $A$  mà cũng thuộc  $B$ . Trên biểu đồ Ven, tập hợp  $C$  có minh họa là miền gạch chéo. Kí hiệu:  $C = A \setminus B$  (đọc là  $C$  là hiệu của  $A$  và  $B$ ).



Tương tự, tập hợp D có minh họa là miền chấm  $D = B \setminus A$  (đọc là: D là *hiệu* của B và A).

Tập hợp E gồm những phần tử chung của hai tập hợp A và B. Trên biểu đồ Ven, E có minh họa là miền kẻ carô. Kí hiệu:  $E = A \cap B$  (đọc là: E là *giao* của A và B).

Tập hợp G gồm những phần tử hoặc thuộc A, hoặc thuộc B nên có minh họa là cả hai vòng kín. Kí hiệu:  $G = A \cup B$  (đọc là: G là *hợp* của A và B).

**Ví dụ 2.** Cho tập hợp  $A = \{a, b, c\}$ . Hỏi tập hợp A có tất cả bao nhiêu tập hợp con?

***Giải***

Tập hợp con của A không có phần tử nào là:  $\emptyset$

Các tập hợp con của A có một phần tử là:  $\{a\}, \{b\}, \{c\}$

Các tập hợp con của A có hai phần tử:  $\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}$

Tập hợp con của A có ba phần tử là:  $\{a, b, c\}$

Vậy A có tất cả tám tập hợp con.

***Nhận xét:***

Để tìm các tập hợp con của một tập hợp có n phần tử ( $n \in \mathbb{N}$ ), ta lần lượt tìm các tập hợp con có 0; 1; 2; 3; ...; n phần tử của tập hợp đó.

Tập hợp A	Các tập hợp con của A	Số tập hợp con của A
$\emptyset$ ( $n = 0$ )	$\emptyset$	1
$\{a\}$ ( $n = 1$ )	$\emptyset; \{a\}$	$2 = 2$
$\{a, b\}$ ( $n = 2$ )	$\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{a, b\}$	$4 = 2.2$
$\{a, b, c\}$ ( $n = 3$ )	$\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{c\}; \{a, b\};$ $\{b, c\}; \{c, a\}; \{a, b, c\}$	$8 = 2.2.2$
...		

Từ đó ta rút ra kết luận sau:

- Tập hợp rỗng chỉ có một tập hợp con duy nhất là chính nó.

- Tập hợp có  $n$  phân tử ( $n \geq 1$ ) thì có  $\underbrace{2,2,\dots,2}_{n \text{ thừa số } 2}$  tập hợp con.

**Dạng 2: Tính số phân tử của một tập hợp**

**Ví dụ 3.** Cho  $A$  là tập hợp các số tự nhiên lẻ có ba chữ số. Hỏi  $A$  có bao nhiêu phân tử?

**Giải**

Khi liệt kê các phân tử của tập hợp  $A$  theo giá trị tăng dần ta được một dãy số cách đều có khoảng cách 2:

$$101; 103; 105; \dots; 999$$

Từ đó, số phân tử của tập hợp  $A$  bằng số các số hạng của dãy số cách đều:

$$(999 - 101):2 + 1 = 898:2 + 1 = 450$$

Vậy tập hợp  $A$  có 450 phân tử.

**Ví dụ 4.** Cho  $A$  là tập hợp các số tự nhiên lẻ lớn hơn 5 và không lớn hơn 79.

- Viết tập hợp  $A$  bằng cách chỉ ra tính chất đặc trưng của các phân tử.
- Giả sử các phân tử của  $A$  được viết theo giá trị tăng dần. Tìm phân tử thứ 12 của  $A$ .

**Giải**

a) Số tự nhiên  $n$  lớn hơn 5 và không lớn hơn 79 là số thỏa mãn điều kiện:  $5 < n \leq 79$ .

Vậy ta có:  $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ lẻ và } 5 < n \leq 79\}$ .

b) Khi giá trị của  $n$  tăng dần thì giá trị các phân tử của  $A$  tạo thành một dãy số cách đều tăng dần (bắt đầu từ số 7, khoảng cách giữa hai số liên tiếp là 2). Giả sử phân tử thứ 12 của  $A$  là  $x$  thì ta có:

$$\begin{aligned} (x - 7): 2 + 1 &= 12 \\ \Rightarrow (x - 7): 2 &= 11 \\ \Rightarrow (x - 7) &= 11 \cdot 2 = 22 \\ \Rightarrow x &= 22 + 7 = 29 \end{aligned}$$

Vậy phân tử thứ 12 cần tìm của  $A$  là 29

**Nhận xét:**

Số phân tử của tập hợp  $A$  là:  $(79 - 7): 2 + 1 = 37$  nên  $A$  có phân tử thứ mười hai.

Ở câu b), ta có thể viết tập hợp  $A$  dưới dạng liệt kê các phân tử cho tới phân tử thứ mười hai. Tuy nhiên cách này có nhược điểm là ta phải liệt kê được tất cả các phân tử đứng trước phần

tử cần tìm. Vậy với cách làm này, bài toán yêu cầu tìm phần tử ở vị trí càng lớn thì sẽ càng khó khăn.

**Dạng 3. Đếm số chữ số**

**Ví dụ 5.** Cần bao nhiêu số để đánh số trang (bắt đầu từ trang 1) của một cuốn sách có 1031 trang?

**Giải**

Ta chia số trang của cuốn sách thành 4 nhóm:

- Nhóm các số có một chữ số (từ trang 1 đến trang 9): Số chữ số cần dùng là 9.

- Nhóm các số có hai chữ số (từ trang 10 đến trang 99): Số trang sách là:

$(99 - 10) : 1 + 1 = 90$  số. Số chữ số cần dùng là  $90 \cdot 2 = 180$ .

- Nhóm các số có ba chữ số (từ trang 100 đến trang 999): Số trang sách là:  $(999 - 100) : 1 + 1 = 900$ . Số chữ số cần dùng để đánh số trang nhóm này là:  $900 \cdot 3 = 2700$ .

- Nhóm các số có bốn chữ số (từ trang 1000 đến trang 1031): Số trang sách là:  $(1031 - 1000) : 1 + 1 = 32$ . Số chữ số cần dùng là:  $32 \cdot 4 = 128$

Vậy tổng số chữ số cần dùng để đánh số trang của cuốn sách đó là:

$$9 + 180 + 2700 + 128 = 3017.$$

**Nhận xét:**

Việc chia các số trang thành các nhóm giúp chúng ta dễ dàng tính được số chữ số cần dùng trong mỗi nhóm, từ đó tính được tổng số chữ số cần dùng. Một câu hỏi ngược lại là: Nếu ta biết số chữ số cần dùng để đánh số trang của một cuốn sách thì ta có thể tìm được số trang của cuốn sách đó hay không? Ta có *bài toán ngược* của ví dụ trên.

**Ví dụ 6.** Tính số trang sách của một cuốn sách biết rằng để đánh số trang của cuốn sách đó (bắt đầu từ trang 1) cần dùng đúng 3897 chữ số.

**Giải**

Để đánh các số trang có một chữ số (từ trang 1 đến trang 9), cần 9 chữ số.

Để đánh các số trang có hai chữ số (từ trang 10 đến trang 99, gồm 90 trang), cần  $90 \cdot 2 = 180$  chữ số.

Để đánh các số trang có ba chữ số (từ trang 100 đến trang 999, gồm 900 trang), cần  $900 \cdot 3 = 2700$  chữ số

Vì  $9 + 180 + 2700 = 2889 < 3897$  nên cuốn sách có nhiều hơn 999 trang, tức là số trang của cuốn sách có nhiều hơn ba chữ số. Số chữ số còn lại là:  $3897 - 2889 = 1008$ .

Vì để đánh tất cả các số trang có bốn chữ số (từ trang 1000 đến trang 9999, gồm 9000 trang), cần  $9000 \cdot 4 = 36000$  chữ số (vượt quá 1008 chữ số), nên số trang của cuốn sách là số có bốn chữ số.

Giả sử cuốn sách có  $n$  trang mà số trang có bốn chữ số. Số chữ số cần dùng để đánh  $n$  trang này là  $4 \cdot n$ . Ta có:  $4 \cdot n = 1008$ , suy ra  $n = 1008 : 4 = 252$ . Vì các trang này bắt đầu từ trang 1000 nên trang cuối cùng sẽ là  $252 + 999 = 1251$ .

Vậy cuốn sách có 1251 trang

**Nhận xét:**

Trong cách giải trên, ta xét lần lượt nhóm các số trang có một chữ số, hai chữ số, ... cho đến khi dùng hết chữ số mà bài cho. Vậy làm thế nào để biết số trang của cuốn sách có bao nhiêu chữ số?

Sau đây là một số gợi ý:

Số chữ số dùng để đánh số trang	Số trang của cuốn sách ( $n$ )
Từ 1 đến 99 (kí hiệu: $1 \rightarrow 9$ )	$n \leq 9$
10 $\rightarrow$ 189	$10 \leq n \leq 99$
190 $\rightarrow$ 2889	$100 \leq n \leq 999$
2890 $\rightarrow$ 38889	$1000 \leq n \leq 9999$
38889 $\rightarrow$ 488889	$10000 \leq n \leq 99999$
...	

Với gợi ý trên, từ quy luật của phạm vi số các chữ số được cho ta có thể suy ra phạm vi số trang của cuốn sách. Chẳng hạn, nếu số chữ số được cho là 16789432, nằm trong phạm vi từ 5888890 đến 68888889, thì số trang cuối cùng của cuốn sách là số có bảy chữ số.

**Dạng 4. Các bài toán về cấu tạo số**

**Ví dụ 7.** Tìm một số có hai chữ số biết rằng khi viết thêm chữ số 0 vào giữa hai chữ số của số đó thì được số mới gấp 7 lần số đã cho.

**Giải**

Gọi số có hai chữ số cần tìm là  $\overline{ab}$  ( $0 < a \leq 9; 0 \leq b \leq 9$ ).

Khi viết thêm chữ số 0 vào giữa hai chữ số ta được số mới là  $\overline{a0b}$ .

Theo bài ra, ta có:

$$\begin{aligned} \overline{a0b} &= 7 \cdot \overline{ab} \\ 100 \cdot a + b &= 7 \cdot (10 \cdot a + b) \\ 100 \cdot a + b &= 70 \cdot a + 7 \cdot b \\ 30 \cdot a &= 6 \cdot b \\ 5 \cdot a &= b. \end{aligned}$$

Vì  $a, b$  là các chữ số và  $a \neq 0$  nên suy ra  $a = 1; b = 5$ .

Vậy số cần tìm là 15.

**Nhận xét:**

Trong ví dụ trên ta đã sử dụng phương pháp *tách cấu tạo số theo các chữ số* trong hệ thập phân. Sau khi tìm được mối quan hệ giữa các chữ số, ta xác định được cụ thể từng chữ số.

**Ví dụ 8.** Tìm số có ba chữ số biết rằng nếu viết thêm chữ số 1 vào trước số đó thì được số mới gấp 9 lần số ban đầu.

**Giải**

Gọi số có ba chữ số cần tìm là  $x = \overline{abc}$  ( $0 < a \leq 9; 0 \leq b \leq 9$ )

Khi viết thêm số 1 trước số  $x$  ta được số mới là  $\overline{1abc}$ .

Theo bài ra, ta có:  $\overline{1abc} = 9.\overline{abc}$

$$1000 + \overline{abc} = 9.\overline{abc} \text{ hay } 1000 + x = 9.x$$

$$1000 = 8.x$$

Suy ra:

$$x = 1000 : 8 = 125$$

Vậy số cần tìm là 125.

**Nhận xét:**

Ở ví dụ này ta không tách cấu tạo số cần tìm theo các chữ số mà *tách theo cụm chữ số*. Ta thấy số viết thêm không làm thay đổi cụm chữ số  $\overline{abc}$  nên ta giữ nguyên cụm chữ số này trong quá trình tách cấu tạo số.

**Ví dụ 9.** Tìm tất cả các số tự nhiên khác 0, sao cho khi viết thêm chữ số 0 vào giữa chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị thì số đó được gấp lên 9 lần.

(Đề thi HSG tỉnh Yên Bái, 2005)

**Nhận xét:**

Ta chưa biết số phải tìm có bao nhiêu chữ số, nhưng từ đề bài ta thấy nó có ít nhất hai chữ số. Từ đó ta gọi bộ phận số đứng trước chữ số hàng chục là  $x$  ( $x$  có thể bằng 0), sử dụng phương pháp tách cấu tạo số theo các chữ số và cụm chữ số, ta có lời giải như sau:

**Giải**

Gọi số cần tìm là  $\overline{xab}$ , trong đó:  $a, b$  là các chữ số;  $x \in \mathbf{N}$ .



Khi viết thêm chữ số 0 vào giữa chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị ta được số mới là  $\overline{xa0b}$

Theo đề bài, ta có:

$$\begin{aligned}\overline{xa0b} &= 9.\overline{xab} \\ 1000.x + 100.a + b &= 9.(100.x + 10.a + b) \\ 1000.x + 100.a + b &= 900.x + 90.a + 9.b \\ 100.x + 10.a &= 8.b \\ 50.x + 5.a &= 5.b\end{aligned}$$

Vì  $b \leq 9$  nên  $4.b \leq 4.9 = 36$ , do đó:  $50.x + 5.a \leq 36 \Rightarrow x = 0$

Khi đó số cần tìm là  $\overline{ab}$ , với  $5.a = 4.b$

Vì  $a \neq 0$  và  $a, b$  là các chữ số nên ta có  $a = 4$ . Từ đó suy ra  $b = 5$ .

Vậy số cần tìm là 45.

### III. BÀI TẬP.

- 1.1.** Cho tập hợp  $A = \{1; 2; 3; 4\}$ . Trong các cách viết sau, cách viết nào đúng? Cách viết nào sai? Nếu sai, hãy sửa lại cho đúng.
- a)  $1 \in A$     b)  $\{1\} \in A$     c)  $3 \subset A$     d)  $\{2; 3\} \subset A$
- 1.2.** Cho hai tập hợp:  $A = \{2; 3; 7; 8\}$ ,  $B = \{1; 3; 5; 7; 9\}$ .
- a) Mỗi tập hợp trên có bao nhiêu phần tử?  
b) Viết tất cả các tập hợp vừa là tập con của  $A$ , vừa là tập con của  $B$
- 1.3.** Viết các tập hợp sau và cho biết mỗi tập hợp có bao nhiêu phần tử?
- a) Tập hợp  $A$  các số tự nhiên  $x$  mà  $15 - x = 7$ ;  
b) Tập hợp  $B$  các số tự nhiên  $y$  mà  $19 - y = 21$ .
- 1.4.** Tính số phần tử của các tập hợp sau:
- a)  $A = \{10; 12; 14; \dots; 98\}$   
b)  $B = \{10; 13; 16; 19; \dots; 70\}$
- 1.5.** Cho dãy số  $2; 7; 12; 17; 22; \dots$
- a) Nêu quy luật của dãy số trên.  
b) Viết tập hợp  $B$  gồm 5 số hạng liên tiếp của dãy số đó, bắt đầu từ số hạng thứ năm.  
c) Tính tổng 100 số hạng đầu tiên của dãy số.
- 1.6.** Hãy viết lại mỗi tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử:
- $A = \{x \in \mathbf{N}; x \text{ lẻ và } 30 < x < 50\}$   
 $B = \{x \in \mathbf{N}; x : 5; x : 2; x < 90\}$
- 1.7.** Mẹ mua cho Hà một quyển sổ tay 256 trang. Để tiện theo dõi Hà đánh số trang từ 1 đến 256. Hỏi Hà đã phải viết bao nhiêu chữ số để đánh số trang hết cuốn sổ ta đó?
- 1.8.** Người ta viết liền nhau các số tự nhiên 123456.....

- a) Hỏi các chữ số đơn vị của các số 53; 328; 1587 đứng ở hàng thứ bao nhiêu?  
b) Chữ số viết ở hàng thứ 427 là chữ số nào?
- 1.9.** Cho bốn chữ số  $a, b, c, d$  đôi một khác nhau và khác 0. Tập hợp các số tự nhiên có 4 chữ số gồm cả bốn chữ số  $a, b, c, d$  có bao nhiêu phần tử?
- 1.10.** Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số mà:  
a) Trong số đó có ít nhất một chữ số 5?  
b) Trong số đó chữ số hàng chục bé hơn chữ số hàng đơn vị?  
c) Trong số đó chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị?
- 1.11.** Với hai chữ số I, V có thể viết được bao nhiêu số La mã (theo cách viết thông thường)? Số nhỏ nhất là số nào? Số lớn nhất là số nào?
- 1.12.** Mỗi tập hợp sau đây có bao nhiêu phần tử?  
a) Tập hợp các số có hai chữ số được lập nên từ hai số khác nhau.  
b) Tập hợp các số có ba chữ số được lập nên từ ba chữ số đôi một khác nhau.
- 1.13.** Tổng kết đợt thi đua lớp 6A có 45 bạn được 1 điểm 10 trở lên, 41 bạn được từ 2 điểm 10 trở lên, 15 bạn được từ 3 điểm 10 trở lên, 5 bạn được 4 điểm 10 trở lên. Biết không có ai đạt trên 4 điểm 10, hỏi trong đợt thi đua đó lớp 6A có bao nhiêu điểm 10?
- 1.14.** Tìm số tự nhiên có bốn chữ số, chữ số hàng đơn vị là 1. Nếu chuyển chữ số hàng đơn vị lên đầu thì được số mới nhỏ hơn số đã cho 2889 đơn vị.
- 1.15.** Hiệu của hai số tự nhiên là 57. Chữ số hàng đơn vị của số bị trừ là 3. Nếu bỏ chữ số hàng đơn vị của số bị trừ ta được số trừ. Tìm hai số đó.
- 1.16.** Tìm số có ba chữ số, biết rằng nếu viết các chữ số theo thứ tự ngược lại thì được một số mới lớn hơn số ban đầu 792 đơn vị.
- 1.17.** Cho một số có hai chữ số. Nếu viết thêm chữ số 1 vào bên trái và bên phải số đó ta được số mới gấp 23 lần số đã cho. Tìm số đã cho.
- 1.18.** Tìm một số có năm chữ số biết rằng nếu viết chữ số 7 đằng trước số đó thì được số lớn gấp 5 lần số có được bằng cách viết thêm chữ số 7 vào đằng sau chữ số đó.
- 1.19.** Một số gồm ba chữ số có tận cùng là chữ số 7, nếu chuyển chữ số 7 đó lên đầu thì được một số mới mà khi chia cho số cũ thì được thương là 2 dư 21. Tìm số đó.
- 1.20.** (*Đề thi HSG Hà Nội, 2005*)  
a) Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số mà chữ số hàng đơn vị là 4?  
b) Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số thỏa mãn có chữ số hàng đơn vị là 4 và chia hết cho 3?

## Chuyên đề 2. PHÉP TOÁN TRONG TẬP HỢP CÁC SỐ TỰ NHIÊN

### I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### 1. Các tính chất cơ bản của phép cộng và phép nhân

- Tính chất giao hoán:  $a + b = b + a$ ;  $a \cdot b = b \cdot a$
- Tính chất kết hợp:  $(a + b) + c = a + (b + c)$ ;  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- Cộng với số 0:  $a + 0 = 0 + a = a$   
Nhân với số 1:  $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
- Tính chất phân phối:  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

#### 2. Điều kiện để thực hiện phép trừ $a - b$ là $a \geq b$

Tính chất phân phối của phép nhân đối với phép trừ:

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$$

#### 3. Điều kiện để số $a$ chia hết cho số $b \neq 0$ là tồn tại một số $q$ sao cho: $a = b \cdot q$

#### 4. Phép chia có dư:

Chia số  $a$  cho số  $b \neq 0$  ta có:  $a = b \cdot q + r$ , trong đó số dư  $r$  thỏa mãn điều kiện  $0 \leq r < b$ .

\* **Nhận xét:**

- $r \in \{0; 1; 2; \dots; b - 1\}$ , suy ra có  $b$  khả năng về số dư khi chia một số cho  $b$ .
- $a - r \vdots b$
- Nếu  $a : c$  và  $b : c$  thì  $(a \pm b) : c = a : c \pm b : c$
- Quan hệ chia hết có tính chất bắc cầu, tức là nếu  $a : b$  và  $b : c$  thì  $a : c$ .

#### 5. Lũy thừa với số mũ tự nhiên

a) **Định nghĩa:**  $a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$  ( $n$  thừa số  $a$ ) ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) là một lũy thừa của  $a$ ;  $a$  gọi là cơ số,  $n$  gọi là số mũ.

Quy ước:  $a^1 = a$ ;  $a^0 = 1$  (với  $a \neq 0$ ),  $0^0$  không có nghĩa.

b) **Một số tính chất**

- Nhân, chia hai lũy thừa cùng cơ số”

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (m, n \in \mathbb{N})$$

$$a^m : a^n = a^{m-n} \quad (m, n \in \mathbb{N}; m \geq n)$$

- Lũy thừa của một lũy thừa:  $(a^m)^n = a^{m \cdot n} \quad (m, n \in \mathbb{N})$
- Lũy thừa của một tích:  $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad (n \in \mathbb{N})$
- Lũy thừa tầng:  $a^{m^n} = a^{(m^n)} \quad (m, n \in \mathbb{N})$

c) **Số chính phương** là số viết được dưới dạng bình phương của một số tự nhiên.

Ví dụ:  $0 = 0^2$ ;  $1 = 1^2$ ;  $4 = 2^2$ ;  $25 = 5^2$ ;  $121 = 11^2$ ; .... là các số chính phương.

## 6. Thứ tự thực hiện các phép tính

- Thứ tự thực hiện phép tính trong biểu thức không có dấu ngoặc:

Lũy thừa  $\Rightarrow$  Nhân, chia  $\Rightarrow$  Cộng, trừ.

- Thứ tự thực hiện phép tính trong biểu thức có dấu ngoặc:

$$(\ ) \Rightarrow [ ] \Rightarrow \{ \}$$

## II. MỘT SỐ VÍ DỤ

### Dạng 1. Thực hiện phép tính

Ví dụ 1. Thực hiện phép tính sau bằng cách hợp lí nhất.

a)  $12.53 + 53.172 - 53.84$

b)  $35.13 + 35.17 + 65.75 - 65.45$

c)  $(3.4.2^{16})^2 : (11.2^{13}.4^{11} - 16^9)$

### Giải

a) Ta có:  $12.53 + 53.172 - 53.84 = 53.(12 + 172 - 84)$

$$= 53.100 = 5300$$

b)  $35.13 + 35.17 + 65.75 - 65.45 = (35.13 + 35.17) + (65.75 - 65.45)$

$$= 35.(13 + 17) + 65.(75 - 45)$$

$$= 35.30 + 65.30$$

$$= 30.(35 + 65)$$

$$= 30.100 = 3000$$

c) Ta có:  $(3.4.2^{16})^2 = (3.2^2.2^{16})^2 = (3.2^{18})^2 = 3^2.(2^{18})^2 = 3^2.2^{36}$

$$11.2^{13}.4^{11} - 16^9 = 11.2^{13}.(2^2)^{11} - (2^4)^9 = 11.2^{13}.2^{22} - 2^{36} = 11.2^{35} - 2^{36}$$

$$= 2^{35}.(11 - 2) = 2^{35}.9 = 2^{35}.3^2$$

Suy ra:  $(3.4.2^{16})^2 : (11.2^{13}.4^{11} - 16^9) = \frac{2^{36}.3^2}{2^{35}.3^2} = 2$

**Nhận xét:**

Trong câu a) và câu b), ta đã sử dụng tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng và phép trừ để tính hợp lí. Tuy nhiên, công thức thể hiện tính chất được viết lại là:  $a.b + a.c - a.d = a.(b + c - d)$

Quy tắc này được gọi là quy tắc **đặt thừa số chung**.

**Dạng 2. So sánh**

**Ví dụ 2.** So sánh:

a)  $2011.2013$  và  $2012^2$

b)  $(3+4)^2$  và  $3^2 + 4^2$

c)  $2^{300}$  và  $3^{200}$

**Giải**

a) Ta có:  $2013 = 2012 + 1$  và  $2012 = 2011 + 1$

Suy ra:  $2011.2013 = 2011.(2012 + 1) = 2011.2012 + 2011$

$$2012^2 = 2012.(2011 + 1) = 2012.2011 + 2012$$

Vì  $2011 < 2012$  nên  $2011.2013 < 2012^2$

b) Ta có:  $(3+4)^2 = 7^2 = 49$  và  $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$

Vậy  $(3+4)^2 > 3^2 + 4^2$

**Chú ý:** Nói chung  $(a + b)^n \neq a^n + b^n$

c) Ta có:  $2^{300} = 2^{3.100} = (2^3)^{100} = 8^{100}$  và  $3^{200} = 3^{2.100} = (3^2)^{100} = 9^{100}$

Vì  $8^{100} < 9^{100}$  nên  $2^{300} < 3^{200}$

**Nhận xét:**

Khi so sánh hai lũy thừa, ta thường sử dụng các quy tắc để biến đổi về hai lũy thừa hoặc cùng cơ số hoặc cùng số mũ và sử dụng quy tắc:

- Nếu  $n < m$  thì  $a^n < a^m$  ( $a > 1; m, n \in \mathbb{N}$ )
- Nếu  $a < b$  thì  $a^n < b^n$  ( $a, b \in \mathbb{N}; n \in \mathbb{N}^*$ )

**Dạng 3. Tìm số chưa biết**

**Ví dụ 3.** Tìm  $x$ , biết:  $165 - (35 : x + 3) \cdot 19 = 13$

**Giải**

$$\text{Ta có: } 165 - (35 : x + 3) \cdot 19 = 13$$

$$(35 : x + 3) \cdot 19 = 165 - 13$$

$$(35 : x + 3) \cdot 19 = 152$$

$$35 : x + 3 = 152 : 19$$

$$35 : x + 3 = 8$$

$$35 : x = 8 - 3$$

$$35 : x = 5$$

$$x = 35 : 5$$

$$x = 7$$

Vậy  $x = 7$ .

**Nhận xét:**

Trong cách giải trên, ta thấy  $x$  nằm trong số trừ  $(35 : x + 3) \cdot 19$ , vì vậy trước hết ta tìm số trừ này bằng cách lấy số bị trừ 165 trừ đi hiệu 13. Suy luận tương tự cho các bước sau đến khi tìm được  $x$ . Ngoài ra, ta cũng có thể áp dụng tính chất phân phối để bỏ dấu ngoặc:

$$\begin{aligned} (35 : x + 3) \cdot 19 &= (35 : x) \cdot 19 + 3 \cdot 19 = 35 \cdot 19 : x + 57 \\ &= 665 : x + 57 \dots \end{aligned}$$

**Ví dụ 4.** Tìm  $x$ , biết:

a)  $(2x + 1)^3 = 9.81$

b)  $5^x + 5^{x+2} = 650$

**Giải**

a) Ta có:  $9.81 = 9.9^2 = 9^3$

Do đó:  $(2x + 1)^3 = 9^3$

$$2x + 1 = 9$$

$$2x = 9 - 1$$

$$2x = 8$$

$$x = 4$$

Vậy  $x = 4$ 

b) Vì  $5^{x+2} = 5^x \cdot 5^2 = 25 \cdot 5^x$  nên ta có:  $5^x + 25 \cdot 5^x = 650$

$$(1 + 25) \cdot 5^x = 650$$

$$26 \cdot 5^x = 650$$

$$5^x = 25 = 5^2$$

$$x = 2$$

Vậy  $x = 2$ **Nhận xét:**

Để tìm  $x$  nằm trong một lũy thừa thỏa mãn một đẳng thức, ta biến đổi để đưa về so sánh hai lũy thừa hoặc cùng cơ số (như câu a), hoặc cùng số mũ (như câu b).

**Ví dụ 5.** Tìm các số mũ  $n$  sao cho lũy thừa  $3^n$  thỏa mãn điều kiện  $25 < 3^n < 250$

**Giải**

Ta có:  $3^2 = 9 < 25 < 27 = 3^3 \Rightarrow 3^3 \leq 3^n$  (1)

$$3^5 = 243 < 250 < 729 = 3^6 \Rightarrow 3^n \leq 3^5$$
 (2)

Từ (1) và (2) suy ra:  $3^3 \leq 3^n \leq 3^5$ 

$$3 \leq n \leq 5$$

Vậy  $n \in \{3; 4; 5\}$ **Nhận xét:**

So sánh  $3^2 = 9 < 25 < 27 = 3^3$  chỉ ra rằng  $3^3$  là lũy thừa nhỏ nhất của 3 lớn hơn 25. Vì  $25 < 3^n$  nên  $3^3 \leq 3^n$ . Tương tự, so sánh  $3^5 = 243 < 250 < 729 = 3^6$  chỉ ra rằng  $3^5$  là lũy thừa lớn nhất của 3 nhỏ hơn 250. Vì  $3^n < 250$  nên  $3^n \leq 3^5$ .

**Ví dụ 6.** Chia một số tự nhiên cho 60 ta được số dư là 31. Nếu đem chia số đó cho 12 thì được thương là 17 và còn dư. Tìm số đó.

**Giải**

Gọi số tự nhiên cần tìm là a, thương khi chia a cho 60 là q. Theo đề ra, ta có:  $a = 60.q + 31$

Suy ra:  $a = 125.q + 12.2 + 7 = 12.(5.q + 2) + 7$

Tức là a chia cho 12 được thương là  $5.q + 2$  và số dư là 7. Từ đó ta suy ra:

$$5.q + 2 = 17 \Rightarrow 5.q = 15 \Rightarrow q = 3$$

$$\text{Vậy } a = 60.3 + 31 = 211$$

**Nhận xét:** Cơ sở của cách giải trên là 60 chia hết cho 12. Ta chỉ cần chú ý thêm rằng số dư không lớn hơn số chia, vì thế từ  $a = 12.(5q) + 31$  không thể suy ra a chia cho 12 được thương là  $5q$  và dư 31.

**III. BÀI TẬP**

**1.21.** Tính hợp lí:

a)  $28.(231 + 69) + 72.(231 + 69)$

b)  $1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + \dots - 299 - 300 + 301 + 302$

**1.22.** Tính hợp lí:

a)  $10 \cdot \frac{4^6 \cdot 9^5 + 6^9 \cdot 120}{8^4 \cdot 3^{12} - 6^{11}}$

b)  $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$

c)  $5 + 5^3 + 5^5 + \dots + 5^{97} + 5^{99}$

**1.23.** Tính giá trị của biểu thức:  $P = 3a^2b - \frac{b^3}{c} + d$  với  $a = 5; b = 2; c = 4; d = 6$

**1.24.** So sánh:

a)  $243^5$  và  $3.27^8$

b)  $15^{12}$  và  $81^3.125^5$

c)  $78^{12} - 78^{11}$  và  $78^{11} - 78^{10}$



**1.25.** Cho  $A = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{1999} + 3^{2000}$ . Chứng minh rằng A chia hết cho 13.

**1.26.** Tìm  $x \in \mathbb{N}$ , biết:

a)  $(4x + 5) : 3 - 121 : 11 = 4$

b)  $1 + 3 + 5 + \dots + x = 1600$  (x là số tự nhiên lẻ)

**1.27.** Tìm  $x \in \mathbb{N}$ , biết:

a)  $(2x + 1)^3 = 125$

b)  $(4x - 1)^2 = 25.9$

**1.28.** Tìm  $x \in \mathbb{N}$ , biết:

a)  $2^x + 2^{x+3} = 144$

b)  $3^{2x+2} = 9^{x+3}$

**1.29.** Tìm  $x \in \mathbb{N}$ , biết:

a)  $(x - 5)^4 = (x - 5)^6$ , (với  $x \geq 5$ )

b)  $x^{15} = x^2$

**1.30.** Tìm các số mũ x, biết rằng lũy thừa  $5^{2x-1}$  thỏa mãn điều kiện:  $100 < 5^{2x-1} \leq 5^6$

**1.31.** Cho ba số 6; 7; 8. Tìm tổng tất cả các số khác nhau viết bằng cả ba số đó, mỗi chữ số dùng một lần.

**1.32.** Tích của hai số là 276. Nếu thêm 19 đơn vị vào một số thì tích của hai số là 713. Tìm hai số đó.

**1.33.** Hiệu của hai số là 6. Nếu tăng số bị trừ lên 4 lần, giữ nguyên số trừ thì hiệu của chúng là 54. Tìm hai số đó.

**1.34.** Tìm hai số tự nhiên có thương bằng 29. Nếu tăng số bị chia lên 325 đơn vị thì thương của chúng bằng 54.

**1.35.** Trong một phép chia số bị chia bằng 59, số dư bằng 5. Tìm số chia và thương.

**1.36.** Tổng của ba số là 122. Nếu lấy số thứ nhất chia cho số thứ hai hoặc lấy số thứ hai chia cho số thứ ba đều được thương là 3 và dư 1. Tìm ba số đó.

**1.37.** Khi chia một số cho 48 thì được số dư là 41. Nếu chia số đó cho 16 thì thương thay đổi thế nào?

**1.38.** Tìm số bị chia và số chia nhỏ nhất để được thương là 8 và dư là 45.

**1.39.** Tổng của hai số bằng 38570. Chia số lớn cho số nhỏ ta được thương bằng 3 và còn dư 922. Tìm hai số đó.

**1.40.** Một số lớn hơn một số khác 12 đơn vị. Nếu chia số lớn cho số nhỏ thì được thương bằng 1 và còn dư. Tìm số dư.



### Chuyên đề 3. TÍNH CHẤT CHIA HẾT CỦA MỘT TỔNG, HIỆU, TÍCH

#### I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

- Tính chất 1: Nếu  $a:m$  và  $b:m$  thì  $(a+b):m$ ,  $(a-b):m$  ( $a \geq b$ )
  - Tính chất 2: Nếu  $a:m$  và  $b \not\mid m$  thì  $(a+b) \not\mid m$ ,  $(a-b) \not\mid m$  ( $a \geq b$ )
  - Tính chất 3: Nếu  $a:m$  thì  $k.a:m$  ( $k \in \mathbb{N}$ )
  - Tính chất 4: Nếu  $a:m$  và  $b:m$  thì  $a.b:m.n$
- Đặc biệt: Nếu  $a:m$  thì  $a^n:m^n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ )

**\* Mở rộng:**

- Nếu  $a:m$  và  $b:m$  thì  $(k.a+l.b):m$  ( $k,l \in \mathbb{N}$ )
- Nếu  $a:m$  và  $(a+b):m$  thì  $b:m$
- Nếu  $a:m$  và  $(a+b) \not\mid m$  thì  $b \not\mid m$

#### III. MỘT SỐ VÍ DỤ

##### Dạng 1. Chứng minh quan hệ chia hết

**Ví dụ 1.** Xét xem tổng (hiệu) nào dưới đây chia hết cho 8.

- a)  $400-144$
- b)  $80+25+48$
- c)  $32+47+33$

***Giải***

a) Vì  $400:8$  và  $144:8$  nên  $(400-144):8$  (tính chất 1)

b) Vì  $80:8$ ;  $48:8$  và  $25 \not\mid 8$  nên  $(80+25+48) \not\mid 8$  (tính chất 2)

c) Ta có:  $32+47+33 = 32+(47+33)$

Vì  $32:8$  và  $(47+33):8$  nên  $(32+47+33):8$  (tính chất 1)

***Nhận xét:***

Một số sai lầm thường gặp ở câu c:

Vì  $32:8$ ;  $47 \not\mid 8$  và  $33 \not\mid 8$  nên  $(32+47+33) \not\mid 8$

Nguyên nhân sai lầm do vận dụng sai tính chất 2. Tính chất này khẳng định rằng: Nếu một tổng chỉ có duy nhất một số hạng không chia hết cho  $m$  (mọi số hạng khác chia hết cho  $m$ ) thì tổng đó không chia hết cho  $m$ .

**Ví dụ 2.** Chứng tỏ rằng trong ba số tự nhiên liên tiếp có một số chia hết cho 3.

**Giải**

Gọi ba số tự nhiên liên tiếp là:  $a; a + 1; a + 2$ .

Ta có ba trường hợp sau:

- Nếu  $a : 3$  thì bài toán đã được giải.
- Nếu  $a$  chia cho 3 dư 1, tức là:  $a = 3k + 1$ , thì  $a + 2 = (3k + 3) : 3$ .
- Nếu  $a$  chia cho 3 dư 2, tức là:  $a = 3k + 2$ , thì  $a + 1 = (3k + 3) : 3$ .

Vậy trong ba số  $a; a + 1; a + 2$  luôn có một số chia hết cho 3.

**Nhận xét:**

Kết quả trên vẫn đúng trong trường hợp tổng quát: Trong  $n$  số tự nhiên liên tiếp luôn có một số chia hết cho  $n$ .

**Ví dụ 3:** Chứng tỏ rằng tổng của ba số tự nhiên liên tiếp là một số chia hết cho 3.

**Giải**

Gọi ba số tự nhiên liên tiếp là:  $a; a + 1; a + 2$ . Tổng của ba số này bằng: là một số chia hết cho 3 (tính chất 3)

**Nhận xét:**

Ta có kết quả tương tự đối với phép nhân: Tích của  $n$  số tự nhiên liên tiếp chia hết cho  $n$ . Từ tính chất 4 và ví dụ 2, ta có kết quả “mạnh hơn”: Tích của  $n$  số tự nhiên liên tiếp chia hết cho  $n!$

(Trong đó:  $n! = 1.2.3...n$ , đọc là  $n$  giai thừa).

**Ví dụ 4:** Chứng tỏ rằng:

- a)  $(\overline{ab} - \overline{ba}) : 9$  (với  $a > b$ ).
- b) Nếu  $(\overline{ab} + \overline{cd}) : 111$  thì  $\overline{abcd} : 11$ .

**Giải**

a) Ta có:  $\overline{ab} - \overline{ba} = (10a + b) - (10b + a) = 9.a - 9.b = 9.(a - b)$

Mà  $9.(a - b) : 9$  (tính chất 3), nên  $\overline{ab} - \overline{ba} : 9$ .

b) Ta có:  $\overline{abcd} = 100.\overline{ab} + \overline{cd} = 99.\overline{ab} + (\overline{ab} + \overline{cd})$ .

Mà  $9.\overline{ab} : 111$  (tính chất 3) và  $(\overline{ab} + \overline{cd}) : 11$  đề bài cho, nên  $\overline{abcd} : 11$ .

**Dạng 2. Tìm điều kiện cho quan hệ chia hết.**

**Ví dụ 5:** Cho  $A = 12 + 15 + 36 + x$ , với  $x \in \mathbb{N}$ . Tìm điều kiện của  $x$  để:

a)  $A \vdots 3$

b)  $A \nmid 9$

**Giải**

a) Vì  $12 \vdots 3$ ;  $15 \vdots 3$  và  $36 \vdots 3$  nên để  $A \vdots 3$  thì  $x \vdots 3$

b) Ta có:  $A = 12 + 15 + 36 + x$ .

Vì  $12 + 15 = 27 \vdots 9$  và  $36 \vdots 9$  nên để  $A \nmid 9$  thì  $x \nmid 9$ .

**Ví dụ 6:** Tìm số tự nhiên  $n$  để:

a)  $(n+3) \vdots 3$

b)  $(7n+8) \vdots n$

c)  $(35-12n) \vdots n$  (với  $n < 3$ )

**Giải**

a) Vì  $n \vdots n$  nên để  $(n+3) \vdots n$  thì  $3 \vdots n$ . Từ đó suy ra:  $n \in \{1; 3\}$ .

b) Vì  $7n \vdots n$  nên để  $(7n+8) \vdots n$  thì  $8 \vdots n$ . Từ đó suy ra:  $n \in \{1; 2; 4; 8\}$ .

c) Vì  $12n \vdots n$  nên để  $(35-12n) \vdots n$  thì  $35 \vdots n$ . Từ đó suy ra:  $n \in \{1; 5; 7; 35\}$ .

Vì  $n < 3$  nên  $n=1$ . Vậy  $n = 1$ .

**Ví dụ 7:** Tìm số tự nhiên  $n$  để:

a)  $(n+8) \vdots (n+3)$

b)  $(7n+8) \vdots n$  (với  $n < 6$ )

c)  $(5n+2) \vdots (9-2n)$  (với  $n < 5$ ).

**Giải**

a) Vì  $(n+3) \vdots (n+3)$  nên theo tính chất 1 để  $(n+8) \vdots (n+3)$  thì:

$$[(n+8) - (n+3)] \vdots (n+3) \text{ hay } 5 \vdots (n+3)$$

Suy ra:  $n+3 \in \{1; 5\}$ . Vì Suy ra:  $n+3 \geq 3$  nên  $n+3 = 5 \Rightarrow n=2$ .

Vậy  $n = 2$ .

b) Vì  $3(n+4) \vdots (n+4)$  nên theo tính chất 1 để  $(16-3n) \vdots (n+4)$  thì:

$$[(16-3n) + 3(n+4)] \vdots (n+4) \text{ hay } 28 \vdots (n+4)$$

Suy ra:  $n+4 \in \{1; 2; 4; 7; 14; 28\}$ . Vì Suy ra:  $0 \leq n < 6$  nên  $4 \leq n+4 < 10$ .

Từ đó ta có:  $n+4 \in \{4; 7\}$  hay  $n \in \{0; 3\}$ .

c) Vì  $5(9-2n) \vdots (9-2n)$  nếu nên  $(5n+2) \vdots (9-2n)$  thì:  $2(5n+2) \vdots (9-2n)$ .

$$\text{Suy ra: } [5(9-2n) + 2(5n+2)] \vdots (9-2n) \text{ hay } 49 \vdots (9-2n)$$

$\Rightarrow 9-2n \in \{1; 7; 49\}$ . Vì  $9-2n \leq 9$  nên  $9-2n \in \{1; 7\}$

Từ đó ta có:  $n \in \{4; 1\}$ . Thì lại ta thấy  $n = 4$  hoặc  $n = 1$  đều thỏa mãn. Vậy  $n \in \{1; 4\}$ .

**Chú ý:**

Trong câu c, sau khi tìm được  $n$  ta phải thử lại, vì từ  $[5(9-2n)+2(5n+2)] : (9-2n)$  ta chỉ suy ra được  $2(5n+2) : (9-2n)$ , nên chưa chắc đã có  $(5n+2) : (9-2n)$ .

**III. BÀI TẬP**

**1.41.** Cho  $A = 2, 5, 7, 9, 13 + 78$ . Hỏi  $A$  có chia hết cho 3, cho 6, cho 9, cho 13 không? Vì sao?

**1.42.** Chứng tỏ rằng tổng bốn số tự nhiên liên tiếp là một số một số không chia hết cho 4.

**1.43.** Khi chia số số tự nhiên  $a$  cho 24 được số dư là 10. Hỏi số  $a$  có chia hết cho 2, cho 4 không? Vì sao?

**1.44.** Chứng tỏ rằng mọi số tự nhiên có ba chữ số giống nhau đều chia hết cho 37.

**1.45.** Chứng tỏ rằng:

a)  $1+4+4^2+4^3+\dots+4^{2012}$  chia hết cho 21.

b)  $1+7+7^2+7^3+\dots+7^{101}$  chia hết cho 8.

c)  $2+2^2+2^3+\dots+2^{100}$  vừa chia hết cho 31, vừa chia hết cho 5.

**1.46.** Chứng tỏ rằng:

a) Nếu  $(\overline{abc} - \overline{deg}) : 13$  thì  $\overline{abcdeg} : 13$ .

b) Nếu  $\overline{abc} : 7$  thì  $(2a+3b+c) : 7$ .

**1.47.** Tìm chữ số  $a$ , biết rằng:  $\overline{20a20a20a} : 7$ .

**1.48.** Tìm số tự nhiên  $n$  sao cho:

a)  $(n+12) : n$ .

b)  $(15-4n) : n$  (với  $n < 4$ ).

c)  $(6n-9) : n$  (với  $n \geq 4$ ).

**1.49.** Tìm số tự nhiên  $n$  sao cho:

a)  $(n+13) : (n-5)$  (với  $n > 5$ ).

b)  $(15-2n) : (n+1)$  (với  $n \leq 4$ ).

c)  $(6n+9) : (4n-1)$  (với  $n \geq 1$ ).

**1.50.** Cho  $a, b \in \mathbb{N}$ . Chứng tỏ rằng nếu  $5a+3b$  và  $13a+8b$  cùng chia hết cho 2012 thì  $a$  và  $b$  cũng chia hết cho 2012.

**Chuyên đề 4. DẤU HIỆU CHIA HẾT**

**I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ**

**1. Kiến thức cơ bản**

- $a : 2$  khi và chỉ khi  $a$  có chữ số tận cùng là 0; 2; 4; 6; 8.
- $a : 5$  khi và chỉ khi  $a$  có chữ số tận cùng là 0; 5.
- $a : 3$  khi và chỉ khi tổng các chữ số của  $a$  chia hết cho 3.
- $a : 9$  khi và chỉ khi tổng các chữ số của  $a$  chia hết cho 9.

## 2. Nâng cao

- $a : 4$  (hoặc  $a : 25$ ) khi và chỉ khi hai chữ số tận cùng của  $a$  tạo thành một số chia hết cho 4 (hoặc 25).
- $a : 8$  (hoặc  $a : 125$ ) khi và chỉ khi ba chữ số tận cùng của  $a$  tạo thành một số chia hết cho 8 (hoặc 125).
- $a : 11$  khi và chỉ khi tổng các chữ số hàng lẻ của  $a$  trừ đi tổng các chữ số hàng chẵn của  $a$  (hoặc ngược lại) chia hết cho 11.

Ví dụ: Số 908347 : 11, vì  $(9+8+4)-(0+3+7)=11 : 11$ .

## II. MỘT SỐ VÍ DỤ

### Dạng 1. Chứng minh quan hệ chia hết

**Ví dụ 1.** Chứng tỏ rằng với mọi số tự nhiên  $n$  ta đều có:

$$(n + 2012^{2013})(n + 2013^{2012}) : 2.$$

#### Giải

Ta có 2012 là số chẵn nên  $2012^{2013}$  cũng là số chẵn. Tương tự, ta có  $2013^{2012}$  là số lẻ. Từ đó:  $2012^{2012} + 2013^{2012}$  là số lẻ.

Ta có:  $(n + 2012^{2013}) + (n + 2013^{2012}) = 2n + (2012^{2013} + 2013^{2012})$  là số lẻ, vì  $2n$  là số chẵn. Suy ra trong hai số  $(n + 2012^{2013})$  và  $(n + 2013^{2012})$  phải có một số chẵn. Do vậy tích của chúng  $(n + 2012^{2013})(n + 2013^{2012})$  là một số chẵn.

$$\text{Vậy } (n + 2012^{2013})(n + 2013^{2012}) : 2.$$

#### Nhận xét:

Trong cách giải trên ta đã sử dụng tính chất: Nếu  $a + b$  là số lẻ thì trong hai số  $a$  và  $b$ , phải có một số chẵn, một số lẻ.

Thật vậy, nếu  $a$  và  $b$ , cùng là số chẵn hoặc cùng là số lẻ thì  $a + b$  là số chẵn: Trái với giả thiết  $a + b$  là số lẻ.

Ta cũng có thể chứng minh qua việc xét hai trường hợp:  $n$  chẵn và  $n$  lẻ.

**Ví dụ 2.** Chứng tỏ rằng hiệu của một số và tổng các chữ số của nó chia hết cho 9.

#### Giải

Ký hiệu  $s(n)$  là tổng các chữ số tự nhiên  $n$ . Bài toán trở thành: Chứng tỏ rằng  $n - s(n) : 9$

Thật vậy, giả sử  $n = \overline{a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0}$  ( $n$  có  $m+1$  chữ số), khi đó

$$s(n) = a_m + a_{m-1} + \dots + a_1 + a_0.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } n &= a_m \cdot 10^m + a_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 \\ &= \underbrace{99\dots 9 \cdot a_m}_{m \text{ số } 9} + \underbrace{99\dots 9 \cdot a_{m-1}}_{m-1 \text{ số } 9} + \dots + 9 \cdot a_1 + (a_m + a_{m-1} + \dots + a_1 + a_0). \end{aligned}$$

$$\text{Vì } = \underbrace{99\dots 9 \cdot a_m}_{m \text{ số } 9} + \underbrace{99\dots 9 \cdot a_{m-1}}_{m-1 \text{ số } 9} + \dots + 9 \cdot a_1 : 9 \text{ nên ta đặt bằng } 9k \text{ (} k \in \mathbb{N} \text{)}.$$

$$\text{Suy ra: } n = 9k + s(n) \Rightarrow n - s(n) = 9k : 9.$$

**Nhận xét:**

Từ kết quả bài toán trên ta thấy rằng  $n$  và  $s(n)$  luôn có cùng số dư khi chia cho 9. Ta cũng có kết quả tương tự khi thay 9 bằng 3.

**Ví dụ 3.** Hãy thay dấu phép toán cộng (+) hoặc trừ (-) vào những chỗ đánh dấu (\*) trong dãy tính sau để được kết quả là một số chia hết cho 2:

$$10 * 9 * 8 * 7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1$$

**Giải**

*Bước 1:* Thay tất cả dấu “\*” bằng dấu “+” ta được:

$$10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 55 \text{ (là số lẻ)}$$

*Bước 1:* Thay tất cả dấu “+” bằng dấu “-”

Khi thay dấu “+” trong  $a + b$  bằng dấu “-”, ta được  $a - b$ . Giá trị của biểu thức giảm đi  $(a + b) - (a - b) = 2b$  (là số chẵn).

Do đó, sau mỗi lần thay một dấu “+” bằng một dấu “-” thì kết quả giảm đi một số chẵn nên kết quả tính luôn là một số lẻ.

Vậy không có cách thay thế nào để kết quả tính chia hết cho 2.

**Nhận xét:**

Trong cách giải trên ta đã sử dụng phương pháp *giả thiết tạm*: Thay tất cả dấu “\*” bằng dấu “+”, rồi thay dần dấu “+” bằng dấu “-”. Kết hợp với tính bất biến (Kết quả phép tính luôn là số lẻ), ta có lời giả bài toán.

Ta cũng có thể giải thích như sau: Vì trong dãy tính có 5 số lẻ nên không thể điền dấu “+” hay dấu “-” vào những chỗ có dấu “\*” để được một số chẵn.

**Ví dụ 4:** Viết các số tự nhiên liên tiếp từ 10 đến 99 ta được số A. Hỏi A có chia hết cho 9 không? Vì sao?

**Giải**

$$\text{Ta có: } A = 10111213\dots 9899.$$

Xét 90 số tự nhiên liên tiếp: 10, 11, 12, ..., 98, 99.

- Tổng các chữ số hàng chục:  $(1 + 2 + \dots + 8 + 9) \cdot 10 = 45 \cdot 10 = 450$ .



- Tổng các chữ số hàng đơn vị:  $(0+1+2+\dots+8+9).9 = 45.9 = 405$ .

Tổng các chữ số của  $A$  là:  $450 + 405 = 855$ .

Mà  $855 : 9$  nên  $A : 9$ .

**Dạng 2. Tìm điều kiện cho quan hệ chia hết, chia dư.**

**Ví dụ 5:** Biết rằng số tự nhiên  $n$  chia hết cho 2 và  $(n^2 - n) : 5$ . Tìm chữ số tận cùng của  $n$

**Giải**

Vì  $n : 2$  chia hết cho 2 nên chữ số tận cùng của  $n$  là một số chẵn.

Vì  $n^2 - n = n(n-1) : 5$  nên  $n : 5$  hoặc  $(n-1) : 5$ . Do đó  $n$  có chữ số tận cùng là 0,5 hoặc  $n-1$  có chữ số tận cùng là 0,5. Tức là  $n$  có chữ số tận cùng là 0,5,1,6.

Kết hợp hai kết quả trên suy ra  $n$  có chữ số tận cùng là 0 hoặc 6.

**Ví dụ 6:** Tìm các chữ số  $x, y$  biết rằng:

a)  $\overline{23x5y} : 2; 5$  và 9

b)  $\overline{144xy} : 3$  và 5

**Giải**

a) Vì  $\overline{23x5y}$  chia hết cho cả 2 và 5 nên  $y = 0$ .

Ta có:  $\overline{23x50} : 9$  nên  $(2+3+5+0) : 9$  hay  $(10+x) : 9 \Rightarrow x = 8$ .

Vậy  $x = 8; y = 0$ .

b) Vì  $\overline{144xy} : 5$  nên  $y \in \{0; 5\}$ .

- Nếu  $y = 0$  thì ta có  $\overline{144x5} : 3$

$\Rightarrow (1+4+4+x+0) : 3$  hay  $(9+x) : 3 \Rightarrow x \in \{0; 3; 6; 9\}$ .

- Nếu  $y = 5$  thì ta có  $\overline{144x5} : 3$

$\Rightarrow (1+4+4+x+5) : 3$  hay  $(14+x) : 3 \Rightarrow x \in \{1; 4; 7\}$ .

Vậy có bảy cặp số  $(x, y)$  thỏa mãn:

x	0	3	6	9	1	4	7
y	0	0	0	0	5	5	5

**Ví dụ 7:** Tìm các chữ số  $x, y$  biết  $\overline{2x3y}$  chia hết cho 2, cho 5 và chia cho 9 dư 1.

**Giải**

Vì  $\overline{2x3y}$  chia hết cho cả 2 và 5 nên  $y = 0$ .

Ta có:  $\overline{2x30}$  chia hết cho 9 dư 1 khi và chỉ khi  $2 + x + 3 + 0$  chia hết cho 9 dư 1 (xem ví dụ 2) hay  $x + 5$  chia hết cho 9 dư 1.

$$\Rightarrow x + 5 = 10 \Rightarrow x = 5.$$

Vậy  $x = 5; y = 0$ .

**Ví dụ 8:** Tìm các chữ số  $a$  và  $b$  biết rằng:

a)  $\overline{25a2b} : 36$

b)  $\overline{a378b} : 72$  và 5

**Giải**

a) Vì  $\overline{25acb} : 36$  nên  $\overline{25a2b} : 4$  và 9.

Vì  $\overline{25a2b} : 4$  nên  $\overline{2b} : 4 \Rightarrow b \in \{0; 4; 8\}$ .

- Nếu  $b = 0$  thì ta có  $\overline{25a20} : 9$   
 $\Rightarrow (2 + 5 + a + 2 + 0) : 9$  hay  $(a + 9) : 9 \Rightarrow a \in \{0; 9\}$ .

- Nếu  $b = 4$  thì ta có  $\overline{25a24} : 9$   
 $\Rightarrow (2 + 5 + a + 2 + 4) : 9$  hay  $(a + 13) : 9 \Rightarrow a = 5$ .

- Nếu  $b = 8$  thì ta có  $\overline{25a28} : 9$   
 $\Rightarrow (2 + 5 + a + 2 + 8) : 9$  hay  $(a + 17) : 9 \Rightarrow a = 1$ .

Thử lại, ta có 4 cặp số  $(a; b)$  thỏa mãn:

$a$	0	9	5	1
$b$	0	0	4	8

b) Vì  $\overline{a378b} : 72$  nên  $\overline{a378b} : 8$  và 9.

- Vì  $\overline{a378b} : 8$  nên  $\overline{78b} : 8 \Rightarrow b = 4$ .

- Vì  $\overline{a3784} : 9$  nên  $(a + 3 + 7 + 8 + 4) : 9$  hay  $(a + 22) : 9 \Rightarrow a = 5$

Vậy  $a = 5$  và  $b = 4$ .

**Ví dụ 9:** Tìm chữ số  $a$  sao cho  $\overline{76a23} : 11$ .

**Giải**

Vì  $\overline{76a23} : 11$  nên  $[(7 + a + 3) - (6 + 2)] : 11$  hay  $(a + 22) : 11 \Rightarrow a = 9$ .

Vậy  $a = 9$ .

**Nhận xét:**

Để giải bài toán tìm các chữ số chưa biết của một số, biết số đó chia hết (hoặc chia dư) cho một vài số cho trước, ta sử dụng các dấu hiệu chia hết, ưu tiên các dấu hiệu cho biết 1 (hoặc 2, 3) chữ số tận cùng (dấu hiệu chia hết cho 2, 5, 4, 25, 8, 125)

**III. BÀI TẬP**

**1.51.** Từ ba trong bốn chữ số 5, 6, 3, 0, hãy ghép thành số có ba chữ số khác nhau thỏa mãn một trong các điều kiện:

- a) là số lớn nhất chia hết cho 2.
- b) là số nhỏ nhất chia hết cho 5.
- c) là số nhỏ nhất chia hết cho 9.
- d) là số lớn nhất chia hết cho 3.

**1.52.** Dùng ba trong bốn số 5, 4, 3, 2 hãy viết tất cả các số tự nhiên có ba chữ số chia hết cho cả ba số 2, 3 và 9.

**1.53.** Chứng tỏ rằng:

- a)  $10^{33} + 8$  chia hết cho 18.
- b)  $10^{10} + 14$  chia hết cho 9.

**1.54.** Chứng tỏ rằng với mọi số tự nhiên  $n$ , tích  $(n + 7)(n + 8)$  luôn chia hết cho 2.

**1.55.** Chứng tỏ rằng tích của ba số tự nhiên chẵn liên tiếp chia hết cho 48.

**1.56.** Cho  $n \in \mathbb{N}^*$  Chứng tỏ rằng:

- a)  $(5^n - 1) \div 4$ .
- b)  $(10^n + 18n - 1) \div 27$ .

**1.57.** Tìm số tự nhiên có năm chữ số, các chữ số giống nhau, biết rằng số đó chia cho 5 dư 1 và chia hết cho 2.

**1.58.** Tìm các chữ số  $x, y$  biết rằng:

- a)  $\overline{1x85y}$  chia hết cho 2; 3; 5.
- b)  $\overline{10xy5} \div 45$ .
- c)  $\overline{26x3y} \div 5$  và 18

**1.59.** Tìm các chữ số  $a, b$  sao cho:

- a)  $\overline{52ab}$  chia hết cho 9, chia hết cho 2 và chia cho 5 dư 4.
- b)  $\overline{12a5b}$  chia hết cho 2, chia hết cho 9 và chia cho 5 dư 2.

**1.60.** Tìm hai số tự nhiên liên tiếp có hai chữ số biết rằng một số chia hết cho 4, số kia chia hết cho 25.

**1.61.** Tìm chữ số  $a$  để  $\overline{aaaa96}$  chia hết cho cả 3 và 8.

**1.62.** Tìm chữ số  $a$  để  $\overline{1aaa1}$  chia hết cho 11.

**1.63.** Biết rằng  $1978a + 2012b$  và  $78a + 10b$  cùng chia hết cho 11. Chứng minh rằng  $a$  và  $b$  cũng chia hết cho 11.

**1.64.** Tìm số tự nhiên có bốn chữ số, sao cho khi nhân số đó với 9 ta được số mới gồm chính các chữ số của số ấy nhưng viết theo thứ tự ngược lại.

**1.65.** Tìm số tự nhiên có ba chữ số  $\overline{abc}$  sao cho:  $\overline{abc} = n^2 - 1$  và  $\overline{cba} = (n - 2)^2$ , với  $n \in \mathbb{N}, n > 2$ .

(Đề thi HSG Vũng Tàu, 2009)

**1.66.** Kí hiệu  $s(n)$  là tổng các chữ số tự nhiên  $n$ . Tìm  $n$  biết rằng:  $n + s(n) = 94$ .

## *Chuyên đề 5. SỐ NGUYÊN TỐ VÀ HỢP SỐ*

### I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### 1. Kiến thức cơ bản

- Ước và bội  $a:b \Leftrightarrow a$  là bội của  $b \Leftrightarrow b$  là ước của  $a$ .
- Tập hợp các ước của số tự nhiên  $a$  kí hiệu là  $U(a)$ . Tập hợp các bội của số tự nhiên  $a$  kí hiệu là  $B(a)$ .

Ví dụ.  $U(6) = \{1; 2; 3; 6\}$ ,  $B(6) = \{0; 6; 12; 18; \dots\}$

- Số nguyên tố là số tự nhiên lớn hơn 1, chỉ có hai ước là 1 và chính nó.
- Hợp số là số tự nhiên lớn hơn 1, có nhiều hơn hai ước.
- Phân tích một số ra thừa số nguyên tố là viết số đó dưới dạng một tích các thừa số nguyên tố với số mũ của nó. Thông thường, các ước nguyên tố được viết theo thứ tự từ nhỏ đến lớn.

Ví dụ.  $72 = 2^3 \cdot 3^2$

#### 2. Nâng cao

- Để kiểm tra số  $a$  có là số nguyên tố hay không, ta có thể chia  $a$  lần lượt cho các số nguyên tố  $2; 3; \dots; p$ , với  $p$  là số nguyên tố lớn nhất thỏa mãn  $p^2 \leq a$ . Nếu không có phép chia hết nào thì  $a$  là số nguyên tố, trái lại  $a$  là hợp số.

Ví dụ. Để xét số 103 có là số nguyên tố hay không ta xác định 7 là số nguyên tố lớn nhất thỏa mãn  $7^2 \leq 103$  (vì số nguyên tố tiếp theo là 11 có  $11^2 = 121 > 103$ ). Ta chia 103 lần lượt cho  $2; 3; 5; 7$  và thấy không có phép chia hết nào. Vậy 103 là số nguyên tố.

- Tập hợp các số nguyên tố có vô hạn phần tử. Do vậy, không có số nguyên tố lớn nhất.
- Nếu số tự nhiên  $a$  phân tích ra thừa số nguyên tố được:

$a = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$ , trong đó  $p_1, p_2, \dots, p_k$  là các số nguyên tố khác nhau, thì số ước của  $a$  là  $(n_1 + 1) \cdot (n_2 + 1) \dots (n_k + 1)$ .

- Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, số chính phương chỉ chứa các thừa số nguyên tố với số mũ chẵn. Từ đó ta cũng suy ra số chính phương có số ước là số lẻ.
- Nếu  $p$  là số nguyên tố và  $ab:p$  thì hoặc  $a:p$  hoặc  $b:p$ .

- Nếu  $p, q$  là hai số nguyên tố mà  $a:p$  và  $a:q$  thì  $a:p.q$ .

## II. MỘT SỐ VÍ DỤ

### Dạng 1. Các bài toán về ước và bội.

**Ví dụ 1.** Cho một phép chia có số bị chia bằng 200 và số dư bằng 13. Tìm số chia và thương.

**Giải**

Gọi số chia là  $b$ , thương là  $q$ . Vì số dư luôn nhỏ hơn số chia nên  $b > 13$ .

Khi đó ta có phép chia:  $200 = b.q + 13$

$$\Rightarrow b.q = 200 - 13 = 187$$

$$\Rightarrow b \in U(187)$$

Vì  $187 = 11.17$  và  $b > 13$  nên hoặc  $b = 17$  hoặc  $b = 187$ .

- Nếu  $b = 17$  thì  $q = 11$  và ta có phép chia  $200 = 17.11 + 13$ .
- Nếu  $b = 187$  thì  $q = 1$  và ta có phép chia  $200 = 187.1 + 13$ .

**Ví dụ 2.** Biết rằng số tự nhiên  $\overline{aaa}$  chỉ có đúng ba ước khác 1, tìm chữ số  $a$ .

**Giải**

Ta có  $\overline{aaa} = 111.a = 3.37.a$

$\Rightarrow 3; 37; 3.37$  là các ước (khác 1) của  $\overline{aaa}$ .

Để  $\overline{aaa}$  có đúng ba ước khác 1 (như trên) thì  $a = 1$ .

Vậy số phải tìm là 111.

**Nhận xét:**

Một số có đúng ba ước khác 1 thì số ước của nó bằng 4 (vì tính thêm ước 1). Sử dụng công thức tính số ước, số đó khi phân tích ra thừa số nguyên tố phải có dạng  $p^3$  hoặc  $p.q$ , với  $p$  và  $q$  là các số nguyên tố khác nhau. Vì  $\overline{aaa} = 111.a = 3.37.a$  và  $3; 37$  là các số nguyên tố khác nhau nên suy ra  $\overline{aaa}$  có dạng  $2$  và vì thế  $a = 1$ .

**Ví dụ 3.** Tìm số tự nhiên  $x$  sao cho  $14:(2x+3)$ .

**Giải**

Vì  $2x+3$  là ước của 14 nên  $2x+3 \in \{1;2;7;14\}$ .

Vì  $2x+3$  là số lẻ, lớn hơn hoặc bằng 3 nên  $2x+3=7$  hay  $2x=7-3=4$

$$\Rightarrow x=4:2=2$$

Vậy  $x=2$ .

**Nhận xét:**

Khi giải bài toán về ước và bội, ta thường xét tính chẵn - lẻ và phạm vi giá trị của các số. Trong ví dụ trên,  $2x+3$  là số lẻ, và vì  $x \geq 0$  nên  $2x+3 \geq 3$ . Việc đó giúp số trường hợp của bài toán được giảm đi đáng kể.

**Dạng 2. Các bài toán về số nguyên, hợp số.**

**Ví dụ 4.** Tìm số nguyên tố  $p$ , sao cho  $p+2$  và  $p+4$  cũng là các số nguyên tố.

**Giải**

- Nếu  $p=2$  thì  $p+2=4$  và  $p+4=6$  đều không phải là số nguyên tố.
- Nếu  $p=3$  thì  $p+2=5$  và  $p+4=7$  đều là số nguyên tố.
- Nếu  $p > 3$  thì số nguyên tố  $p$  có một trong hai dạng:  $3k+1, 3k+2$  với  $k \in \mathbb{N}^*$ .

$$+ \text{ Nếu } p=3k+1 \text{ thì } p+2=3k+3=3(k+1)$$

$$\Rightarrow (p+2):3, \text{ mà } p+2 > 3 \text{ nên } p+2 \text{ là hợp số.}$$

$$+ \text{ Nếu } p=3k+2 \text{ thì } p+4=3k+6=3(k+2)$$

$$\Rightarrow (p+4):3, \text{ mà } p+4 > 3 \text{ nên } p+4 \text{ là hợp số}$$

Vậy chỉ có duy nhất một số nguyên tố  $p$  thỏa mãn là  $p=3$ .

**Nhận xét:**

Trong cách giải trên ta đã sử dụng tính chất sau đây:

“Nếu  $a > m > 1$  và  $a:m$  thì  $a$  là hợp số”.

Đây là một tính chất thường dùng trong các bài toán về số nguyên.

**Ví dụ 5.** Cho  $p$  và  $2p+1$  là các số nguyên tố ( $p > 5$ ). Hỏi  $4p+1$  là số nguyên tố hay hợp số?

**Giải**

Do  $p$  là số nguyên tố lớn hơn 3 nên  $p \not\equiv 3 \Rightarrow 4p \not\equiv 3$ .

Do  $2p+1$  là số nguyên tố lớn hơn 3 nên  $2p+1 \not\equiv 3$

$\Rightarrow 2(2p+1) \not\equiv 3$  hay  $4p+2 \not\equiv 3$ .

Mặt khác, trong ba số tự nhiên liên tiếp  $4p; 4p+1; 4p+2$  luôn có một số chia hết cho 3, do đó  $4p+1 \equiv 3$ . Mà  $4p+1 > 3$ , nên  $4p+1$  là hợp số.

**Ví dụ 6.** Tìm số nguyên tố biết rằng số đó bằng tổng của hai số nguyên tố và cũng bằng hiệu của hai số nguyên tố khác.

**Giải**

Gọi  $p$  là số nguyên tố cần tìm và  $p = a + b = c - d$ , với  $a, b, c$  là các số nguyên tố,  $c > d$ .

Vì  $p = a + b > 2$  nên  $p$  là số lẻ.

$\Rightarrow a + b$  và  $c - d$  là các số lẻ.

- Vì  $a + b$  là số lẻ nên một trong hai số  $a, b$  là số chẵn, giả sử  $b$  chẵn. Vì  $b$  là số nguyên tố nên  $b = 2$ .
- Vì  $c - d$  là số lẻ nên một trong hai số  $c, d$  là số chẵn. Vì  $c, d$  là các số nguyên tố và  $c > d$  nên  $d$  là số chẵn  $\Rightarrow d = 2$ .

Do vậy  $p = a + 2 = c - 2 \Rightarrow c = a + 4$

Ta cần tìm số nguyên tố  $a$  để  $p = a + 2$  và  $c = a + 4$  cũng là số nguyên tố. Theo ví dụ 4, ta có  $a = 3$ .

Vậy số nguyên tố cần tìm là 5, với  $5 = 3 + 2 = 7 - 2$ .

### **Dạng 3. Các bài toán về phân tích một số ra thừa số nguyên tố**

**Ví dụ 7.** Phân tích các số sau ra thừa số nguyên tố:

a)  $2001^{2012}$

b)  $2.9.2012$

**Giải**

a) Phân tích số 2001 ra thừa số nguyên tố ta được:  $2001 = 3.23.29$

Từ đó suy ra:  $2001^{2012} = (3.23.29)^{2012} = 3^{2012}.23^{2012}.29^{2012}$

b) Phân tích số 2012 ra thừa số nguyên tố ta được:  $2012 = 2^2.503$

Từ đó suy ra:  $2.9.2012 = 2.3^2.2^2.503 = 2^3.3^2.503$

**Ví dụ 8.** Tìm  $n \in \mathbb{N}^*$  biết:  $2 + 4 + 6 + \dots + (2n) = 756$ .

**Giải**

Số số hạng trong vế trái là:  $(2n-2):2+1=(n-1)+1=n$

Khi đó:  $2 + 4 + 6 + \dots + (2n) = (2n+2)n:2 = n.(n+1)$



Phân tích số 756 thành tích của hai số tự nhiên liên tiếp:

$$756 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7 = 27 \cdot 28$$

Theo đề ra, ta có:  $n(n+1) = 27 \cdot 28 \Rightarrow n = 27$

Vậy  $n = 27$

**Ví dụ 9.** Tìm số tự nhiên  $n$  sao cho  $p = (n-2)(n^2+n-5)$  là số nguyên tố.

**Giải**

Từ  $p = (n-2)(n^2+n-5)$  suy ra  $n-2$  và  $n^2+n-5$  là ước của  $p$ .

Vì  $p$  là số nguyên tố nên  $n-2=1$  hoặc  $n^2+n-5=1$

Nếu  $n-2=1$  thì  $n=3$

Khi đó  $p=1 \cdot (3^2+3-5) = 7$  là số nguyên tố (thỏa mãn).

Nếu  $n^2+n-5=1 \Leftrightarrow n^2+n=6 \Leftrightarrow n(n+1)=2 \cdot 3 \Rightarrow n=2$

Khi đó  $p=(2-2) \cdot 1=0$  không là số nguyên tố.

Vậy  $n=3$ .

### III. BÀI TẬP

**1.67.** Tìm tập hợp các số tự nhiên vừa là bội của 4, vừa là ước của 60.

**1.68.** Tìm các số tự nhiên  $x, y$  sao cho  $(2x-1)(y+3)=12$ .

**1.69.** Chứng tỏ rằng nếu  $p$  là số nguyên tố lớn hơn 3 thì  $(p-1)(p+1)$  chia hết cho 24.

(Đề HSG tỉnh Phú Thọ, 2004)

**1.70.** Tìm chữ số  $a$  để  $\overline{23a}$  là số nguyên tố.

**1.71.** Tìm số tự nhiên nhỏ nhất có 12 ước số.

**1.72.** Chứng tỏ rằng: Nếu một số tự nhiên có ba chữ số tận cùng là 104 thì số đó có ít nhất 4 ước số.

**1.73.** Tìm hai số nguyên tố có tổng bằng 309.

**1.74.** Tìm số nguyên tố  $p$ , sao cho  $p+4; p+8$  cũng là các số nguyên tố.

(Đề HSG Hà Nội, 2008)

**1.75.** Tìm số nguyên tố  $p$ , sao cho  $p+6; p+8; p+12; p+14$  cũng là các số nguyên tố.

**1.76.** Cho  $p$  và  $p+4$  là các số nguyên tố ( $p > 3$ ). Chứng tỏ rằng:  $p+8$  là hợp số.

**1.77.** Số  $3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{2012}$  là số nguyên tố hay hợp số.

**1.78.** Hai số nguyên tố gọi là *sinh đôi* nếu chúng là hai số nguyên tố và là hai số lẻ liên tiếp (chẳng hạn như: 3 và 5, 11 và 13, ...). Chứng minh rằng số tự nhiên lớn hơn 4 và nằm giữa hai số nguyên tố sinh đôi thì chia hết cho 6.

**1.79.** Tìm ba số tự nhiên lẻ liên tiếp đều là số nguyên tố.

**1.80.** Tìm  $n \in \mathbb{N}^*$ , biết:  $1+3+5+\dots+(2n+1)=144$ .

**1.81.** Tìm số  $\overline{abc}$  khi phân tích ra thừa số nguyên tố có thừa số 3 và thừa số 7. Chứng tỏ rằng số  $a+19b+4c$  có tính chất đó.

**1.82.** Tìm chữ số  $a$  sao cho số  $\overline{aaa}$  là tổng của các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến số  $n$  nào đó.

## Chuyên đề 6. ƯỚC CHUNG LỚN NHẤT

### VÀ BỘI CHUNG NHỎ NHẤT

#### I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

##### 1. Kiến thức cơ bản

a) Ước chung và ước chung lớn nhất

- Ước chung của hai hay nhiều số là ước của tất cả các số đó.

Tập hợp các ước chung của hai số  $a$  và  $b$  kí hiệu là  $ƯC(a, b)$  và được xác định bởi:

$$ƯC(a, b) = Ư(a) \cap Ư(b).$$

- Ước chung lớn nhất của  $a$  và  $b$  là số lớn nhất trong tập hợp ước chung của  $a$  và  $b$ . Kí hiệu là  $ƯCLN(a, b)$  hoặc gọn hơn  $(a, b)$ .

Cách tìm  $ƯCLN$  của các số cho trước:

*Bước 1.* Phân tích mỗi số ra thừa số nguyên tố.

*Bước 2.* Chọn ra các thừa số nguyên tố chung.

*Bước 3.* Lập tích các thừa số nguyên tố đã chọn, mỗi thừa số lấy với số mũ nhỏ nhất của nó. Tích đó là  $ƯCLN$  cần tìm.

- **Chú ý:**

+ Nếu  $a:b$  thì  $(a, b) = b$ .

+  $a$  và  $b$  nguyên tố cùng nhau  $\Leftrightarrow (a, b) = 1$

+ Ba số  $a, b, c$  gọi là đôi một nguyên tố cùng nhau nếu  $(a, b) = (b, c) = (c, a) = 1$

+ Muốn tìm ước chung của các số đã cho, ta tìm ước của  $ƯCLN$  của tất cả các số đó.

b) Bội chung và bội chung nhỏ nhất

- Bội chung của hai hay nhiều số (khác 0) là bội của tất cả các số đó.

Tập hợp các bội chung của hai số  $a$  và  $b$  kí hiệu là  $BC(a, b)$  và được xác định là

$$BC(a, b) = B(a) \cap B(b).$$

- Bội chung nhỏ nhất của  $a$  và  $b$  là số nhỏ nhất khác 0 trong tập hợp các bội chung của  $a$  và  $b$ , kí hiệu  $BCNN(a, b)$  hoặc rút gọn hơn  $[a, b]$

Cách tìm  $BCNN$  của các số cho trước:

*Bước 1.* Phân tích các số ra thừa số nguyên tố.

*Bước 2.* Chọn ra các thừa số nguyên tố chung và riêng.

*Bước 3.* Lập tích các thừa số đã chọn, mỗi thừa số lấy với số mũ lớn nhất của nó, tích đó là  $BCNN$  phải tìm.

- **Chú ý:**

+ Nếu  $a:b$  với  $(a \neq 0)$  thì  $[a, b] = a$ .

+  $(a, b) = 1$  thì  $[a, b] = a.b$

+ Muốn tìm bội chung của các số đã cho, ta tìm bội của  $BCNN$  của các số đó.

##### 2. Nâng cao

- Cho  $a, b \in \mathbb{N}$  và  $(a, b) = d$ . Nếu  $a = dm$  và  $b = dn$  thì suy ra:  $(m, n) = 1$

- Cho  $a, b \in \mathbb{N}$  và  $[a, b] = c$ . Nếu  $c = am$  và  $c = bn$  thì suy ra  $(m, n) = 1$ .

- $(ma, mb) = m(a, b)$  và  $[ma, mb] = m[a, b]$

- Nếu  $ab:m$  và  $(a,m)=1$  thì  $b:m$
  - Nếu  $a:m$  và  $a:n$  thì  $ab:[m,n]$  đặc biệt nếu  $a:m$  và  $a:n$  mà  $(m,n)=1$  thì  $a:mn$
- Tích hai số bằng tích của BCNN và ƯCLN của chúng:  $ab=(a,b).[a,b]$

## II. MỘT SỐ VÍ DỤ

### Dạng 1. Các bài toán về ước chung và bội chung.

**Ví dụ 1.** Tìm ƯC(28, 70); BC(4; 14).

**Giải**

+ Ta có  $Ư(28) = \{1; 2; 4; 7; 14; 28\}$

$Ư(70) = \{1; 2; 5; 7; 10; 14; 35; 70\}$

Từ đó suy ra  $ƯC(28; 70) = Ư(28) \cap Ư(70) = \{1; 2; 7; 14\}$

+ Ta có:  $B(4) = \{0; 4; 8; 12; 16; 20; 24; 28; \dots\}$

$B(14) = \{0; 14; 28; 42; 56; \dots\}$ .

Từ đó suy ra:  $BC(4, 14) = B(4) \cap B(14) = \{0; 28; 56; \dots\}$

**Nhận xét:**

Dựa vào các chú ý trong phần I, ta có thể giải bài toán trên theo cách khác sau đây:

+ Ta có:  $28=2^2.7$ ;  $70=2.5.7 \Rightarrow ƯCLN(28,70) = 2.7 = 14$ .

Vậy  $ƯC(28,70) = Ư(ƯCLN(28,70)) = Ư(14) = \{1; 2; 7; 14\}$

+ Ta có:  $4 = 2^2$  và  $14 = 2.7 \Rightarrow BCNN(4,14) = 2^2.7 = 28$ .

Vậy  $BC(4,14) = B(BCNN(4,14)) = B(28) = \{0; 28; 56; \dots\}$ .

**Ví dụ 2:** Tìm số tự nhiên  $a$ , biết rằng 332 chia cho  $a$  thì dư 17, còn khi chia 555 cho  $a$  thì được dư là 15.

**Giải:**

Vì 332 chia cho  $a$  dư 17 nên  $332 - 17 = 315 : a$  và  $a > 17$ .

Vì 555 chia cho  $a$  dư 15 nên  $555 - 15 = 540 : a$  và  $a > 15$ .

$\Rightarrow a \in ƯC(315,540)$  và  $a > 17$ .

Ta có:  $315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$  và  $540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$

$\Rightarrow ƯCLN(315,540) = 3^2 \cdot 5 = 45$ .

Do đó:  $a \in ƯC(315, 540) = Ư(45) = \{1; 3; 5; 9; 15; 45\}$ .

Vì  $a > 17$  nên  $a = 45$ .

Vậy  $a = 45$

**Ví dụ 3:** Tìm số tự nhiên nhỏ nhất có bốn chữ số, biết rằng khi chia số đó cho 18; 24 ; 30 có số dư lần lượt là 13; 19; 25.

**Giải:**

Gọi số cần tìm là  $a$ ,  $1000 \leq a \leq 9999$ .

Vì  $a$  chia cho 18 dư 13 nên ta có  $a = 18 \cdot q + 13$ .

$$\Rightarrow a + 5 = (18 \cdot q + 18) : 18.$$

Tương tự, ta cũng có :  $a + 5$  chia hết cho 24 và 30.

Do vậy  $a + 5 \in BC(18, 24, 30) \Rightarrow (a + 5) : BCNN(18, 24, 30)$ .

Ta có:  $BCNN(18, 24, 30) = BCNN(2 \cdot 3^2, 2^3 \cdot 3, 2 \cdot 3 \cdot 5) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$

$$\Rightarrow a + 5 : 360 \text{ hay } a + 5 = 360 \cdot k \text{ với } k \in \mathbb{N}^*.$$

$$\Rightarrow a = 360 \cdot k - 5.$$

Ta thấy  $k$  càng lớn thì  $a$  càng lớn, vì vậy để  $a$  là số nhỏ nhất thì  $k$  phải nhỏ nhất.

Với  $k = 1$  thì  $a = 355 < 1000$ : không thỏa mãn.

Với  $k = 2$  thì  $a = 715 < 1000$ : không thỏa mãn.

Với  $k = 3$  thì  $a = 1075 < 1000$ : thỏa mãn.

Vậy số cần tìm là 1075.

**Nhận xét:** Ta có thể dùng cách suy luận khác như sau:

Vì  $1000 \leq a \leq 9999$  nên ta có  $1000 \leq 360 \cdot k - 5 \leq 9999$

Cộng ba số với 5 ta được:  $10005 \leq 360 \cdot k \leq 10004$ .

$$\text{Chia ba số cho 360, ta được: } \frac{1005}{360} \leq k \leq \frac{10004}{360} \Leftrightarrow \frac{67}{24} \leq k \leq \frac{2501}{90}$$

Vì  $k \in \mathbb{N}^*$  nên  $3 \leq k \leq 27$ .

Vậy giá trị nhỏ nhất của  $k$  là 3. Tương ứng sẽ cho giá trị nhỏ nhất của  $a$  là 1075. Ngoài ra, giá trị lớn nhất của  $k$  là 27. Tương ứng sẽ cho giá trị nhỏ nhất của  $a$  là  $360 \cdot 27 - 5 = 9715$

**Ví dụ 4:** Tìm hai số tự nhiên  $a, b$  biết rằng  $a + b = 128$  và  $(a, b) = 16$ .

**Giải:**

Vì  $(a, b) = 16$  nên  $a = 16 \cdot m$  ;  $b = 16 \cdot n$  và  $(m, n) = 1$ .

Vì  $a + b = 128$  nên  $16m + 16n = 128 \Rightarrow m + n = 8$

Vì  $(m, n) = 1$  và  $m + n = 8$  nên ta có bốn trường hợp sau:

- $m = 1$  và  $n = 7 \Rightarrow a = 16 \cdot 1 = 16$  và  $b = 16 \cdot 7 = 112$ .
- $m = 3$  và  $n = 5 \Rightarrow a = 16 \cdot 3 = 48$  và  $b = 16 \cdot 5 = 80$ .
- $m = 5$  và  $n = 3 \Rightarrow a = 16 \cdot 5 = 80$  và  $b = 16 \cdot 3 = 48$ .
- $m = 7$  và  $n = 1 \Rightarrow a = 16 \cdot 7 = 112$  và  $b = 16 \cdot 1 = 16$ .

Vậy bài toán có 4 đáp số là:

$a$	16	48	80	112
$b$	112	80	48	16

**Nhận xét:**

Trong ví dụ trên ta thấy rằng: bài toán có đáp số là  $a = 48; b = 80$  thì cũng có đáp số là  $a = 80; b = 48$ . Điều đó có được là do vai trò của  $a$  và  $b$  trong đó đề bài là như nhau. Với những bài toán như vậy, ta thường giả sử  $a \leq b$  để làm giảm số trường hợp phải xét. Khi giải xong ta chỉ cần đổi vai trò của  $a$  và  $b$  để có các đáp số còn lại.

**Ví dụ 5.** Tìm hai số tự nhiên  $a, b$  biết rằng:  $(a, b) = 6$  và  $[a, b] = 36$ .

**Giải**

Vì vai trò của  $a$  và  $b$  là như nhau, nên không mất tính tổng quát, ta giả sử  $a \leq b$ .

Áp dụng công thức:  $a \cdot b = [a, b] \cdot (a, b)$ , ta có:  $a \cdot b = 36 \cdot 6 = 216$ .

Vì  $(a, b) = 6$  nên  $a = 6 \cdot m$  và  $b = 6 \cdot n$ , với  $m \leq n$  và  $(m, n) = 1$

Thay vào  $a \cdot b = 216$  ta được:  $6m \cdot 6n = 216$

$$36mn = 216$$

$$mn = 216 : 36 = 6.$$

Vì  $m \leq n; mn = 6$  và  $(m, n) = 1$  nên ta có hai trường hợp sau:

- $m = 1$  và  $n = 6 \Rightarrow a = 6 \cdot 1 = 6$  và  $b = 6 \cdot 6 = 36$ .
- $m = 2$  và  $n = 3 \Rightarrow a = 6 \cdot 2 = 12$  và  $b = 6 \cdot 3 = 18$ .

Đổi vai trò của  $a$  và  $b$ , ta có hai đáp số khác là:  $a = 36$  và  $b = 6$ ;  $a = 18$  và  $b = 12$ .

Vậy bài toán có 4 đáp số:

$a$	6	12	18	36
$b$	36	18	12	6

## Dạng 2. Các bài toán chứng minh

**Ví dụ 6.** Cho  $n \in \mathbb{N}^*$ . Chứng tỏ rằng:  $(2n + 3; 3n + 4) = 1$ .

**Giải**

Đặt  $d = (2n + 3; 3n + 4)$ , ta có:  $(2n + 3) : d$  và  $(3n + 4) : d$

$$\Rightarrow 3(2n+3):d \text{ và } 2(3n+4):d \text{ hay } (6n+8):d$$

$$\Rightarrow [(6n+9)-(6n+8)]:d \text{ hay } 1:d$$

$$\Rightarrow d = 1$$

$$\text{Vậy } (2n+3; 3n+4) = 1$$

**Ví dụ 7.** Cho  $a, b \in \mathbb{N}^*$ ;  $a > b$  và  $(a, b) = 1$ .

Chứng tỏ rằng  $(a+b, a-b)$  hoặc bằng 1, hoặc bằng 2.

**Giải**

Đặt  $d = (a+b, a-b)$  thế thì:  $(a+b):d$  và  $(a-b):d$

Tức là:  $a+b = d.m$ ;  $a-b = d.n$  (với  $m, n \in \mathbb{N}$ ;  $m > n$ )

Suy ra:  $2a = d.m + d.n \Rightarrow 2a:d$

Và:  $2b = d.m - d.n \Rightarrow 2b:d$

Do đó  $d \in UC(2a, 2b) \Rightarrow (2a, 2b):d$

Mà  $(2a, 2b) = 2(a, b) = 2$  nên  $2:d \Rightarrow d = 1$  hoặc  $d = 2$ .

Vậy  $(a+b, a-b)$  hoặc bằng 1 hoặc bằng 2.

**Nhận xét:**

Trong lời giải trên ta dùng kết quả của một bài toán quen thuộc: “tìm hai số biết tổng và hiệu”. Khi đó, 2 lần số lớn bằng tổng cộng hiệu, 2 lần số nhỏ bằng tổng trừ hiệu.

### Dạng 3. Các bài toán thực tế

**Ví dụ 8.** Một khu đất hình chữ nhật dài 54 m, rộng 48 m. Người ta muốn chia khu đất ấy thành những mảnh hình vuông bằng nhau để trồng các loại rau. Hỏi có thể chia được bằng bao nhiêu cách? Với cách chia nào thì cạnh của mảnh đất hình vuông là lớn nhất và bằng bao nhiêu?

**Giải**

Gọi  $n$  là độ dài một cạnh của mảnh đất hình vuông được chia ra. Ta có:  $54:n$  và  $48:n \Rightarrow n \in UC(54, 48)$ .

Lại có:  $54 = 2 \cdot 3^3$  và  $48 = 2^4 \cdot 3$

Nên suy ra:  $UCLN(54, 48) = U(6) = \{1; 2; 3; 6\}$ .

Vậy ta có thể chia khu đất theo 4 cách và cạnh của mảnh đất hình vuông lớn nhất có thể là 6 m.

**Nhận xét:**

Ta có thể tính được số mảnh đất hình vuông tạo thành của mỗi cách chia như sau:

Cách	Độ dài một cạnh của mảnh đất hình vuông	Số mảnh đất hình vuông tạo thành
1	1 m	$54 \cdot 48 = 2592$
2	2 m	$27 \cdot 24 = 648$
3	3 m	$18 \cdot 16 = 288$
4	4 m	$9 \cdot 8 = 72$

**Ví dụ 9.** Một trường tổ chức cho 64 học sinh đi thi đấu thể thao bằng một số xe ô tô thuộc hai loại: loại xe 12 chỗ ngồi và loại xe 7 chỗ ngồi (không kể người lái xe). Biết rằng số học sinh đó xếp vừa đủ số ghế ngồi trên các xe. Hỏi mỗi loại xe có mấy chiếc?

**Giải**

Gọi  $x$  là số xe 12 chỗ và  $y$  là số xe 7 chỗ ngồi ( $x, y \in \mathbb{N}^*$ ).

Số học sinh đi xe loại 12 chỗ ngồi là  $12x$ .

Số học sinh đi xe loại 7 chỗ ngồi là  $7y$ .

Theo đề ra ta có:  $12x + 7y = 64$  (\*)

Ta có:  $12x : 4$  và  $64 : 4$  nên  $7y : 4$ .

Vì  $ƯCLN(7,4) = 1$  nên  $y : 4$ .

Từ (\*) ta suy ra:  $7y < 64 \Rightarrow y \leq 9$ .

Mà  $y : 4$  nên  $y \in \{4; 8\}$ .

+ nếu  $y = 4$  thì thay vào (\*) ta được:  $12x + 7 \cdot 4 = 64$

$$12x = 64 - 28 = 36$$

Suy ra  $x = 36 : 12 = 3$

+ nếu  $y = 8$  thì thay vào (\*) ta được  $12x + 7 \cdot 8 = 64$

$$\text{Suy ra } 12x = 64 - 7 \cdot 8 = 8$$

Suy ra  $x \notin \mathbb{N}^*$ .

Vậy có 3 xe 12 chỗ ngồi và 4 xe 7 chỗ ngồi.

### III. BÀI TẬP

**1.83.** Tìm  $ƯC(48,120,150)$ ;  $BC(26,78)$ .

**1.84.** Cho  $a, b$  là hai số tự nhiên không nguyên tố cùng nhau và thỏa mãn:  $a = 4n + 3$ ;  $b = 5n + 1$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Tìm  $(a,b)$ .

**1.85.** Tìm hai số tự nhiên  $a, b$  biết:

a)  $7a = 11b$  và  $(a,b) = 45$ .

b)  $[a,b] = 300$  và  $a \cdot b = 4500$ .

c)  $a + b = 30$  và  $[a,b] = 6 \cdot (a,b)$ .

**1.86.** Tìm hai số tự nhiên  $a, b$  biết:  $a + 2b = 48$  và  $(a,b) + 3[a,b] = 114$ .

**1.87.** Tìm hai số tự nhiên  $a, b$  biết:  $ƯCLN(a,b) + BCNN(a,b) = 15$ .

**1.88.** Một số chia cho 21 dư 2 và chia cho 12 dư 5. Hỏi số đó chia cho 84 thì dư bao nhiêu?

**1.89.** Cho một số tự nhiên  $a$  thỏa mãn:  $a : 7$  và  $a$  chia cho 4 hoặc 6 đều dư 1. Tìm  $a$  biết rằng  $a < 400$ .

**1.90.** Tìm số tự nhiên lớn nhất có ba chữ số sao cho chia nó cho 2, cho 3, cho 4, cho 5, cho 6 ta được các số dư theo thứ tự là 1, 2, 3, 4, 5.

**1.91.** Cho  $(a,b) = 1$ , chứng tỏ rằng:

a)  $(a, a - b) = 1$  (với  $a > b$ )

b)  $(ab, a + b) = 1$ .

**1.92.** Cho  $n \in \mathbb{N}$ . Chứng tỏ rằng:

a)  $(2n+1, 2n+3) = 1$

b)  $(2n+5, 3n+7) = 1$

**1.93.** Cho hai số nguyên tố cùng nhau  $a$  và  $b$ . Chứng tỏ rằng hai số  $11a+2b$  và  $18a+5b$  hoặc nguyên tố cùng nhau hoặc có một ước chung là 19.

**1.94.** Một lớp học có 24 học sinh nam và 18 học sinh nữ. Có bao nhiêu cách chia lớp đó thành các tổ sao cho số học sinh nam và số học sinh nữ được chia đều vào các tổ? Biết rằng số tổ lớn hơn 1.

**1.95.** Một đơn vị bộ đội khi xếp hàng, mỗi hàng có 20 người, hoặc 25 người, hoặc 30 người đều thừa 15 người. Nếu xếp mỗi hàng 41 người thì vừa đủ (không có hàng nào thiếu, không có ai ở ngoài hàng). Hỏi đơn vị có bao nhiêu người, biết rằng số người của đơn vị chưa đến 1000?

**1.96.** Tổng số học sinh khối 6 của một trường có khoảng 235 đến 250 em, khi chia cho 3 dư 2, chia cho 4 thì dư 3, chia cho 5 thì dư 4, chia cho 6 thì dư 5, chia 10 dư 9. Tìm số học sinh của khối 6.

**1.97.** Một trường tổ chức cho học sinh đi tham quan bằng ô tô. Nếu xếp 35 hay 40 học sinh lên một ô tô thì đều thấy thừa ra 5 chỗ trống. Tính số học sinh đi tham quan, biết rằng số học sinh đó có khoảng từ 200 đến 300 em.

**1.98.** Cho  $a = 123456789$  và  $b = 987654321$ . Tìm  $(a, b)$ .

**1.99.** Hãy tìm các chữ số  $a, b, c, d$  sao cho các số  $a, \overline{ad}, \overline{cd}, \overline{abcd}$  là các số chính phương. *(Đề thi HSG Thừa Thiên Huế, 2007)*



**Chuyên đề nâng cao 1. SỐ CHÍNH PHƯƠNG**

**I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ**

**1. Định nghĩa**

Số chính phương là bình phương của một số tự nhiên.

Tức là, nếu  $A$  là số chính phương thì  $A = k^2$  ( $k \in \mathbb{N}$ ).

**2. Tính chất**

- Số chính phương có chữ số tận cùng là một trong các số 0; 1; 4; 5; 6; 9, không có chữ số tận cùng là 2; 3; 7; 8.
- Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, số chính phương chỉ chứa các thừa số nguyên tố với số mũ chẵn, không chứa các thừa số nguyên tố với số mũ lẻ.

**Chứng minh**

Giả sử  $A = k^2$  với  $k \in \mathbb{N}$ .

Phân tích  $k$  ra thừa số nguyên tố ta có:  $k = a^x \cdot b^y \cdot c^z \dots$  (trong đó:  $a, b, c, \dots$  là các số nguyên tố đôi một khác nhau và  $x, y, z, \dots \in \mathbb{N}^*$ )

Khi đó:  $A = (a^x \cdot b^y \cdot c^z)^2 = a^{2x} \cdot b^{2y} \cdot c^{2z} \dots$  (đpcm).

Từ tính chất 2 ta có các hệ quả:

- Nếu  $A$  là một số chính phương,  $p$  là số nguyên tố và  $A:p$  thì  $A:p^2$ .
  - Tích của các số chính phương là một số chính phương.
  - $A = a \cdot b$  là số chính phương thì  $a = m \cdot p^2$ ,  $b = m \cdot q^2$ . Đặc biệt, nếu  $a$  là số chính phương thì  $b$  cũng là số chính phương.
- Số các ước của một số chính phương (khác 0) là số lẻ. Ngược lại, một số có số các ước là lẻ thì số đó là số chính phương.

**Chứng minh**

Gọi  $A$  là số tự nhiên khác 0.

- Nếu  $A = 1$  thì  $A$  là số chính phương có một ước.
- Nếu  $A > 1$  thì  $A$  có dạng phân tích ra thừa số nguyên tố là:

$$A = a^x \cdot b^y \cdot c^z \dots \quad (a, b, c, \dots \text{ là các số nguyên tố đôi một khác nhau})$$

$$\Rightarrow \text{Số lượng các ước của } A \text{ là } S = (x+1)(y+1)(z+1) \dots$$

- Nếu  $A$  là số chính phương thì  $x, y, z, \dots$  là các số chẵn, nên  $x+1, y+1, z+1, \dots$  là các số lẻ, do đó  $S$  là số lẻ.
- Đảo lại, nếu  $S$  là số lẻ thì  $(x+1)(y+1)(z+1) \dots$  là số lẻ  $\Rightarrow$  các thừa số  $x+1, y+1, z+1, \dots$  đều là số lẻ  $\Rightarrow x, y, z, \dots$  là các số chẵn.

Đặt  $x = 2x', y = 2y', z = 2z', \dots$  ( $x', y', z', \dots \in \mathbb{N}$ ) thì  $A = (a^{x'} \cdot b^{y'} \cdot c^{z'})^2$  nên  $A$  là số chính phương (đpcm).

- Nếu số  $A$  nằm giữa bình phương của hai số tự nhiên liên tiếp thì  $A$  không thể là số chính phương. Nghĩa là: nếu  $n^2 < A < (n+1)^2$  thì  $A$  không là số chính phương.
- Hai đẳng thức thường dùng:  $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$  (1)

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \quad (2)$$

**Chứng minh**

Chứng minh đẳng thức (1). Ta có:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a^2 + ab) + (ab + b^2) = a(a + b) + b(a + b) = (a + b)(a + b) = (a + b)^2$$

Chứng minh tương tự ta cũng có đẳng thức (2).

**II. MỘT SỐ DẠNG TOÁN ỨNG DỤNG**

**Dạng 1. Kiểm tra một số có phải là số chính phương hay không**

**Ví dụ 1.** Các số sau có phải là số chính phương hay không? Vì sao?

- a)  $A = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{20}$
- b)  $B = 10^{10} + 8$
- c)  $C = 100! + 7$
- d)  $D = 10^{10} + 5$
- e)  $E = 10^{100} + 10^{50} + 1$ .

**Giải**

- a) Ta có  $3^n : 9$  với mọi  $n \geq 2$  nên  $(3^2 + 3^3 + \dots + 3^{20}) : 9$   
 $\Rightarrow A = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{20}$  chia hết cho 3 và chia cho 9 dư 3.  
 Vì A chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9 nên A không phải là số chính phương.
- b) Ta có  $10^{10} + 8$  có chữ số tận cùng là 8 nên B không phải là số chính phương.
- c) Ta có  $100! + 7$  có chữ số tận cùng là 7 nên C không phải là số chính phương.
- d) Ta có  $10^{10} + 5$  có chữ số tận cùng là 5 chia hết cho 5 nhưng không chia hết cho 25 (vì có hai chữ số tận cùng là 05) nên D không phải là số chính phương.
- e) Ta có  $10^{100} + 10^{50} + 1$  có tổng các chữ số là 3 chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9 nên E không phải là số chính phương.

**Ví dụ 2.** Cho  $F = 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{100}$ . Chứng minh rằng  $2F + 3$  không là số chính phương

**Giải**

Ta có:  $F = 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{100}$   
 Nên  $3F = 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{101} \Rightarrow 3F - F = 3^{101} - 3$ .  
 Do đó  $2F + 3 = 3^{101} - 3 + 3 = 3^{101} = 3^{100} \cdot 3 = (3^{50})^2 \cdot 3$  không là số chính phương, vì 3 không phải là số chính phương.

**Ví dụ 3.** Viết liên tiếp từ 1 đến 12 được số  $H = 1234\dots1112$ . Số H có thể có 81 ước được không?

**Giải**

Giả sử H có 81 ước.

Vì số lượng các ước của  $H$  là 81 (là số lẻ) nên  $H$  là số chính phương (1) mặt khác, tổng của các chữ số của  $H$  là:  
 $1+2+3+\dots+9+(1+0)+(1+1)+(1+2)=51$ .

Vì  $51:3$ ;  $51 \not\vdots 9$  nên  $H$  chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9, do đó  $H$  không là số chính phương: mâu thuẫn với (1) !  
 Vậy  $H$  không thể có 81 ước.

**Ví dụ 4.** Chứng minh rằng không tồn tại hai số tự nhiên  $x$  và  $y$  khác 0 sao cho  $x^2 + y$  và  $x + y^2$  là số chính phương.

**Giải**

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử  $x \geq y$ .

Khi đó, ta có:  $x^2 < x^2 + y \leq x^2 + x = x(x+1) < (x+1)^2$

$\Rightarrow x^2 + y$  không thể là số chính phương.

(nếu  $x \leq y$  thì chứng minh tương tự ta có  $x + y^2$  không là số chính phương).

Vậy không tồn tại hai số tự nhiên  $x$  và  $y$  sao cho  $x^2 + y$  và  $x + y^2$  là số chính phương.

**Nhận xét:** để chứng minh số  $A$  không là số chính phương ta thường sử dụng một trong các cách sau:

*Cách 1:* chứng minh chữ số tận cùng của  $A$  là một trong các số 2; 3; 7; 8.

*Cách 2:* chứng minh  $A \vdots p$  (với  $p$  là số nguyên tố) nhưng  $A \not\vdots p^2$

*Cách 3:* chứng minh  $n^2 < A < (n+1)^2$ .

## Dạng 2. Lập số chính phương từ các chữ số đã cho

**Ví dụ 5.** Tìm số chính phương có bốn chữ số là 3, 6, 8, 8.

**Giải**

Gọi  $A$  là số chính phương phải tìm.

Vì số chính phương không tận cùng bằng 3, 8 nên do đó  $A$  phải tận cùng bằng 6.

$\Rightarrow$  hai chữ số tận cùng của  $A$  là 86 hoặc 36.

- Nếu  $A$  có hai chữ số tận cùng là 86 thì  $A$  chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4 nên  $A$  không phải là số chính phương (loại).

- Nếu  $A$  có hai chữ số tận cùng là 36 thì  $A = 8836$ .

Thử lại, ta có:  $8836 = 94^2$  là số chính phương.

Vậy số cần tìm là 8836.

**Ví dụ 6.** Một số tự nhiên gồm một chữ số 0 và sáu chữ số 6 có thể là một số chính phương không?

**Giải**

Gọi  $A$  là số gồm một chữ số 0 và sáu chữ số 6.

- Nếu  $A$  có chữ số tận cùng là 0 thì  $A$  có hai chữ số tận cùng là 60  
 $\Rightarrow A$  chia hết cho 5 nhưng  $A$  không chia hết cho  $5^2 = 25$  (vì  $60 \not\mid 25$ )  
 $\Rightarrow A$  không là số chính phương.
- Nếu  $A$  có chữ số tận cùng là 6  $\Rightarrow A$  có hai chữ số tận cùng là 06 hoặc 66  
 $\Rightarrow A$  chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4, do vậy  $A$  không phải là số chính phương.  
 Vậy  $A$  không phải là số chính phương.

**Ví dụ 7.** Tìm số có hai chữ số, biết rằng nếu nhân nó với 135 thì được một số chính phương.

**Giải**

Gọi số phải tìm là  $n$ , ta có  $135n = a^2$  ( $a \in \mathbb{N}$ ) hay  $3^3 \cdot 5 \cdot n = a^2$ .

Vì số chính phương chỉ chứa các thừa số nguyên tố với số mũ chẵn nên  $n = 3 \cdot 5 \cdot k^2$  ( $k \in \mathbb{N}$ ).

Vì  $n$  là số có hai chữ số nên  $10 \leq 3 \cdot 5 \cdot k^2 \Rightarrow k^2 \in \{1; 4\}$ .

- Nếu  $k^2 = 1$  thì  $n = 15$
- Nếu  $k^2 = 4$  thì  $n = 60$ .

Vậy số cần tìm là 15 hoặc 60.

**Ví dụ 8.** Tìm số chính phương có bốn chữ số sao cho hai chữ số đầu giống nhau, hai chữ số cuối giống nhau.

**Giải**

Gọi số chính phương cần tìm là  $n^2 = \overline{aabb}$  ( $a, b \in \mathbb{N}$  và  $1 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 9$ ).

Ta có  $n^2 = \overline{aabb} = 1100a + 11b = 11(100a + b) = 11(99a + a + b)$  (1)

$\Rightarrow (99a + a + b) : 11 \Rightarrow (a + b) : 11 \Rightarrow a + b = 11$ .

Thay  $a + b = 11$  vào (1) ta được  $n^2 = 11(99a + 11) = 11^2(9a + 1)$ .

$\Rightarrow 9a + 1$  phải là số chính phương

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$9a + 1$	10	19	28	37	46	55	64	73	82

Ta thấy chỉ có  $a = 7$  thì  $9a + 1 = 64 = 8^2$  là số chính phương.

Vậy  $a = 7 \Rightarrow b = 4$  và số cần tìm là:  $7744 = 11^2 \cdot 8^2 = 88^2$ .

### Dạng 3. Toán chứng minh

**Ví dụ 9.** Chứng minh rằng tích của bốn chữ số tự nhiên liên tiếp cộng 1 là một số chính phương.

**Chứng minh**

Gọi bốn số tự nhiên liên tiếp là  $a, a + 1, a + 2, a + 3$  ( $a \in \mathbb{N}$ )

$$\begin{aligned}
 \text{Xét } T &= a(a+1)(a+2)(a+3)+1 \\
 &= [a(a+3)][(a+1)(a+2)]+1 \\
 &= (a^2+3a)(a^2+3a+2)+1
 \end{aligned}$$

Đặt  $x = a^2 + 3a$ , ta có:

$$T = x(x+2)+1 = x^2 + 2x+1 = (x+1)^2 \text{ hay } T = (a^2 + 3a + 1)^2.$$

Vậy  $T$  là số chính phương (đpcm)

**Nhận xét:**

- Trong ví dụ trên ta không chỉ biết được  $T$  là một số chính phương mà còn biết được nó còn là bình phương của số nào.

Chẳng hạn:

- $1.2.3.4+1 = 25 = 5^2$
- $2.3.4.5+1 = 121 = 11^2$
- $3.4.5.6+1 = 361 = 19^2$
- $4.5.6.7+1 = 841 = 29^2$

Thay  $a+b=11$  vào (1) ta được  $n^2 = 11(9a+11) = 11^2(9a+1)$ .

$\Rightarrow 9a+1$  là số chính phương.

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9a+1	10	19	28	37	46	55	64	73	82

Ta thấy chỉ có  $a = 7$  thì  $9a+1 = 64 = 8^2$  là số chính phương.

Vậy  $a = 7 \Rightarrow b = 4$  và số cần tìm là :  $7744 = 11^2.8^2 = 88^2$ .

### Dạng 3. Toán chứng minh

**Ví dụ 9.** Chứng minh rằng tích của bốn số tự nhiên liên tiếp cộng 1 là một số chính phương.

#### Chứng minh

Gọi bốn số tự nhiên liên tiếp là  $a, a+1, a+2, a+3$  ( $a \in \mathbb{N}$ ).

Xét  $T = a(a+1)(a+2)(a+3)+1$

$$= [a(a+3)][(a+1)(a+2)]+1$$

$$= (a^2 + 3a)(a^2 + 3a + 2) + 1$$

Đặt  $x = a^2 + 3a$ , ta có :

$$T = x(x+2)+1 = x^2 + 2x+1 = (x+1)^2 \text{ hay } T = (a^2 + 3a + 1)^2.$$

Vậy  $T$  là số chính phương (đpcm).

**Nhận xét :**

- Trong ví dụ trên ta không chỉ biết được  $T$  là một số chính phương mà còn biết được nó còn là bình phương của số nào.

Chẳng hạn :

a)  $1.2.3.4+1=25=5^2$

$2.3.4.5+1=121=11^2$

$3.4.5.6+1=361=19^2$

$4.5.6.7+1=841=29^2$

b) Biểu thức sau đây là bình phương của số tự nhiên nào?

- $10.11.12.13+1=?$

Vì  $a=10$  nên  $a^2+3a+1=10^2+3.10+1=131$ .

Do vậy  $10.11.12.13+1=131^2$

- $15.16.17.18+1=?$

Vì  $a=15$  nên  $a^2+3a+1=15^2+3.15+1=271$ .

Do vậy  $10.11.12.13+1=271^2$ .

- Cũng từ ví dụ trên ta còn suy ra hai kết quả sau:

1) Tích của bốn số tự nhiên chẵn liên tiếp cộng 16 là một số chính phương .

2) Tích của bốn số tự nhiên lẻ liên tiếp cộng 16 là một số chính phương .

**Ví dụ 10.** Chứng minh rằng tổng của bốn số tự nhiên liên tiếp không là số chính phương

**Giải**

Gọi bốn số tự nhiên liên tiếp là  $a; a+1; a+2; a+3$  (với  $a \in \mathbb{N}$  )

Ta xét :  $S = a + (a+1) + (a+2) + (a+3) = 4a + 6$

Vì  $4a:2$  và  $6:2$  nên  $S:2$  . Mặt khác vì  $4a:4$  và  $6$  không chia hết cho 4 nên S không chia hết cho 4

→S chia hết cho 2 nhưng S không chia hết cho 4 , do vậy S không là số chính phương .

**?Có thể em chưa biết ?**

**1.Sự tuần hoàn của một số chính phương**

Quan sát các chữ số tận cùng của bình phương các số từ 1 đến 9 ta thấy xuất hiện dãy số 1,4,9,6 ,5,6,9,4,1 .Bình phương của 10 là 100, có chữ số tận cùng là 0.Bình phương của các số tiếp theo cũng có các chữ số tận cùng lập thành dãy số 1,4,9,6,5,6,9,4,1 ( gọi là vòng tuần hoàn ). Tất cả bình phương của các số tự nhiên có chữ số tận cùng lặp đi lặp lại trong vòng tuần hoàn này ( ranh giới lặp lại là số 0 ).

Người ta còn phát hiện “ số gốc “của các số chính phương chỉ có thể là 1,4,7,9 mà không thể là các chữ số khác .Người ta gọi “ số gốc “ của một số là chỉ số thu được khi cộng dần các

chữ số có trong con số, nếu tổng lớn hơn 9 thì lại tính tổng các chữ số của tổng và lặp lại cho đến khi tổng có được nhỏ hơn 9. Chữ số còn lại này gọi là “số gốc” của số đã xét (hiểu theo cách khác là lấy tổng các chữ số của số đó đem chia cho 9, số dư của phép chia đó gọi là số gốc). Như vậy “số gốc” chính

là kết quả phép tính cộng dồn các chữ số có trong một con số, lấy số 9 làm điểm dừng.

Ví dụ : “số gốc” của 135 là 9, “số gốc” của 246 là 3.....

Ứng dụng tính chất vừa nêu trên ta có thể nhận biết một số có phải là số chính phương hay không.

Ví dụ : Xét xem số 98765432123456789 có phải là một số chính phương hay không ?

Ta tìm số gốc của con số trên:

*Cách 1 :*

$$\begin{aligned} & 9+8+7+6+5+4+3+2+1+2+3+4+5+6+7+8+9 \\ & = 9+9+(8+1)+2(7+2)+2(6+3)+2(5+4)+8 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  số gốc là 8.

*Cách 2 :*

$$\begin{aligned} & 9+8+7+6+5+4+3+2+1+2+3+4+5+6+7+8+9 \\ & = (9+8+7+6+5+4+3+2+1)+(2+3+4+5+6+7+8+9) \\ & = 45+44=89 \end{aligned}$$

Vì  $8+9=17$  ;  $1+7=8 \Rightarrow$  số gốc là 8

(Hoặc 89 chia cho 9 dư 8  $\Rightarrow$  số gốc là 8)

Vì số gốc là 8 khác 1,4,7,9 nên số A không là số chính phương.

Số gốc của các số chính phương còn lập thành một dãy số tuần hoàn 1,4,9,7,7,9,4,1. Ở đây chữ số ranh giới là chữ số 9 chứ không phải là chữ số 0 như tính chất ở trên.

Ví dụ :

- 100 (bình phương của 10) có số gốc là 1
- 121 (bình phương của 11) có số gốc là 4
- 144 (bình phương của 12) có số gốc là 9
- 169 (bình phương của 13) có số gốc là 7
- 196 (bình phương của 14) có số gốc là 7
- 225 (bình phương của 15) có số gốc là 9
- 256 (bình phương của 16) có số gốc là 4

289 (bình phương của 17 ) có số gốc là 1

324(bình phương của 18 ) có số gốc là 9 (ranh giới của chu kì )

361( bình phương của 19 ) có số gốc là 1 (bắt đầu lặp lại )

.....

## 2.Sự kì lạ của số lẻ

Ta có :  $1+3=4=2^2$

$$1+3+5=9=3^2$$

$$1+3+5+7=16=4^2$$

$$1+3+5+7+9=25=5^2$$

$$1+3+5+7+9+11=36=6^2$$

$$1+3+5+7+9+11+13=49=7^2$$

.....

⇒ Tổng n số lẻ đầu tiên là một số chính phương:

$$1+3+5+\dots+(2n+1)=(n+1)^2 .$$

## 3.Tổng lập phương lại là số chính phương

Khẳng định sau đúng hay sai : “ Tổng lập phương các số tự nhiên liên tiếp từ 1 là một số chính phương “?

Ta dễ dàng kiểm tra bằng máy tính như sau :

$$1^3+2^3=9=3^2$$

$$1^3+2^3+3^3=36=6^2$$

$$1^3+2^3+3^3+4^3=100=10^2$$

$$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3=225=15^2$$

$$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3=441=21^2$$

$$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3=784=28^2$$

Mặt khác ta lại có :



$$\begin{aligned}
 1+2 &= 3 \\
 1+2+3 &= 6 \\
 1+2+3+4 &= 10 \\
 1+2+3+4+5 &= 15 \\
 1+2+3+4+5+6 &= 21 \\
 1+2+3+4+5+6+7 &= 28 \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

Đến đây ta tìm ra được quy luật :  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1+2+\dots+n)^2$

### III. BÀI TẬP

**1.100.** Chứng tỏ rằng các số sau không là số chính phương :

a)  $\overline{abab}$

b)  $\overline{abcabc}$

**1.101.** Cho  $A = 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{20}$ . Chứng minh rằng  $A+4$  không là số chính phương.

**1.102.** Chứng tỏ rằng tổng sau không là số chính phương :  $S = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ .

**1.103.** Cho bốn chữ số 0,2,3,4. Tìm số chính phương có bốn chữ số gồm cả bốn số trên.

**1.104.a)** Cho một số tự nhiên gồm 15 chữ số 2. Có cách nào viết thêm các chữ số 0 vào vị trí tùy ý để số mới tạo thành là một số chính phương hay không?

b) Một số tự nhiên gồm một chữ số 1, hai chữ số 2, ba chữ số 3, bốn chữ số 4, có thể là một số chính phương hay không ?

**1.105.** Viết liên tiếp các số tự nhiên từ 1 đến 101 thành một số A.

a) A có là hợp số hay không ?

b) A có là số chính phương hay không ?

c) A có thể có 35 ước hay không ?

**1.106.** Từ năm chữ số 1,2,3,4,5, hãy lập tất cả các số có năm chữ số gồm cả năm chữ số trên.

Trong các số lập được, có số nào là số chính phương hay không ?

**1.107.** Tìm số tự nhiên n có hai chữ số, biết rằng  $2n+1$  và  $3n+1$  là các số chính phương.

**1.108.** Tìm số tự nhiên n có hai chữ số, biết rằng nếu nhân nó với 45 thì ta được một số chính phương.

**1.109.** Tìm số nguyên tố  $\overline{ab} (a > b > 0)$  sao cho  $\overline{ab} - \overline{ba}$  là số chính phương.

**1.110.a)** Các số tự nhiên  $n$  và  $2n$  có tổng các chữ số bằng nhau. Chứng minh rằng  $n$  chia hết cho 9

b) Tìm số chính phương  $n$  có ba chữ số, biết rằng  $n$  chia hết cho 5 và nếu nhân  $n$  với 2 thì tổng các chữ số của nó không đổi.

**1.111.** Tìm số tự nhiên có hai chữ số, sao cho nếu cộng nó với số có hai chữ số ấy viết theo chiều ngược lại thì ta được một số chính phương.

**1.112.** Tìm số chính phương có bốn chữ số, biết rằng: các chữ số hàng trăm, hàng nghìn, hàng chục, hàng đơn vị theo thứ tự đó làm thành bốn số tự nhiên liên tiếp tăng dần.

**1.113.** Tìm số chính phương có bốn chữ số, biết rằng chữ số hàng nghìn bằng chữ số hàng đơn vị và số chính phương đó được viết dưới dạng  $(5n+4)^2$ , với  $n \in \mathbb{N}$ .

**1.114.** Cho số tự nhiên A gồm 100 chữ số 1, số tự nhiên B gồm 50 chữ số 2. Chứng minh rằng A-B là một số chính phương.

**1.115.** Có hay không có một số chính phương mà số đó gồm 1995 chữ số 1 và các chữ số còn lại là chữ số 0?

**1.116.** Tìm số tự nhiên  $n$  sao cho tổng sau là một số chính phương :

$$S = 1! + 2! + 3! + \dots + n!$$

**Chuyên đề nâng cao 2. NGUYỄN LÍ DIRICHLET**

**I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ**

**1. Nội dung nguyên lí**

Nếu nhót  $n.m+r$  (trong đó  $m,n,r \in \mathbb{N}^*$ ) con thỏ vào  $n$  cái chuồng thì phải có ít nhất một chuồng chứa không ít hơn  $m+1$  con thỏ.

**Chứng minh**

Giả sử ngược lại mỗi chuồng chứa không quá  $m$  con thỏ thì tổng số thỏ nhót trong  $n$  chuồng sẽ không quá  $m.n$  con thỏ :Mâu thuẫn với giả thiết là số thỏ bằng  $m.n+r$ . Vậy phải có ít nhất một chuồng chứa không ít hơn  $m+1$  con thỏ.

**2. Nhận xét**

Bản thân nguyên lí Dirichlet khá đơn giản và dễ hiểu, tuy nhiên việc ứng dụng nguyên lí này lại không hề đơn giản. Vấn đề ở đây là phát hiện ra “**chất Dirichlet**” trong các bài toán, dạng toán của mình và sau đó xác định trong đó đâu là chuồng và đâu là thỏ. Có những trường hợp chuồng và thỏ gần như đã có sẵn, nhưng có những trường hợp chúng ta phải “**xây chuồng, tạo thỏ**”.

**II. MỘT SỐ DẠNG TOÁN ỨNG DỤNG**

**1. Toán chia hết**

Khi chia số  $a$  cho số  $m \neq 0$  luôn có  $m$  khả năng về số dư là  $0, 1, \dots, m-1$  (“ $m$  chuồng”). Do vậy, khi chia  $m+1$  số khác nhau  $a_1, a_2, \dots, a_{m+1}$  cho  $m$  ta sẽ có  $m+1$  số dư (“ $m+1$  thỏ”) và do đó luôn có hai phép chia có cùng số dư. Giả sử hai số bị chia trong hai phép chia đó là  $a_i$  và  $a_j$  (với  $1 \leq j < i \leq m+1$ ). Ta có  $(a_i - a_j) : m$ .

**Ví dụ 1.** Chứng minh rằng có thể tìm được một số có dạng  $19781978\dots197800\dots0$  chia hết cho 2012.

**Giải**

Xét dãy số :  $1978, 19781978, \dots, \underbrace{19781978\dots1978}_{2013 \text{ số } 1978}$ . Khi chia các số hạng của dãy này cho 2012 sẽ

có hai phép chia có cùng số dư. Giả sử hai số hạng của dãy trong hai phép chia đó là  $a = \underbrace{19781978\dots1978}_{m \text{ số } 1978}$  và  $b = \underbrace{19781978\dots1978}_{n \text{ số } 1978}$  ( với  $1 \leq n < m \leq 2013$  ).

$\Rightarrow$  Hiệu của  $a$  và  $b$  chia hết cho 2012 hay

$$a - b = \underbrace{19781978\dots1978}_{m-n \text{ số } 1978} \underbrace{00\dots0}_{4n \text{ số } 0} : 2012 \text{ (đpcm)}$$

**Nhận xét :** Phương pháp để giải dạng toán này là tạo ra dãy số ( theo cấu tạo số ) từ yêu cầu của bài toán (“tạo thử” ). Sau đó áp dụng nguyên lí Dirichlet cho các số hạng của dãy số mới (mỗi số hạng thay cho một “thử”, 2012 là số “chuông”).

**Ví dụ 2.** Cho dãy  $m$  số tự nhiên bất kì  $a_1, a_2, \dots, a_m$  . Chứng minh rằng tồn tại một số hạng chia hết cho  $m$  hoặc tổng của một số hạng liên tiếp trong dãy chia hết cho  $m (m \in \mathbb{N}^*)$  .

**Giải**

Xét dãy số  $b_1 = a_1, b_2 = a_1 + a_2, \dots, b_m = a_1 + a_2 + \dots + a_m$

Khi chia các số hạng của dãy này cho  $m$  thì xảy ra một trong hai trường hợp sau :

- Có một phép chia hết , chẳng hạn :  $b_k : m$  , thì ta có điều phải chứng minh :  $(a_1 + a_2 + \dots + a_k) : m$
- Không có phép chia hết nào. Khi đó tồn tại hai phép chia có cùng số dư, chẳng hạn là  $b_i, b_j$  chia cho  $m$  ( với  $1 \leq j < i \leq m$  )

$\Rightarrow (b_i - b_j) : m$  hay  $(a_{j+1} + a_{j+2} + \dots + a_i) : m$  , ta có điều phải chứng minh .

**Nhận xét :** Phương pháp “tạo thử “ trong ví dụ này là dựa vào phép toán cộng và yêu cầu về tính liên tiếp của các số hạng trong dãy ban đầu của đề bài .

**Ví dụ 3.** Cho bốn số tự nhiên phân biệt  $a > b > c > d$  .

Chứng minh rằng :  $P = (a - b)(a - c)(a - d)(b - c)(b - d)(c - d) : 12$

**Giải**

Chia bốn số phân biệt  $a, b, c, d$  cho 3 luôn có hai phép chia có cùng số dư

$\Rightarrow$  Hiệu hai số bị chia đó chia hết cho 3  $\Rightarrow$  tồn tại hiệu hai số trong bốn số  $a, b, c, d$  chia hết cho 3.

Do vậy P chia hết cho 3. (1)

Trong bốn số  $a, b, c, d$  nếu có hai số có cùng số dư khi chia cho 4 thì P chia hết cho 4; trái lại, khi chia bốn số đó cho 4 có đủ bốn trường hợp về số dư là  $0, 1, 2, 3 \Rightarrow$  trong bốn số  $a, b, c, d$  có hai số chẵn , hai số lẻ , giả sử  $a, c$  chẵn và  $b, d$  lẻ  $\Rightarrow (a - c) : 2$  và  $(b - d) : 2$

Do vậy P chia hết cho 4 (2)

Từ (1),(2) và (3,4)=1 suy ra  $P : 3, 4$  hay  $P : 12$  (đpcm)

**Ví dụ 4.** Chứng minh rằng trong 19 số tự nhiên liên tiếp bất kì ta luôn tìm được một số có tổng các chữ số chia hết cho 10.

**Giải**

Trong 19 số tự nhiên liên tiếp luôn tồn tại 10 số tự nhiên liên tiếp có chữ số hàng chục giống nhau kí hiệu chữ số hàng chục đó là  $a$  (các chữ số hàng trăm, hàng nghìn, .... (nếu có) cũng giống nhau) còn các chữ số hàng đơn vị là dãy  $0; 1; 2; 3; \dots; 9$ . Do đó tổng các chữ số của mỗi số cũng là một dãy 10 số tự nhiên liên tiếp, vì thế tồn tại số có tổng các chữ số chia hết cho 10.

**2. Toán suy luận**

**Ví dụ 5.** Có 10 đội bóng thi đấu với nhau vòng tròn một lượt, mỗi đội phải đấu đúng một trận với mỗi đội khác. Chứng minh rằng vào bất cứ lúc nào cũng có hai đội đã đấu số trận như nhau.

**Giải**

Rõ ràng nếu trong 10 đội bóng có 1 đội chưa đấu một trận nào thì trong các đội còn lại không có đội nào đã thi đấu 9 trận. Như vậy mỗi đội chỉ có số trận đấu hoặc từ 0 đến 8 hoặc từ 1 đến 9. Vậy theo nguyên lí Dirichlet phải có ít nhất hai đội có số trận đã đấu như nhau.

**Ví dụ 6.** Trong 45 học sinh làm bài kiểm tra không có ai bị điểm dưới 2 và chỉ có 2 học sinh được điểm 10. Chứng minh rằng ít nhất cũng tìm được 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau (điểm kiểm tra là một số tự nhiên từ 0 đến 10).

**Giải**

Số học sinh có điểm kiểm tra từ 2 đến 9 là :  $45 - 2 = 43$

Ta có :  $43 = 8 \cdot 5 + 3$

Như vậy, khi phân chia 43 học sinh vào 8 loại điểm kiểm tra (từ 2 đến 9) thì theo nguyên lí Dirichlet luôn tồn tại ít nhất  $5 + 1 = 6$  học sinh có điểm kiểm tra giống nhau (*đpcm*)

**Ví dụ 7.** Có 17 nhà Toán học viết thư cho nhau trao đổi về 3 vấn đề khoa học, mỗi người đều trao đổi với 16 người còn lại và mỗi cặp 2 người chỉ trao đổi với nhau một vấn đề. Chứng minh rằng có ít nhất 3 nhà Toán học trao đổi với nhau về cùng một vấn đề.

**Giải**

Gọi A là một nhà Toán học nào đó trong 17 nhà Toán học thì A phải trao đổi với 16 người còn lại về 3 vấn đề khoa học (kí hiệu là vấn đề I, II, III).

Vì  $16 = 3 \cdot 5 + 1$  nên A phải trao đổi với ít nhất  $5 + 1 = 6$  nhà Toán học khác về cùng một vấn đề (theo nguyên lí Dirichlet).

Gọi 6 nhà Toán học cùng trao đổi với A về một vấn đề (chẳng hạn là vấn đề 1) là  $A_1, A_2, \dots, A_6$ . Ta thấy 6 nhà Toán học này lại trao đổi với nhau về 3 vấn đề nên có hai khả năng xảy ra:

1) Nếu có 2 nhà Toán học nào đó cùng trao đổi với nhau về vấn đề I thì cùng với A sẽ có 3 nhà Toán học cùng trao đổi về vấn đề I.

2) Nếu không có 2 nhà Toán học nào cùng trao đổi với nhau về vấn đề I, thì 6 nhà Toán học này chỉ trao đổi với nhau về 2 vấn đề II và III. Theo nguyên lí Dirichlet, có ít nhất 3 nhà Toán học cùng trao đổi với nhau về một vấn đề (II hoặc III).

Vậy luôn có ít nhất 3 nhà Toán học trao đổi với nhau về cùng một vấn đề.

**Nhận xét:** Trong ví dụ trên ta đã phải phân chia bài toán thành hai lớp và sử dụng hai lần nguyên lí Dirichlet: Lần thứ nhất với 16 thỏ và 3 chuồng; lần thứ hai với 6 thỏ và 2 chuồng.

### III. BÀI TẬP

**1.117.** Chứng minh rằng tồn tại một số tự nhiên gồm toàn chữ số 1 chia hết cho 2013.

**1.118.** Cho 5 số tự nhiên phân biệt  $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5$ . Xét tích:

$$P = (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_1 - a_5)(a_2 - a_3)(a_2 - a_4)(a_2 - a_5)(a_3 - a_4)(a_3 - a_5)(a_4 - a_5)$$

Chứng minh rằng  $P \vdots 228$

**1.119.** Chứng minh rằng trong  $n+1$  số bất kì thuộc tập hợp  $\{1; 2; 3; \dots; 2n\}$  luôn tìm được hai số mà Số này là bội của số kia.

**1.120.** Xét 100 số tự nhiên  $0 < a_1, a_2, \dots, a_{100} \leq 100$  và có tổng bằng 200. Chứng minh rằng trong 100 số đó luôn tồn tại một vài số có tổng bằng 100.

**1.121.** Cho 69 số tự nhiên khác 0 phân biệt và không vượt quá 100. Chứng minh rằng có thể chọn được 4 số trong 69 số đó thỏa mãn tổng của ba số bằng số còn lại.

**1.122.** Chứng minh rằng trong 39 số tự nhiên liên tiếp bất kì luôn có ít nhất một số có tổng các chữ số chia hết cho 11.

**1.123.** Cho 15 số tự nhiên phân biệt, khác 0, không lớn hơn 28. Chứng minh rằng trong 15 số đó luôn tìm được ít nhất một bộ 3 số mà số này bằng tổng của hai số còn lại hoặc một cặp 2 số mà số này gấp đôi số kia.

**1.124.** Chọn bất kì  $n+1$  số trong  $2n$  số tự nhiên từ 1 đến  $2n$  ( $n > 1$ ). Chứng minh rằng trong các số được chọn có ít nhất một số bằng tổng của 2 số được chọn (kể cả các trường hợp 2 số hạng của tổng bằng nhau).

**1.125.** Chọn 5 người bất kì. Chứng minh rằng có ít nhất 2 người có cùng số người quen trong 5 người đó.

- 1.126.** Chứng minh rằng trong  $n$  người bất kì ( $n \geq 2$ ), tồn tại hai người có số người quen như nhau (kể cả trường hợp quen 0 người).
- 1.127.** Có 6 đội bóng thi đấu với nhau vòng tròn một lượt, mỗi đội đấu đúng một trận với mỗi đội khác. Chứng minh rằng vào bất cứ thời điểm nào cũng có ba đội trong đó từng cặp đã đấu với nhau hoặc chưa đấu với nhau trận nào.

## Chương II. SỐ NGUYÊN

### Chuyên đề 1. TẬP HỢP CÁC SỐ NGUYÊN

#### I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

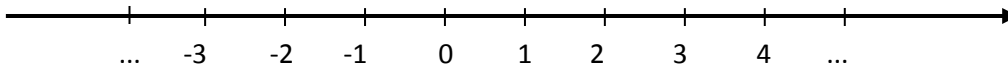
##### 1. Kiến thức cơ bản

a) Tập hợp các số nguyên:

Tập hợp  $\{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$  gồm có số 0, các số 1; 2; 3; ... (số nguyên dương) và các số -1; -2; -3; ... (số nguyên âm) được gọi là tập hợp các số nguyên, kí hiệu là  $\mathbb{Z}$ .

**Nhận xét:** Mọi số tự nhiên đều là số nguyên hay  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ .

b) Trục số nguyên:



Điểm biểu diễn số nguyên  $a$  trên trục gọi là điểm  $a$ .

c) Số đối:

Trên trục số, hai điểm -2 và 2 cách đều điểm gốc 0 về hai phía. Ta nói -2 và 2 là hai số đối nhau. Số đối của  $a$  kí hiệu là  $-a$ .

d) Thứ tự trong  $\mathbb{Z}$ :

Trên trục số, điểm  $a$  nằm bên trái điểm  $b$  thì  $a < b$  hay  $b > a$ .

Ta luôn có: Số nguyên âm  $< 0 <$  số nguyên dương.

Với hai số nguyên  $a, b$  bất kì ta luôn có hoặc  $a < b$ , hoặc  $a = b$ , hoặc  $a > b$ .

Nếu  $a$  lớn hơn  $b$  hoặc  $a = b$  thì ta viết  $a \geq b$ .

Với  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ , nếu  $a < b$  và  $b < c$  thì  $a < c$  (tính chất bắc cầu).

e) Giá trị tuyệt đối của số nguyên  $a$ , kí hiệu là  $|a|$ , là khoảng cách từ điểm  $a$  đến gốc 0.

• Nếu  $a = 0$  thì  $|a| = 0$ .

• Nếu  $a > 0$  thì  $|a| = a$ .

• Nếu  $a < 0$  thì  $|a| = -a$ .

**Nhận xét:** Với mọi  $a \in \mathbb{Z}$ , ta có:  $|a| \geq 0$ .



$$|-a| = |a|.$$

## 2. Nâng cao

a) Khi ta nói  $x < -2$  hoặc  $x > 3$  thì ta viết  $\begin{cases} x < -2 \\ x > 3 \end{cases}$

còn khi nói  $x > -1$  và  $x \leq 4$  thì ta viết  $\begin{cases} x > -1 \\ x \leq 4 \end{cases}$ .

b) Với  $a \geq 0$  và  $|x| = a$  thì ta suy ra  $x = a$  hoặc  $x = -a$ .

c) Với  $a \in \mathbb{Z}$  và  $|x| = |a|$  thì suy ra  $x = a$  hoặc  $x = -a$ .

d) Nếu  $a < b < 0$  thì  $|a| > |b|$ .

## II. MỘT SỐ VÍ DỤ

**Ví dụ 1.** Cho tập hợp  $A = \{-3; 2; 0 - 1; 5; 7\}$ .

- Viết tập hợp B gồm các phần tử là số đối của các phần tử trong tập hợp A.
- Viết tập C gồm các phần tử thuộc tập hợp A và là số dương.
- Xác định quan hệ giữa các tập hợp A, C,  $\mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{Z}$ .

### Giải

a) Số đối của số -3 là 3; của số 2 là -2; của số 0 là 0; ...

$$\text{Vậy } B = \{3; -2; 0; 1; -5; -7\}.$$

b) Có 3 phần tử của tập hợp A là số nguyên dương, đó là: 2; 5; 7.

$$\text{Vậy } C = \{2; 5; 7\}.$$

c) Ta có:  $C \subset A \subset \mathbb{Z}$  và  $C \subset \mathbb{N}^* \subset \mathbb{Z}$ .

**Nhận xét:** Số đối của  $-a$  là  $a$ . Vậy số đối của  $-a$  lại là  $a$ , tức là:  $-(-a) = a$ .

$\mathbb{N}^*$  là tập hợp các số nguyên dương. Ta kí hiệu:  $\mathbb{Z}^*$  là tập hợp các số nguyên khác 0,  $\mathbb{Z}_+$  là tập hợp các số nguyên không âm (lớn hơn hoặc bằng 0),  $\mathbb{Z}_-$  là tập hợp các số

nguyên không dương (nhỏ hơn hoặc bằng 0)  $\Rightarrow Z_+^*$  là tập hợp các số nguyên dương.

Vậy  $Z_+^* = N^*$ .

**Ví dụ 2.** Khẳng định sau là đúng hay sai? Nếu  $a > b$  thì  $|a| > |b|$ .

**Giải**

Khẳng định “Nếu  $a > b$  thì  $|a| > |b|$ ” là sai.

Chẳng hạn: Với  $a = 3$ ;  $b = -7$  thì  $a > b$ , tuy nhiên, vì  $|a| = 3$ ;  $|b| = |-7| = 7$  nên  $|a| < |b|$ .

**Nhận xét:** Để chứng tỏ một khẳng định nào đó là sai, ta chỉ cần đưa ra một ví dụ cụ thể nào đó mà khẳng định sai. Ví dụ như thế được gọi là phản ví dụ.

**Ví dụ 3:** Tìm  $x, y \in \mathbb{Z}$ , biết:

a)  $|x| + |-3| = 5$ .

b)  $|x| + |y| = 1$ .

**Giải**

a) Ta có:  $|-3| = 3$ .

Do đó:  $|x| + 3 = 5 \Rightarrow |x| = 5 - 3 \Rightarrow |x| = 2 \Rightarrow x = 2$  hoặc  $x = -2$ .

Đôi khi ta viết gộp là:  $x = \pm 2$ .

b) Vì  $|x| \geq 0$  và  $|y| \geq 0$  nên ta có hai trường hợp:

- $|x| = 1$  và  $|y| = 0$  :

Ta có:  $|x| = 1 \Rightarrow x = 1$  hoặc  $x = -1$ .

$$|y| = 0 \Rightarrow y = 0.$$

- $|x| = 0$  và  $|y| = 1$  :

Ta có:  $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$

$$|y| = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ hoặc } y = -1.$$

Vậy bài toán trên có bốn đáp số sau đây:



**2.2.** Khẳng định sau đúng hay sai? Nếu sai hãy sửa lại cho đúng.” Nếu  $a \in \mathbb{Z}$  thì  $|a| \in \mathbb{N}^*$  “.

**2.3.** Tìm các giá trị thích hợp của chữ số  $a$  sao cho:

a)  $\overline{a00} > 801$ .      b)  $-560 < \overline{-56a}$  .      c)  $\overline{-a99} > -649 > \overline{-6a0}$  .

**2.4.** Hãy viết số nguyên âm:

- a) Nhỏ nhất có một chữ số.
- b) Lớn nhất có một chữ số.
- c) Nhỏ nhất có 10 chữ số khác nhau.
- d) Lớn nhất có 10 chữ số khác nhau.

**2.5.** Chứng tỏ rằng: Với mọi số nguyên  $a$ , ta đều có:  $|a| \geq a$  .

**2.6.** Chứng tỏ rằng: Với  $a \in \mathbb{N}$  và  $|x| = a$  thì suy ra  $x = a$  hoặc  $x = -a$ .

**2.7.** Chứng tỏ rằng: Với  $a \in \mathbb{N}$  và  $|x| = |a|$  thì suy ra  $x = a$  hoặc  $x = -a$ .

**2.8.** Tìm  $x \in \mathbb{Z}$  , biết:

a)  $|x| + |-23| = |+17|$  .

b)  $|-5| \cdot |x| = |-20|$  .

**2.9.** Tìm  $x \in \mathbb{Z}$  , biết:

a)  $|x| = |-14|$  và  $x > 0$  .

b)  $|x| = |23|$  và  $x < 0$  .

**2.10.** Tìm  $x \in \mathbb{Z}$  , biết:

a)  $|x| < -5$  .

b)  $12 \leq |x| < 15$  .

**2.11.** Cho các tập hợp:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x \leq 7\}; B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 3 \leq x < 7\}; C = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| > 5\} .$$

Hãy tìm các tập hợp:  $A \cap B$ ;  $B \cap C$ ;  $C \cap A$ .

**2.12.** Tìm  $x, y \in \mathbb{Z}$  , biết:

a)  $|x| + |y| = 0$  ;

b)  $|x| + |y| = 2$  .

**2.13.** Cho  $x \in \mathbb{Z}$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = |x| + 7$ .

**2.14.** Cho  $x \in \mathbb{Z}$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $Q = 9 - |x|$ .

## **Chuyên đề 2. PHÉP CỘNG VÀ PHÉP TRỪ CÁC SỐ NGUYÊN**

### **I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ**

#### **1. Kiến thức cơ bản**

a) Để cộng hai số nguyên cùng dấu, ta cộng hai giá trị tuyệt đối của chúng rồi đặt trước kết quả dấu của chúng.

b) Cộng hai số nguyên khác dấu:

Nếu hai số đối nhau thì tổng của chúng bằng 0.

Nếu hai số không đối nhau thì ta tính hiệu hai giá trị tuyệt đối (số lớn trừ số nhỏ) và đặt trước kết quả dấu của số có giá trị tuyệt đối lớn hơn.

c) Hiệu của hai số nguyên  $a$  và  $b$  là tổng của  $a$  với số đối của  $b$ :  $a - b = a + (-b)$ .

d) Tính chất của phép cộng số nguyên: Với mọi số nguyên  $a, b$  và  $c$ , ta có:

• Tính chất giao hoán:  $a + b = b + a$ .

• Tính chất kết hợp:  $a + (b + c) = (a + b) + c$ .

• Cộng với số 0:  $a + 0 = 0 + a = a$ .

• Cộng với số đối:  $a + (-a) = 0$ .

#### **2. Nâng cao**

a) Với hai số nguyên  $a$  và  $b$ , ta có:  $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$ ;  $a \leq b \Leftrightarrow a - b \leq 0$ .

b) Giá trị tuyệt đối của một tổng hai số nguyên nhỏ hơn hoặc bằng tổng các giá trị tuyệt đối của chúng:  $|a + b| \leq |a| + |b|$ , với mọi  $a, b \in \mathbb{Z}$  và  $|a + b| = |a| + |b|$  khi và chỉ khi  $a$  và  $b$  cùng dấu hoặc khi  $a = 0$ , hoặc khi  $b = 0$ .

c) Giá trị tuyệt đối của một hiệu hai số nguyên lớn hơn hoặc bằng hiệu các giá trị tuyệt đối của chúng:  $|a - b| \geq |a| - |b|$ , với mọi  $a, b \in \mathbb{Z}$  và  $|a - b| = |a| - |b|$  khi và chỉ khi  $a \geq b \geq 0$  hoặc  $a \leq b \leq 0$ .

### **II. MỘT SỐ VÍ DỤ**

#### **Dạng 1. Chứng minh các tính chất**

**Ví dụ 1.** Chứng tỏ rằng  $a - b$  và  $b - a$  là hai số đối nhau.

*Giải*

Để chứng minh  $a - b$  và  $b - a$  là hai số đối nhau ta chứng minh tổng của chúng bằng 0.

Thật vậy:  $(a - b) + (b - a) = [a + (-b)] + [b + (-a)] = [a + (-a)] + [b + (-b)] = 0$ .

Vậy  $a - b$  và  $b - a$  là hai số đối nhau.

**Nhận xét:** Từ kết quả trên ta suy ra:  $-(a - b) = b - a$  và  $|a - b| = |b - a|$ .

**Ví dụ 2.** Chứng tỏ rằng: Số đối của một tổng hai số bằng tổng hai số đối của chúng.

**Giải**

Xét hai số nguyên  $a, b$ . Số đối của tổng  $a$  và  $b$  là:  $-(a + b)$  và tổng hai số đối của chúng là:  $(-a) + (-b)$ .

Để chứng minh  $(-a) + (-b)$  là số đối của  $a + b$ , ta chứng minh tổng của chúng bằng 0.

Thật vậy:  $[(-a) + (-b)] + [a + b] = [a + (-a)] + [b + (-b)] = 0$ .

Vậy:  $-(a + b) = (-a) + (-b)$ .

**Nhận xét:** Tương tự ta cũng có: Số đối của một hiệu hai số bằng hiệu hai số đối của chúng. Tức là:  $-(a - b) = (-a) - (-b)$ .

## Dạng 2. Tính giá trị của biểu thức

**Ví dụ 3.** Tính hợp lí:  $P = (-123) + 77 + (-257) + 23 - 43$ .

**Giải**

Ta có:  $P = (-123) + 77 + (-257) + 23 + (-43)$ .

Cách 1:

$$\begin{aligned} P &= [(-123) + (-257) + (-43)] + [77 + 23] \\ &= (-423) + 100 = -323. \end{aligned}$$

Cách 2:

$$\begin{aligned} P &= [(-123) + 23] + [(-257) + (-43)] + 77 \\ &= (-100) + (-300) + 77 \\ &= (-400) + 77 = -323. \end{aligned}$$

**Nhận xét:**

- Việc chuyển từ phép trừ về phép cộng là để ta có thể áp dụng các tính chất của phép cộng như giao hoán, kết hợp. Điều này giúp ta tính toán thuận lợi hơn.

- Ở cách 1, ta đã cộng các số cùng dấu với nhau trước. Cách này có ưu điểm là hạn chế việc nhầm dấu.
- Ở cách 2, ta kết hợp từng nhóm có tổng là các số tròn trăm. Cách này có ưu điểm là có thể nhầm ra kết quả.

**Ví dụ 4.** Tính hợp lý :  $Q = 48 + |48 - 174| + (-74)$ .

**Giải**

Cách 1:

$$Q = 48 + |-126| + (-74) = 48 + 126 - 74 = 100.$$

Cách 2:

$$\text{Vì } 48 - 174 < 0 \text{ nên } |48 - 174| = -(48 - 174) = 174 - 48.$$

Do đó:

$$Q = 48 + 174 - 48 + (-74) = (48 - 48) + (174 - 74) = 0 + 100 = 100.$$

**Nhận xét:** Trong cách 2, ta đã sử dụng tính chất đã chứng minh ở trên để bỏ dấu ngoặc. Sau khi bỏ dấu giá trị tuyệt đối, ta kết hợp thành từng nhóm có kết quả là số trong trăm. Dùng cách này ta có thể nhầm được kết quả.

### Dạng 3. Tìm số chưa biết

**Ví dụ 5.** Tìm chữ số a, biết:  $(-\overline{a5}) + (-85) = -150$ .

**Giải**

Áp dụng quy tắc cộng hai số nguyên cùng dấu, ta có:

$$(-\overline{a5}) + (-85) = -(\overline{a5} + 85)$$

$$\text{Suy ra: } -(\overline{a5} + 85) = -150 \text{ hay } \overline{a5} + 85 = 150 \Rightarrow \overline{a5} = 150 - 85 = 65.$$

Vậy  $a = 6$ .

**Ví dụ 6.** Tìm  $x \in \mathbb{Z}$ , biết:

a)  $|x - 1| + (-3) = 17$

b)  $|-x| - (-4) = 3$ .

**Giải**



a) Ta có:  $|x - 1| + (-3) = 17$

$$\Leftrightarrow |x - 1| = 17 - (-3)$$

$$\Leftrightarrow |x - 1| = 17 + 3 = 20$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = \pm 20$$

Ta có hai trường hợp:

- Nếu  $x - 1 = 20$  thì  $x = 20 + 1 = 21$
- Nếu  $x - 1 = -20$  thì  $x = (-20) + 1 = -19$ .

Vậy  $x \in \{21; -19\}$ .

b) Ta có:  $|-x| - (-4) = 3$

$$\Leftrightarrow |-x| = 3 + (-4)$$

$$\Leftrightarrow |-x| = -1$$

Vì  $|-x| \geq 0$  và  $-1 < 0$  nên không có giá trị nào của  $x$  để  $|-x| = -1$ .

**Ví dụ 7.** Cho  $x$  và  $y$  là hai số nguyên cùng dấu thỏa mãn  $|x| + |y| = 12$ . Tính

$x + y$  **Giải**

Vì  $x$  và  $y$  cùng dấu nên ta có:  $|x| + |y| = |x + y|$ .

Do đó:  $|x + y| = 12$ .

Vì  $12 > 0$  nên ta có hai trường hợp:  $x + y = 12$  và  $x + y = -12$ .

Vậy  $x + y = \pm 12$ .

**Nhận xét:**

Vì  $x$  và  $y$  cùng dấu nên ta có thể chia làm hai trường hợp:

- $x$  và  $y$  cùng dương: Khi đó:  $|x| = x$ ,  $|y| = y$  và do đó ta có  $x + y = 12$ .
- $x$  và  $y$  cùng âm: Khi đó:  $|x| = -x$ ,  $|y| = -y$  và do đó ta có  $(-x) + (-y) = 12$ .

Vì  $(-x) + (-y) = -(x + y)$ , nên  $-(x + y) = 12$ . Tức là số đối của  $x + y$  bằng 12. Suy ra  $x + y = -12$ .

Vậy  $x + y = \pm 12$ .

### III. BÀI TẬP

**2.15.** Tính hợp lí:

a)  $(-57) + (-159) + 47 + 169.$

b)  $-2012 + (-596) + (-201) + (+496) + 301.$

**2.16.** Tìm giá trị của biểu thức:

a)  $x + (-37)$ , biết  $x = -13.$

b)  $|x| + (-78)$ , biết  $x = -86.$

**2.17.** Tính  $x - y$ , biết rằng:  $|x| = 20$  và  $|y| = 12$ .

**2.18.** Tính tổng các số nguyên  $x$ , biết rằng:

a)  $-15 \leq x < 17.$

b)  $|x| < 35.$

**2.19.** Tìm chữ số  $a$ , biết rằng:

a)  $37 + (\overline{-5a}) = -20$

b)  $(\overline{-a9}) + 45 = 26.$

**2.20.** Tìm  $x \in \mathbb{Z}$ , biết:

a)  $x + (-45) = (-62) + 17$

b)  $x + 29 = |-43| + (-43)$

**2.21.** Tìm  $x \in \mathbb{Z}$ , biết rằng:

a)  $x + 23$  là số nguyên âm lớn nhất

b)  $x + 99$  là số nguyên âm nhỏ nhất có hai chữ số

**2.23.** Tìm  $x \in \mathbb{Z}$ , biết:

a)  $(-1) + 3 + (-5) + 7 + \dots + x = 600$

b)  $2 + (-4) + 6 + (-8) + \dots + (-x) = -2000$

**2.24.** Tìm  $x \in \mathbb{Z}$ , biết rằng:  $9 \leq |x - 3| < 11$

**2.25.** Tìm giá trị nguyên lớn nhất và nhỏ nhất của  $x$  sao cho:

$$1986 < |x + 2| < 2012$$

**2.26.** Cho 31 số nguyên. Hỏi tổng của 31 số nguyên đó là một số như thế nào nếu:

a) Tổng của 3 số bất kì trong chúng là 1 số nguyên âm?

b) Tổng của 3 số bất kì trong chúng là một số nguyên dương?

Kết quả trên còn đúng không nếu thay số 31 bằng số 32?

**2.27.** Trên bảng của một lớp học có viết các số: 1; 2; 3; ... ; 2011; 2012; 2013. Một học sinh tiến hành một công việc như sau: Xóa hai số bất kì trong các số đó rồi viết thay vào giá trị tuyệt đối của hiệu hai số đã xóa, sau đó lặp lại công việc trên cho đến khi trên bảng chỉ còn lại một số. Chứng tỏ rằng số cuối cùng còn lại không thể là số 0.

### Chuyên đề 3. QUY TẮC DẤU NGOẶC VÀ QUY TẮC CHUYỂN VÉ

#### I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

##### 1. Kiến thức cơ bản

- Quy tắc dấu ngoặc:

Khi bỏ dấu ngoặc có dấu “-” đằng trước, ta phải đổi dấu tất cả các số hạng trong dấu ngoặc: dấu “+” đổi thành dấu “-” và dấu “-” đổi thành dấu “+”

$$-(a - b + c) = -a + b - c$$

Khi bỏ dấu ngoặc có dấu “+” đằng trước, ta giữ nguyên dấu của các số hạng trong dấu ngoặc.

$$+(a - b + c) = a - b + c$$

- Quy tắc chuyển vế: Khi chuyển vế một số hạng từ vế này sang vế kia của một đẳng thức ta phải đổi dấu số hạng tử đó: dấu “+” đổi thành “-” và dấu “-” đổi thành dấu “+”

$$a - b = c + d \Leftrightarrow a = c + d + b \Leftrightarrow a - c = b + d$$

##### 2. Nâng cao

- Quy tắc chuyển vế vẫn đúng đối với bất đẳng thức:

$$a - b < c + d \Leftrightarrow a < c + d + b \Leftrightarrow a - c < b + d$$

- Tổng đại số: Một dãy các phép tính cộng, trừ các số nguyên gọi là một *tổng đại số*. Trong một tổng đại số, ta có thể:

Thay đổi tùy ý vị trí của một số hạng kèm theo dấu của chúng.

Đặt dấu ngoặc để nhóm các số hạng một cách tùy ý; với chú ý rằng: Nếu trước dấu ngoặc là dấu “-” thì phải đổi dấu tất cả các số hạng trong ngoặc.

$$a - b - c + d = a - (b + c - d)$$

#### II. MỘT SỐ VÍ DỤ

##### Dạng 1. Tính hoặc rút gọn các biểu thức

**Ví dụ 1.** Tính hợp lí:

a)  $P = 54 + (-37 + 10 - 54 + 67)$

b)  $Q = 1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + \dots - 79 - 80 + 81$

**Giải**

- a) Áp dụng quy tắc bỏ dấu ngoặc, ta có:

$$P = 54 - 37 + 10 - 54 + 67$$

Áp dụng tính chất của tổng đại số, ta có:

$$P = (54 - 54) + (-37 + 67) + 10$$

$$= 0 + 30 + 10$$

$$= 40$$

b) Áp dụng quy tắc đặt dấu ngoặc, ta có:

$$Q = 1 + (2 - 3 - 4 + 5) + (6 - 7 - 8 + 9) + \dots + (78 - 79 - 80 + 81)$$

$$= 1 + 0 + 0 + \dots + 0$$

$$= 1$$

**Nhận xét:** Ở câu b) ta có những cách đặt dấu ngoặc khác, chẳng hạn:

$$Q = 1 + (2 - 3) + (-4 + 5) + (6 - 7) + (-8 + 9) + \dots + (78 - 79) + (-80 + 81)$$

$$= 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots + (-1) + 1 = 1$$

**Ví dụ 2.** Cho  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . Rút gọn biểu thức sau:

$$P = (a + b - c) + (a - b) - (a - b - c)$$

**Giải**

Áp dụng quy tắc bỏ dấu ngoặc, ta có:  $P = a + b - c + a - b - a + b + c$

Áp dụng tính chất của tổng đại số, ta có:

$$P = (a - a) + (b - b) + (-c + c) + a + b$$

$$= 0 + 0 + 0 + a + b = a + b$$

Vậy  $P = a + b$

### **Dạng 2. Chứng minh**

**Ví dụ 3.** Chứng tỏ rằng:

$$(a - b) - (b + c) + (c - a) - (a - b - c) = -(a + b - c)$$

**Giải**

Ta có:

Vế trái  $= a - b - b - c + c - a - a + b + c$  (quy tắc bỏ dấu ngoặc)

$$= (a - a) + (-b + b) + (-c + c) - b - a + c \text{ (tính chất của tổng đại số)}$$

$$\Rightarrow \text{Vế trái} = 0 + 0 + 0 - a - b + c = -a - b + c$$

Áp dụng quy tắc đặt dấu ngoặc, ta có:

$$\text{Vế trái} = -(a + b - c) = \text{Vế phải}$$

$$\text{Vậy } (a - b) - (b + c) + (c - a) - (a - b - c) = -(a + b - c)$$

**Ví dụ 4.** Cho  $a, b, c \in \mathbb{N}$  và  $a \neq 0$ . Chứng tỏ rằng biểu thức P luôn âm, biết rằng:

$$P = a(b-a) - b(a-c) - bc$$

**Giải**

Vì  $a, b, c \in \mathbb{N}$  nên áp dụng tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng và phép trừ, ta có:

$$a(b-a) = a.b - a.a = ab - a^2; b(a-c) = ba - bc = ab - bc$$

Do đó:  $P = (ab - a^2) - (ab - bc) - bc$

$$= ab - a^2 - ab + bc - bc \quad (\text{quy tắc bỏ dấu ngoặc})$$

$$= (ab - ab) + (bc - bc) - a^2$$

$$= 0 + 0 - a^2$$

$$= -a^2$$

Vì  $a \neq 0$  nên  $a^2 > 0$ , do đó số đối của  $a^2$  nhỏ hơn, hay:  $-a^2 < 0$

Vậy  $P < 0$ , tức là P luôn có giá trị âm.

**Dạng 3. Tìm x**

**Ví dụ 5.** Tìm  $x \in \mathbb{Z}$ , biết:

a)  $(-x + 31) - 39 = -69 + 11$

b)  $-129 - (35 - x) = 55$

**Giải**

a) Áp dụng quy tắc bỏ dấu ngoặc, ta có:

$$-x + 31 - 39 = -69 + 11$$

$$\Leftrightarrow -x = -69 + 11 - 31 + 39 \quad (\text{quy tắc chuyển vế})$$

$$\Leftrightarrow -x = (-69 + 39) + (11 - 31) \quad (\text{tính chất của tổng đại số})$$

$$\Leftrightarrow -x = -30 + (-20)$$

$$\Leftrightarrow -x = -50$$

$$\Leftrightarrow x = 50$$

Vậy  $x = 50$

b) Áp dụng quy tắc bỏ dấu ngoặc, ta có:

$$-29 - 35 + x = 55 \quad (\text{quy tắc chuyển vế})$$

$$\Leftrightarrow x = 55 + 29 + 35 \quad (\text{tính chất kết hợp})$$

$$\Leftrightarrow x = (55 + 35) + 29$$

$$\Leftrightarrow x = 90 + 35$$

$$\Leftrightarrow x = 219$$

Vậy  $x = 219$

**Nhận xét:**

Ta có thể rút gọn riêng các số ở mỗi vế rồi mới thực hiện chuyển vế, chẳng hạn ở câu a):

$$-x + 31 - 39 = -69 + 11$$

$$\Leftrightarrow -x - 8 = -58$$

$$\Leftrightarrow x = -8 + 58 = 50$$

Tuy nhiên cách làm này không khai thác được tính chất của tổng đại số để tính nhẩm như lời giải ở trên.

**Ví dụ 6.** Tìm  $x \in \mathbb{Z}$ , biết:

a)  $(-37) - |7 - x| = -127$

b)  $|x - 14| + (-6) < -4$

**Giải**

a) Áp dụng quy tắc chuyển vế, ta có:

$$(-37) + 127 = |7 - x| \Leftrightarrow 90 = |7 - x| \Leftrightarrow 7 - x = \pm 90$$

Ta có hai trường hợp:

- Nếu  $7 - x = 90$  thì  $x = 7 - 90 = -83$
- Nếu  $7 - x = -90$  thì  $x = 7 + 90 = 97$

Vậy  $x \in \{-83; 97\}$

b) Áp dụng quy tắc chuyển vế, ta có:

$$|x - 14| < -4 - (-6)$$

$$\Leftrightarrow |x - 14| < -4 + 6 \text{ hay } |x - 14| < 2$$

Suy ra:  $|x - 14| \in \{0; 1\}$

+ Nếu  $|x - 14| = 0$  thì  $x - 14 = 0 \Rightarrow x = 14$

+ Nếu  $|x - 14| = 1 \Leftrightarrow x - 14 = \pm 1$

- Nếu  $x - 14 = 1$  thì  $x = 1 + 14 = 15$
- Nếu  $x - 14 = -1$  thì  $x = -1 + 14 = 13$

Vậy  $x \in \{13; 14; 15\}$

### III. BÀI TẬP

**2.28.** Tính hợp lí:

a)  $(326 - 43) + (174 - 57)$

b)  $(351 - 875) - (125 - 149)$

c)  $-418 - \{-218 - [-118 - (318) + 2012]\}$

**2.29.** Tính hợp lí:

a)  $(-2) + 7 + (-12) + 17 + \dots + (-52) + 57$

b)  $(-30) + (-29) + \dots + 48 + 49 + 50$

**2.30.** Rút gọn các biểu thức sau:

a)  $M = (71 + x) - (-24 - x) + (-35 - x)$

b)  $N = x - 34 - [(15 + x) - (23 - x)]$

c)  $P = (-15 + |x|) + (25 - |-x|)$

**2.31.** Cho  $x < y < 0$  và  $|x| - |y| = 100$ . Tính  $x - y$

**2.32.** Cho  $x \in \mathbb{Z}$ . Hãy bỏ dấu giá trị tuyệt đối rồi rút gọn các biểu thức sau:

a)  $|x - 3| + x - 5$  với  $x < 3$

b)  $|2 + x| - (x + 1)$  với  $x \geq -2$

c)  $|x + 1| + |x - 2|$  với  $-1 \leq x \leq 2$

**2.33.** Cho  $a - b = 1$ . Tính S, biết rằng:

$$S = -(a - b - c) + (-c + b + a) - (a + b)$$

**2.34.** Chứng minh các đẳng thức sau:

a)  $(a - b) + (c - d) - (a + c) = -(b + d)$

b)  $(a - b) - (c - d) + (b + c) = a + d$

**2.35.** Cho  $P = a - b + c$ ;  $Q = -a + b - c$ , với  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . Chứng tỏ rằng P và Q là hai số đối nhau.

**2.36.** Viết tất cả các số nguyên có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn 100 theo một thứ tự bất kì. Sau đó cứ mỗi số cộng với thứ tự của nó sẽ được một tổng. Hãy tính tổng tất cả các số tổng nhận được.

**2.37.** Tìm  $x \in \mathbb{Z}$ , biết:



a)  $43 + (9 - 21) = 317 - (x + 317)$

b)  $(15 - x) + (x - 12) = 7 - (-5 + x)$

c)  $x - \{57 - [42 + (-23 - x)]\} = 13 - \{47 + [25 - (32 - x)]\}$

**2.38.** Tìm  $x \in \mathbb{Z}$ , biết:

a)  $-7 + |x - 4| = -3$

b)  $13 - |x + 5| = 13$

c)  $|x - 10| - (-12) = 4$

**2.39.** Tìm  $x \in \mathbb{Z}$ , biết:

a)  $|x + 2| \leq 5$

b)  $|x + 1| > 2$

**2.40.** Tìm  $x \in \mathbb{Z}$ , biết:

a)  $|x - 1| - x + 1 = 0$

b)  $|2 - x| + 2 = x$

c)  $|x - 40| + |x - y + 10| \leq 0$

**2.42.** Cho  $x, y \in \mathbb{Z}$

a) Với giá trị nào của  $x$  thì biểu thức  $A = 1001 - |x + 9|$  có giá trị lớn nhất? Tìm giá trị đó.

b) Với giá trị nào của  $y$  thì biểu thức  $B = |y - 2| + 34$  có giá trị nhỏ nhất? Tìm giá trị đó.

## Chuyên đề 4. PHÉP NHÂN HAI SỐ NGUYÊN

### I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### 1. Kiến thức cơ bản

a) Quy tắc nhân:  $a, b \in \mathbb{Z}$

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

Nếu a và b cùng dấu thì  $a \cdot b = |a| \cdot |b|$

Nếu a và b trái dấu thì  $a \cdot b = -|a| \cdot |b|$

**Chú ý:**

+ Nếu  $a \cdot b = 0$  thì hoặc  $a = 0$ , hoặc  $b = 0$

+ Nếu đổi dấu một thừa số thì tích đổi dấu

+ Nếu đổi dấu hai thừa số thì tích không đổi

b) Tính chất của phép nhân:

Các tính chất giao hoán, kết hợp, nhân với 1 số, tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng các số tự nhiên đều có thể mở rộng cho phép nhân hai số nguyên.

**Chú ý:**

+ Phép nhân số nguyên cũng có tính chất phân phối đối với phép trừ:

$$a(b - c) = ab - ac$$

+ Nếu số thừa số âm chẵn thì tích là số dương. Nếu số thừa số âm lẻ thì tích là số âm.

#### 2. Nâng cao

a) Lũy thừa bậc chẵn của một số âm là một số dương, lũy thừa bậc lẻ của một số âm là một số âm:  $a < 0 \Rightarrow a^{2n} > 0$  và  $a^{2n+1} < 0$

b) Tính chất của bất đẳng thức:

$$a < b \Leftrightarrow ac < bc, \text{ nếu } c > 0$$

$$a \geq b \Leftrightarrow ac \leq bc, \text{ nếu } c < 0$$

c) Giá trị tuyệt đối của một tích bằng tích các giá trị tuyệt đối:  $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

### II. MỘT SỐ VÍ DỤ

#### Dạng 1: Tính hoặc rút gọn biểu thức

**Ví dụ 1.** Tính hợp lí:

a)  $A = (135 - 35) \cdot (-47) + 53 \cdot (-48 - 52)$

$$b) B = 25.(75 - 49) + 75.|25 - 49|.$$

**Giải**

$$\begin{aligned} a) \text{ Ta có: } A &= 100.(-47) + 53.(-100) \\ &= (-100).47 + (-100).53 \quad (\text{đổi dấu hai thừa số}) \\ &= (-100).(47 + 53) \quad (\text{đặt thừa số chung}) \\ &= (-100).100 \\ &= -10000. \end{aligned}$$

$$b) \text{ Vì } 25 - 49 < 0 \text{ nên } |25 - 49| = -(25 - 49) = 49 - 25$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } B &= 25.(75 - 49) + 75.(49 - 25) \\ &= 25.75 - 25.49 + 75.49 - 75.25 \quad (\text{Tính chất phân phối}) \\ &= (25.75 - 75.25) + (-25.49 + 75.49) \\ &= 0 + 49.(-25 + 75) \quad (\text{đặt thừa số chung}) \\ &= 49.50 \\ &= 2450. \end{aligned}$$

**Nhận xét:**

Hai cách tính ở câu a) và câu b) là khác nhau: Trong khi ở câu a) ta thực hiện phép tính trong ngoặc trước thì ở câu b) ta lại áp dụng tính chất phân phối để nhân phá ngoặc. Mục đích của sự thay đổi trình tự tính toán này là để tạo ra các thừa số chung, các số tròn chục, tròn trăm ... giúp ta có thể tính nhanh được.

**Ví dụ 2.** Bỏ dấu ngoặc rồi rút gọn biểu thức sau:

$$P = (a - 1)(b - 2) - (ab + 2)$$

**Giải:**

Áp dụng tính chất phân phối của phép nhân đối với phép trừ, ta có:

$$x(b - 2) = x.b + x.2$$

Thay  $x = a - 1$ , ta có:

$$(a - 1)(b - 2)$$

$$= (a-1).b - (a-1).2$$

$$= (ab - b) - (2a - 2)$$

$$= ab - b - 2a + 2.$$

Do vậy:  $P = ab - b - 2a + 2 - ab - 2$

$$= (ab - ab) + (2 - 2) - 2a - b$$

$$= -2a - b.$$

Vậy:  $P = -2a - b.$

### Dạng 2. Tìm số chưa biết

**Ví dụ 3:** Tìm  $x \in \mathbb{Z}$ , biết:

$$a) (x+2)(3-x) = 0$$

$$b) (2x-5)^2 = 9.$$

$$c) (1-3x)^3 = -8.$$

**Giải:**

a) Áp dụng :  $a.b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$  ta có:

$$(x+2)(3-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ 3-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=3 \end{cases}$$

Vậy:  $x \in \{-2; 3\}$

b) Ta có :

$$(2x-5)^2 = 3^2 \Leftrightarrow 2x-5 = \pm 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5=3 \\ 2x-5=-3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=8 \\ 2x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=1. \end{cases}$$

Vậy  $x \in \{1; 4\}$

c) Vì  $(-2)^3 = -8$  nên  $(1-3x)^3 = (-2)^3 \Leftrightarrow 1-3x = -2$

$$\Leftrightarrow 1+2 = 3x \Leftrightarrow 3 = 3x \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy  $x = 1$

**Nhận xét:**

Trong ví dụ trên ta đã sử dụng tính chất so sánh hai lũy thừa cùng số mũ của số nguyên sau đây:

$$x^{2n} = a^{2n} \Leftrightarrow x = \pm a$$

$$x^{2n+1} = a^{2n+1} \Leftrightarrow x = a$$

**Ví dụ 4.** Tìm  $x \in \mathbb{Z}$ , biết  $(x+3)(x-2) < 0$

**Giải**

Vì  $(x+3)(x-2) < 0$  nên suy ra  $x+3$  &  $x-2$  là hai số trái dấu.

Mặt khác:  $(x+3) - (x-2) = x+3-x+2 = 5 > 0$  nên  $x+3 > x-2$ .

$$\text{Do vậy: } x-2 < 0 < x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 < 0 \\ x+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > -3 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < x < 2.$$

Vì  $x \in \mathbb{Z}$  nên  $x \in \{-2; -1; 0; 1\}$

**Nhận xét:** Trong lời giải trên ta đã sử dụng tính chất được suy ra từ quy tắc chuyển vế sau đây:

$$a > b \Leftrightarrow a - b > 0.$$

Ngoài ra, từ  $a$  và  $b$  trái dấu, ta có thể chia hai trường hợp:

$$a > 0 \& b < 0$$

$$a < 0 \& b > 0.$$

**Ví dụ 5.** Tìm  $a, b \in \mathbb{Z}$ , biết:  $a.b = 12$  và  $a + b = -7$

**Giải:**

Vì  $a.b > 0$  nên hai số  $a$  và  $b$  cùng dấu, mà  $a + b < 0$  nên suy ra  $a$  và  $b$  cùng âm.

$$\text{Do đó: } a.b = 12 = (-1).(-12) = (-2).(-6) = (-3).(-4)$$

Trong các trường hợp đó chỉ có:  $(-3) + (-4) = -7$

Vậy ta có hai đáp số là:  $a = -3; b = -4$  hoặc  $a = -4; b = -3$ .

### III. BÀI TẬP

**2.43.** Tính hợp lí:

a)  $(-8).25.(-2).4.(-5).125$

b)  $(-167).83 + 167.(-17) - 33$

**2.44.** Tính giá trị của biểu thức:

a)  $A = 5a^3b^8$  với  $a = -1; b = 1$

b)  $B = -9a^4b^2$  với  $a = -1; b = 2$

**2.45.** Tính giá trị của biểu thức

a)  $ax + ay + bx + by$  biết  $a + b = -3; x + y = 17$

b)  $ax - ay + bx - by$  biết  $a + b = -7; x - y = -18$

**2.46.** Cho  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . Chứng minh rằng:  $a(c - b) - b(-a - c) = c(a + b)$

**2.47.** Tìm  $x \in \mathbb{Z}$ , biết:

a)  $3(2 - x) + 5(x - 6) = -98$

b)  $(x + 7)(8 - x) = 0$

**2.48.** Tìm  $x \in \mathbb{Z}$ , biết:

a)  $(x^2 + 1)(49 - x^2) = 0$

b)  $(|x| + 2)(6 - 2|x|) = 0$

**2.49.** Tìm  $x \in \mathbb{Z}$ , biết:

a)  $(x - 2)(7 - x) > 0$

b)  $(x^2 - 13)(x^2 - 17) < 0$

**2.50.** Tìm  $x \in \mathbb{Z}$ , biết:

a)  $|6x - 13| = 15$

b)  $|7x - 2| \leq 19$

**2.51.** Tìm  $x, y \in \mathbb{Z}$ , biết:

a)  $x \cdot y = -28$

b)  $(2x - 1)(4y + 2) = -42$

**2.52.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:  $P = -(x + 1)^2 - |3 - y| + 35$

**2.53.** Cho 79 số nguyên trong đó tích của 6 số bất kì là một số âm. Chứng minh rằng tích của tất cả 79 số đó là một số dương.

**2.54.** Tìm  $x, y \in \mathbb{Z}$ , biết:

a)  $x + xy + y = 9$

*(Đề thi tuyển vào lớp 10, Đại học Khoa học Tự nhiên, năm 2002)*

b)  $xy - 2x - 3y = 5$

## *Chuyên đề 5. BỘI VÀ ƯỚC CỦA MỘT SỐ NGUYÊN*

### I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### 1. Kiến thức cơ bản

a) *Định nghĩa:* Cho  $a, b \in \mathbb{Z}$  và  $b \neq 0$

Nếu có số nguyên  $q$  sao cho  $a = b \cdot q$  thì ta nói  $a$  chia hết cho  $b$ , kí hiệu là  $a : b$ . Khi đó ta còn nói  $a$  là bội của  $b$  và  $b$  là ước của  $a$ .

**Chú ý:**

+ Số 0 là bội của mọi số nguyên khác 0

+ Số 0 không là ước của bất kì số nguyên nào

+ Các số 1 và  $-1$  là ước của mọi số nguyên  $\mathbb{Z}$

+ Nếu  $c$  vừa là ước của  $a$ , vừa là ước của  $b$  thì  $c$  gọi là *ước chung* của  $a$ . Nếu  $c$  vừa là *bội* của  $a$ , vừa là *bội* của  $b$  thì  $c$  gọi là *bội chung* của  $a$  và  $b$ .

b) *Tính chất chia hết trong  $\mathbb{Z}$*

- Nếu  $a : b$  và  $b : c$  thì  $a : c$
- Nếu  $a : b$  và  $a \cdot m : b$  ( với  $m \in \mathbb{Z}$  )
- Nếu  $a : c$  và  $b : c$  thì  $(a \pm b) : c$

#### 2. Nâng cao

a) Các tính chất khác về chia hết ( hay chia dư) đối với số tự nhiên vẫn đúng với số nguyên

b) Nếu số  $a$  có  $m$  ước tự nhiên thì sẽ có thêm  $m$  ước là các số nguyên âm (là các số đối của các ước tự nhiên). Vậy  $a$  có  $2m$  ước nguyên.

### II. MỘT SỐ VÍ DỤ

**Ví dụ 1:** Tìm tất cả các ước chung của  $-12$  và  $30$ .

*Giải*

Tập hợp các ước của  $-12$  và  $30$  là:

$$U(-12) = U(12) = \{-12; -6; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 6; 12\}$$

Hoặc viết gộp:  $U(-12) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 12\}$

$$U(30) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 5; \pm 6; \pm 10; \pm 15; \pm 30\}.$$

Suy ra tập hợp các ước chung của  $-12$  và  $30$  là:

$$ƯC(-12;30) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}.$$

**Nhận xét:**

Ước chung của  $-12$  và  $30$  là ước chung của  $ƯCLN(12,30) = 6$ , nên:

$$ƯC(-12,30) = Ư(6)$$

**Ví dụ 2.** Tìm  $x \in \mathbb{Z}$  sao cho:

a)  $x - 5$  là bội của  $x + 2$ .

b)  $x - 2$  là ước của  $3x + 5$ .

**Giải**

a) Vì  $x - 5 = (x + 2) - 7$  nên  $(x - 5) : (x + 2) \Leftrightarrow 7 : (x + 2)$

Suy ra:  $x + 2 \in Ư(7) = \{\pm 1; \pm 7\}$ .

Ta có bảng giá trị sau:

$x + 2$	$-7$	$-1$	$1$	$7$
$x$	$-9$	$-3$	$-1$	$5$

Vậy  $x \in \{-9; -3; -1; 5\}$ .

b) Vì  $3x + 5 = (3x - 6) + 11 = 3(x - 2) + 11$

nên  $(3x + 5) : (x - 2) \Leftrightarrow 11 : (x - 2)$ .

Suy ra:  $x - 2 \in Ư(11) = \{\pm 1; \pm 11\}$ .

Ta có bảng giá trị sau:

$x - 2$	$-11$	$-1$	$1$	$11$
$x$	$-9$	$1$	$3$	$13$

Vậy  $x \in \{-9; -1; 3; -13\}$

**Nhận xét:**

Ta có thể giải bài toán trên theo cách đã học ở chương I. Chẳng hạn, đối với câu b). ta có:

Vì  $(3x + 5) : (x - 2)$  và  $3(x - 2) : (x - 2)$

Nên  $[(3x + 5) - 3(x - 2)] : (x - 2)$

$\Leftrightarrow (3x + 5 - 3x + 6) : x - 2$

$\Leftrightarrow 11 : (x - 2)$ .



Sau đó tiếp tục lập luận tương tự như trên.

**Ví dụ 3.** Cho  $x, y \in \mathbb{Z}$ . Chứng minh:  $6x + 11y$  là bội của 31 khi và chỉ khi  $x + 7y$  là bội của 31.

**Giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } (6x + 11y) - 6(x + 7y) &= 6x + 11y - 6x - 42y \\ &= (6x - 6y) + (11y - 42y) \\ &= -31y : 31 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra: } (6x + 11y) : 31 &\Leftrightarrow 6(x + 7y) : 31 \text{ (tính chất chia hết của một tổng)} \\ &\Leftrightarrow (x + 7y) : 31 \text{ (vì 6 và 31 nguyên tố cùng nhau).} \end{aligned}$$

Vậy  $6x + 11y$  là bội của 31 khi và chỉ khi  $x + 7y$  là bội của 31.

**Nhận xét:**

Cách giải trên gọi là phương pháp “khử x”: Ta thấy số thứ nhất có số hạng  $6x$ , số thứ hai có số hạng  $x$ . Vậy để triệt tiêu hết  $x$ , ta nhân 6 vào số thứ hai và xét hiệu với số thứ nhất.

Tương tự, ta cũng có phương pháp “khử” :

$$7(6x + 11y) - 11(x + 7y) = 42x + 77y - 11x - 77y = 31x : 31.$$

Sau đó lập luận tương tự như trên.

### III. BÀI TẬP

**2.55.** Tìm tập hợp các bội chung của 12 và  $-30$ .

**2.56.** Tìm tập hợp các ước chung của  $-60; 45; -105$ .

**2.57.** Với  $n \in \mathbb{Z}$ , các số sau là chẵn hay lẻ ?

a)  $(3n - 4)(3n + 19)$ .

b)  $n^2 - n + 1$ .

**2.58.** Tìm các số nguyên  $a$ , biết:

a)  $a + 2$  là ước của 7.

b)  $2a$  là ước của  $-10$ .

c) 12 là bội của  $2a + 1$ .

**2.59.** Chứng minh rằng nếu  $a \in \mathbb{Z}$  thì:

a)  $P = a(a + 2) - a(a - 5) - 7$  là bội của 7.

b)  $Q = (a - 2)(a + 3) - (a - 3)(a + 2)$  là số chẵn.

**2.60.** Tìm  $x, y \in \mathbb{Z}$ , biết:

a)  $(2x - 1)(y - 4) = -13$ .

b)  $(5x + 1)(y - 1) = 4$ .

c)  $5xy - 5x + y = 5$ .

**2.61.** Cho  $x, y \in \mathbb{Z}$ . Chứng minh rằng:  $5x + 47y$  là bội của 17 khi và chỉ khi  $x + 6y$  là bội của 17.

**2.62.** Tìm  $x \in \mathbb{Z}$  sao cho:

a)  $x - 4$  là bội của  $x - 1$ .

b)  $2x - 1$  là ước của  $3x + 2$ .

**2.63.** Tìm  $x \in \mathbb{Z}$  sao cho:

a)  $x^2 + 2$  là bội của  $x + 2$ .

b)  $x - 1$  là ước của  $x^2 - 2x + 3$ .

**2.64.** Chứng minh rằng với mọi  $a \in \mathbb{Z}$  ta có:

a)  $(a - 1)(a + 2) + 12$  không là bội của 9.

b) 49 không là ước của  $(a + 2)(a + 9) + 21$ .

*Chuyên đề nâng cao. ĐỒNG DƯ*

**I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ**

**1. Phép chia với số dư âm**

Chia số nguyên  $a$  cho số nguyên  $b > 0$  ta được:

$$a = b.q + r \text{ với } 0 \leq r \leq b - 1.$$

- Nếu  $r = 0$  thì  $a$  chia hết cho  $b$  (kí hiệu là  $a : b$ ) hay  $a$  là bội của  $b$  ( $a \in B(b)$ ), hay  $b$  là ước của  $a$  ( $b \in U(a)$ ).
- Nếu  $r \neq 0$  thì phép chia  $a$  cho  $b$  là phép chia có dư.
- Số dư  $r$  có thể chọn là số nguyên âm.

*Ví dụ:* Chia 19 cho 4, ta có:  $19 = 4.4 + 3$  (thương là 4, dư 3)

$$\text{Hoặc } 19 = 4.5 - 1 \text{ (thương là 5, dư } -1).$$

\* **Nhận xét :** Việc sử dụng số dư âm giúp ta có thể lựa chọn số dư có giá trị tuyệt đối nhỏ.

Trong trường hợp tổng quát :  $a = b.q + r$ , ta có:

- Nếu  $b$  chẵn thì  $r \in \left\{ -\frac{b}{2} + 1; -\frac{b}{2} + 2; \dots; 0; 1; \dots; \frac{b}{2} \right\}$ .
- Nếu  $b$  lẻ thì  $r \in \left\{ -\frac{b-1}{2}; -\frac{b-3}{2}; \dots; 0; 1; \dots; \frac{b-1}{2} \right\}$ .

*Ví dụ :* Khi chia một số cho 6 thì số dư có thể là  $-2; -1; 0; 1; 2; 3$ .

Khi chia một số cho 5 thì số dư có thể là  $-2; -1; 0; 1; 2$ .

**2. Đồng dư**

**2.1. Định nghĩa**

Cho  $a, b$  là các số nguyên và  $n$  là số nguyên dương. Ta nói  $a$  đồng dư với  $b$  theo môđun  $n$ , kí hiệu là  $a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow (a - b) : n$ .

*Nhận xét:* Nếu  $a$  chia  $b$  dư  $r$  thì  $a \equiv r \pmod{b}$ .

**2.2. Tính chất:** Với mọi  $a, b, c, n \in \mathbb{Z}$  và  $n > 0$ , ta có:

- a)  $a \equiv a \pmod{n}$
- b)  $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow b \equiv a \pmod{n}$
- c)  $a \equiv b \pmod{n}, b \equiv c \pmod{n} \Rightarrow a \equiv c \pmod{n}$
- d)  $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm c \pmod{n}$
- e)  $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{n}$
- f)  $ac \equiv bc \pmod{n}$  và  $(c, n) = 1 \Rightarrow a \equiv b \pmod{n}$

$$g) a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a^k \equiv b^k \pmod{n}, \forall k \geq 1.$$

## II. MỘT SỐ DẠNG TOÁN ỨNG DỤNG

### 1. Chứng minh quan hệ chia hết

\* *Phương pháp* : Để chứng minh  $a : m$  ta chứng tỏ  $a \equiv 0 \pmod{m}$ .

**Ví dụ 1.** Chứng minh rằng:  $(2222^{5555} + 5555^{2222}) : 7$ .

**Giải**

Ta có:  $2222 \equiv 3 \pmod{7}$  hay  $2222 \equiv -4 \pmod{7}$ ;

$$5555 \equiv 4 \pmod{7}$$

$$\Rightarrow (2222^{5555} + 5555^{2222}) \equiv [(-4)^{5555} + 4^{2222}] \pmod{7}$$

$$\Rightarrow (2222^{5555} + 5555^{2222}) \equiv -4^{2222} (4^{3333} - 1) \pmod{7}$$

Lại có  $4^{3333} = (4^3)^{1111} = 64^{1111}$ , mà  $64 \equiv 1 \pmod{7}$  nên  $4^{3333} \equiv 1 \pmod{7}$

$$\Rightarrow 4^{3333} - 1 \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow -4^{2222} (4^{3333} - 1) \equiv 0 \pmod{7}.$$

Do vậy  $(2222^{5555} + 5555^{2222}) \equiv 0 \pmod{7}$

hay  $(2222^{5555} + 5555^{2222}) : 7$

Như vậy ta có  $a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow (a - b) : n$ .

**Nhận xét:** Nếu  $a$  chia  $b$  dư  $r$  thì  $a = r \pmod{b}$ .

**2.2. Tính chất:** Với mọi  $a, b, c, n \in \mathbb{Z}$  và  $n > 0$ , ta có:

a)  $a \equiv a \pmod{n}$

b)  $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow b \equiv a \pmod{n}$

c)  $a \equiv b \pmod{n}, b \equiv c \pmod{n} \Rightarrow a \equiv c \pmod{n}$

d)  $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm c \pmod{n}$

e)  $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{n}$

f)  $ac \equiv bc \pmod{n}; (c, n) = 1 \Rightarrow a \equiv b \pmod{n}$

g)  $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a^k \equiv b^k \pmod{n}, \forall k \geq 1$

## II. MỘT SỐ DẠNG TOÁN ỨNG DỤNG

### 1. Chứng minh quan hệ chia hết

\* *Phương pháp*: Để chứng minh  $a \div m$  ta chứng tỏ  $a \equiv 0 \pmod{m}$ .

**Ví dụ 1.** Chứng minh rằng:  $(2222^{5555} + 5555^{2222}) \div 7$

**Giải**

Ta có:  $2222 \equiv 3 \pmod{7}$  hay

$$5555 \equiv 4 \pmod{7}$$

$$\Rightarrow (2222^{5555} + 5555^{2222}) \equiv [(-4)^{5555} + 4^{2222}] \pmod{7}$$

$$\Rightarrow (2222^{5555} + 5555^{2222}) \equiv -4^{2222} (4^{3333} - 1) \pmod{7}$$

Lại có  $4^{3333} = (4^3)^{1111} = 64^{1111}$ , mà  $64 \equiv 1 \pmod{7}$  nên  $4^{3333} \equiv 1 \pmod{7}$

$$\Rightarrow 4^{3333} - 1 \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow -4^{2222} (4^{3333} - 1) \equiv 0 \pmod{7}$$

Do vậy  $(2222^{5555} + 5555^{2222}) \equiv 0 \pmod{7}$  hay  $(2222^{5555} + 5555^{2222}) \div 7$ .

**Ví dụ 2.** Chứng minh rằng:  $A = (7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n) \div 19$

**Giải**

$$\text{Ta có: } 5^{2n} = (5^2)^n = 25^n \Rightarrow A = 7 \cdot 25^n + 12 \cdot 6^n$$

$$\text{Vì } 25 \equiv 6 \pmod{19} \text{ nên } 25^n \equiv 6^n \pmod{19}$$

$$\Rightarrow A \equiv 7 \cdot 6^n + 12 \cdot 6^n \pmod{19} \Leftrightarrow A \equiv 19 \cdot 6^n \pmod{19}$$

$$\text{Suy ra: } A \equiv 0 \pmod{19}$$

Vậy  $A \div 19$ .

**Ví dụ 3.** Chứng minh rằng:  $A = (2^{3^{2n}} + 5) \div 7$  với mọi  $n \in \mathbb{N}$ .

**Giải**

Ta có:  $2^3 = 8 \equiv 1 \pmod{7}$ . Ta đi tìm số dư của  $2^{2n}$  khi chia cho 3.

Vì  $4 \equiv 1 \pmod{3}$   $4^n \equiv 1 \pmod{3}$  hay  $2^{2n} \equiv 1 \pmod{3}$ .

$\Rightarrow 2^{2n}$  chia cho 3 dư 1. Giả sử  $2^{2n} = 3k + 1, k \in \mathbb{N}$ .

Ta có:  $A = 2^{3k+1} + 5 = 2 \cdot 8^k + 5$ .

Vì  $8^k \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 2 \cdot 8^k \equiv 2 \pmod{7} \Rightarrow 2 \cdot 8^k + 5 \equiv 2 + 5 \pmod{7}$

hay  $A \equiv 0 \pmod{7}$

Vậy  $A$  chia hết cho 7.

## 2. Tìm số dư, chữ số tận cùng

### 2.1. Tìm số dư khi chia $a$ cho $b > 0$

Nếu  $a \equiv r \pmod{b}$  và  $0 \leq r < b$  thì  $r$  là số dư khi chia  $a$  cho  $b$ .

**Ví dụ 4.** Tìm số dư khi chia  $3^{2000}$  cho 7.

**Giải**

Ta có:  $3^2 \equiv 2 \pmod{7} \Rightarrow 3^6 = (3^2)^3 \equiv 1 \pmod{7}$

$\Rightarrow (3^6)^{333} \equiv 1 \pmod{7}$  hay  $3^{1998} \equiv 1 \pmod{7}$ .

Mặt khác:  $3^2 \equiv 2 \pmod{7}$  nên  $3^{2000} = 3^{1998} 3^2 \equiv 1 \cdot 2 \pmod{7}$

hay  $3^{2000}$  chia cho 7 dư 2.

**Nhận xét:**

Để tìm số dư khi chia  $a^n$  cho  $b > 0$ , ta lấy lũy thừa với số mũ tăng dần của  $a$  chia cho  $b$  để tìm số dư. Ta sẽ dừng lại để xem xét khi tìm được số dư có giá trị tuyệt đối nhỏ hoặc là một giá trị đặc biệt có liên quan đến các tình huống của bài toán.

### 2.2. Tìm một chữ số tận cùng

\* *Phương pháp:* Nếu  $a \equiv r \pmod{10}$  và  $0 \leq r < 10$  thì  $r$  là chữ số tận cùng của  $a$ .

- Nếu  $a$  có chữ số tận cùng là 0; 5; 6 thì  $a^n$  cũng có chữ số tận cùng như  $a$ , tức là:  
 $a^n \equiv a \pmod{10}$ .

- Nếu  $a$  có chữ số tận cùng là 4; 9 thì  $a^2$  có chữ số tận cùng là 6; 1.

Nếu  $a \equiv 4 \pmod{10} \Rightarrow a^2 \equiv 6 \pmod{10}$ , nên  $a^{2k} \equiv 6 \pmod{10}$ .

Nếu  $a \equiv 9 \pmod{10} \Rightarrow a^2 \equiv 1 \pmod{10}$ , nên  $a^{2k} \equiv 1 \pmod{10}$ .

$\Rightarrow$  Để tìm chữ số tận cùng của  $a^n$  ta chia  $n$  cho 2.

- Nếu  $a$  có chữ số tận cùng là 2; 3; 7; 8 thì ta áp dụng một trong các kết quả sau:

$$2^{44} \equiv 6 \pmod{10}; \quad 3^{44} \equiv 1 \pmod{10}; \quad 7^{44} \equiv 1 \pmod{10}; \quad 8^{44} \equiv 6 \pmod{10}.$$

$\Rightarrow$  Để tìm chữ số tận cùng của  $a^n$  ta chia  $n$  cho 4.

**Ví dụ 5.** Cho  $A = 2012^{2013}$ . Tìm chữ số tận cùng của  $A$ .

**Giải**

Ta có số mũ  $2013 = 4 \cdot 503 + 1$

Vì  $2012 \equiv 2 \pmod{10}$  nên  $2012^4 \equiv 6 \pmod{10}$

$$\Rightarrow 2012^{2013} = 2012^{2012} \cdot 2012 \equiv 6 \cdot 2 \pmod{10} \text{ hay } 2012^{2013} \equiv 2 \pmod{10}$$

Vậy  $A$  có chữ số tận cùng là 2.

### 2.3. Tìm hai chữ số tận cùng

\* *Phương pháp:* Nếu  $a \equiv r \pmod{100}$  và  $10 \leq r \leq 100$  thì  $r$  là hai chữ số tận cùng của  $a$ .

Ta có nhận xét sau:

$$2^{20} \equiv 76 \pmod{100}; \quad 3^{20} \equiv 1 \pmod{100}; \quad 6^5 \equiv 76 \pmod{100};$$

$$7^4 \equiv 1 \pmod{100}; \quad 5^2 \equiv 25 \pmod{100}.$$

Mà  $76^n \equiv 76 \pmod{100}$  và  $25^n \equiv 25 \pmod{100}, n \geq 2$ .

Suy ra:  $a^{20k} \equiv 00 \pmod{100}$  nếu  $a \equiv 0 \pmod{10}$

$$a^{20k} \equiv 1 \pmod{100} \text{ nếu } a \equiv 1; 3; 7; 9 \pmod{10}$$

$$a^{20k} \equiv 25 \pmod{100} \text{ nếu } a \equiv 5 \pmod{10}$$

$$a^{20k} \equiv 76 \pmod{100} \text{ nếu } a \equiv 2; 4; 6; 8 \pmod{10}.$$

Vậy để tìm hai chữ số tận cùng của  $a^n$  ta lấy số mũ  $n$  chia cho 20.

**Ví dụ 6.** Cho số  $A = 2012^{2013}$ . Tìm hai chữ số tận cùng của  $A$ .

**Giải**

Ta có:  $2013 = 20 \cdot 100 + 13$

Vì  $2012 \equiv 2 \pmod{10}$  nên  $2012^{20} \equiv 76 \pmod{100}$

$$\Rightarrow (2012^{20})^{100} \equiv 76 \pmod{100} \text{ hay } 2012^{2000} \equiv 76 \pmod{100} \quad (1)$$

Mặt khác:  $2012 \equiv 12 \pmod{100} \Rightarrow 2012^6 \equiv 12^6 \pmod{100}$

Hay  $2012^6 \equiv 84 \pmod{100} \Rightarrow (2012^6)^2 \equiv 56 \pmod{100}$

$$\text{Hay } 2012^{12} \equiv 56 \pmod{100} \Rightarrow 2012^{2013} \equiv 72 \pmod{100} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:  $2012^{2013} = 2012^{2000} \cdot 2012^{13} \equiv 76 \cdot 72 \pmod{100}$

Hay  $2012^{2013} \equiv 72 \pmod{100}$ .

Vậy  $A$  có hai chữ số tận cùng là 72.

### III. BÀI TẬP

**2.65.** Chứng minh rằng:  $(2^{2002} - 4) : 31$ .

**2.66.** Tìm số dư trong phép chia:  $5^{70} + 7^{50}$  cho 12

**2.67.** Tìm số dư của số  $A = 3^{2005} + 4^{2005}$  khi chia cho 11 và khi chia cho 13.

**2.68.** Chứng minh rằng nếu  $x$  không chia hết cho 3 thì  $x^2 \equiv 1 \pmod{3}$

**2.69.** Chứng minh rằng:

a) Nếu  $a \equiv 1 \pmod{2}$  thì  $a^2 \equiv 1 \pmod{8}$

b) Nếu  $a \equiv 1 \pmod{3}$  thì  $a^3 \equiv 1 \pmod{9}$

**2.70.** Giả sử  $(x^2 + y^2) : 3$ . Chứng minh rằng:  $x : 3$  và  $y : 3$ .

**2.71.** Chứng minh rằng:  $1924^{2003 \cdot 2004^n} + 1920 : 124$  với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**2.72.** Chứng minh rằng:



a)  $(1991^{1997} - 1997^{1996}) : 10$

b)  $(2^9 + 2^{99}) : 100.$

**2.73.** Chứng minh rằng với mọi  $n \in \mathbb{N}$  ta có:

a)  $(2^{2^{4n+1}} + 7) : 11$

b)  $n^{n-1} + n^{n-2} + \dots + n^2 + 1$  chia hết cho  $n - 1$  (với  $n > 1$ ).

**2.74.** Cho  $n \in \mathbb{N}$ . Chứng minh rằng :

a)  $5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1} : 59$

b)  $(4^{2n} - 3^{2n} - 7) : 168 \quad (n \geq 1).$

**2.75.** Chứng minh rằng  $9^n + 1$  không chia hết cho 100, với mọi  $n \in \mathbb{N}$ .

**2.76.** Tìm số tự nhiên  $n$  sao cho:

a)  $(2^{3n+4} + 3^{2n+1}) : 19$

b)  $(n \cdot 2^n + 1) : 3.$

**2.77.** Tìm hai chữ số tận cùng của các số sau:

a)  $A = 7^{9^{7^9}}$

b)  $B = 29^{9^{2012}}$

**2.78.** Cho số  $C = 1978^{1986}$

a) Tìm chữ số tận cùng của C.

b) Tìm hai chữ số tận cùng của C.

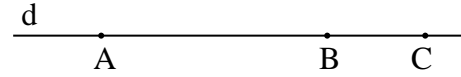
# PHẦN HÌNH HỌC

## Chương I. ĐOẠN THẲNG.

### Chuyên đề 1. ĐIỂM. ĐƯỜNG THẲNG

#### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Điểm A thuộc đường thẳng d kí hiệu là  $A \in d$  Khi ba điểm A, B, C cùng thuộc một đường thẳng ta nói chúng thẳng hàng (h.1).



Hình 1

2. Điểm M không thuộc đường thẳng d kí hiệu là  $M \notin d$  Khi ba điểm A, B, M không cùng thuộc bất kì đường thẳng nào ta nói chúng không thẳng hàng (h.2).



Hình 2

3. Trong ba điểm thẳng hàng có một điểm và chỉ một điểm nằm giữa hai điểm khác.

Trong hình 1, điểm B nằm giữa hai điểm A và C.

4. Có một đường thẳng và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm A và B.

Đường thẳng d trong hình 2 còn được gọi là đường thẳng AB. Ta còn đặt tên đường thẳng bằng hai chữ cái thường ví dụ đường thẳng xy.

#### B. MỘT SỐ VÍ DỤ

**Ví dụ 1.** Trên đường thẳng lấy 4 điểm A, B, C, D theo thứ tự đó và lấy điểm  $O \notin a$ .

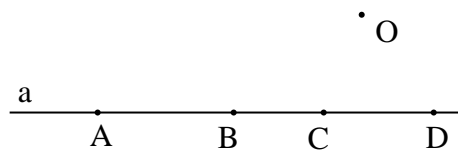
a) Hãy kể tên các trường hợp một điểm nằm giữa hai điểm khác.

b) Có bao nhiêu nhóm ba điểm không thẳng hàng?

**Giải (h.3)**

a) Có 4 trường hợp một điểm nằm giữa hai điểm khác là:

- Điểm B nằm giữa A và C;
- Điểm B nằm giữa A và D;
- Điểm C nằm giữa A và D;
- Điểm C nằm giữa B và D.



Hình 3

b) Có 6 nhóm ba điểm không thẳng hàng là:

(O; A; B) ; (O; A; C) ; (O; A; D) ; (O; B; C) ; (O; B; D) và (O; C; D).

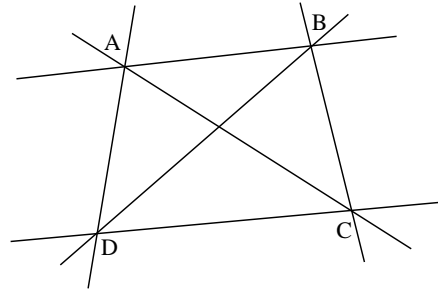
*Lưu ý:* Bạn dễ dàng nhận thấy điểm B nằm giữa hai điểm A và C nhưng có thể bạn bỏ sót trường hợp B nằm giữa A và D. Để khắc phục tình trạng trên bạn cần nhớ trong ba điểm thẳng hàng, có một và chỉ một điểm nằm giữa hai điểm còn lại.

**Ví dụ 2.** Cho trước một số điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Vẽ các đường thẳng đi qua các cặp điểm. Hỏi vẽ được bao nhiêu đường thẳng nếu số điểm cho trước là:

- a) 4 điểm A, B, C, D ;
- b) 5 điểm A, B, C, D, E;
- c)  $n$  điểm ( $n \in \mathbb{N}; n \geq 2$ )

**Giải**

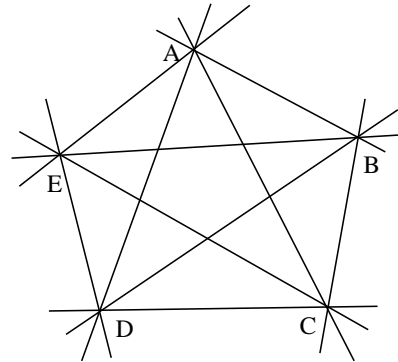
a) Với 4 điểm A, B, C, D cho trước trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng thì có thể vẽ được 6 đường thẳng là: AB, AC, AD, BC, BD và CD (h.4).



Hình 4

b) Với 5 điểm A, B, C, D, E cho trước trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng thì có thể vẽ được 10 đường thẳng là:

AB, AC, AD, AE;  
BC, BD, BE;  
CD, CE và DE (h.5).



Hình 5

c) Chọn một trong số  $n$  điểm đã cho rồi nối điểm đó với  $n - 1$  điểm còn lại ta được  $n - 1$  đường thẳng. Làm như vậy với tất cả  $n$  điểm ta được  $(n - 1) \cdot n$  đường thẳng. Nhưng do mỗi đường thẳng đã được tính hai lần (vì đường thẳng AB với đường thẳng BA chỉ là một) do đó thực sự chỉ vẽ được  $\frac{n \cdot (n - 1)}{2}$  đường thẳng.

*Lưu ý:*

- Nếu  $n$  là số điểm cho trước trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng thì công thức  $\frac{n \cdot (n - 1)}{2}$  giúp ta tính được số đường thẳng đi qua các cặp điểm.
- Ngược lại, nếu  $n$  là số đường thẳng cho trước đôi một cắt nhau và không có ba, bốn, ... đường thẳng nào đồng quy thì công thức  $\frac{n \cdot (n - 1)}{2}$  giúp ta tính được số giao điểm của tất cả các cặp đường thẳng.

**Ví dụ 3.** Cho trước một số điểm trong đó có đúng ba điểm thẳng hàng. Vẽ các đường thẳng đi qua các cặp điểm. Hỏi vẽ được bao nhiêu đường thẳng nếu số điểm cho trước là:

a) 7 điểm;

b)  $n$  điểm ( $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ ).

**Giải**

a) Nếu trong 7 điểm đã cho không có ba điểm nào thẳng hàng thì số đường thẳng vẽ được là  $\frac{7.6}{2} = 21$  (đường thẳng).

Bây giờ xét đến ba điểm thẳng hàng, qua chúng chỉ vẽ được một đường thẳng. Nếu ba điểm này không thẳng hàng thì sẽ vẽ được ba đường thẳng.

Số đường thẳng giảm đi là :  $3 - 1 = 2$  (đường thẳng).

Vậy vẽ được tất cả  $21 - 2 = 19$  (đường thẳng).

b) Lập luận tương tự như câu a) ta được đáp số  $\frac{n.(n-1)}{2} - 2$  (đường thẳng).

**Ví dụ 4.** Cho trước  $n$  điểm trong đó có ba điểm thẳng hàng. Vẽ các đường thẳng đi qua các cặp điểm. Biết số đường thẳng vẽ được tất cả là 28, tìm số  $n$  ?

**Giải**

Ta có:  $\frac{n.(n-1)}{2} = 28.$

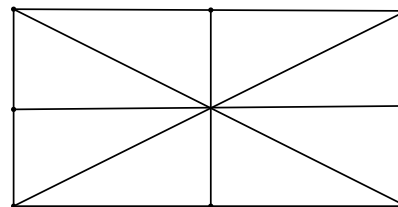
Suy ra:  $n.(n-1) = 56 = 8.7$

Vì  $n$  và  $n-1$  là hai số tự nhiên liên tiếp nên  $n = 8$ .

## C. BÀI TẬP

**1.1.** Xem hình 6 rồi cho biết:

- Có bao nhiêu nhóm ba điểm thẳng hàng?
- Có bao nhiêu trường hợp một điểm nằm giữa hai điểm khác?



Hình 6

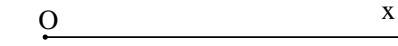
**1.2.** Vẽ sơ đồ trồng 9 cây thành 9 hàng, mỗi cây 3 hàng.

- 1.3. Cho trước một số điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Nếu bớt đi ba điểm thì số đường thẳng vẽ được qua các cặp điểm còn lại chỉ là 36. Hỏi nếu không bớt đi ba điểm thì vẽ được bao nhiêu đường thẳng?
- 1.4. Cho 5 điểm A, B, C, D, E. Vẽ các đường thẳng đi qua các cặp điểm. Hỏi 5 điểm đã cho phải có điều kiện gì để số đường thẳng vẽ được là:
- a) 10;    b) 5;    c) 6.
- 1.5. Cho trước  $n$  điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Nếu bớt đi 1 điểm thì số đường thẳng vẽ được qua các cặp điểm giảm đi 10 đường thẳng. Hỏi lúc đó đã cho bao nhiêu điểm?
- 1.6. Có 16 đường thẳng cắt nhau đôi một và không có ba đường thẳng nào cũng đi qua một điểm. Hỏi có tất cả bao nhiêu giao điểm của 16 đường thẳng đã cho?
- 1.7. Cho một số đường thẳng cắt nhau đôi một và không có ba đường thẳng nào cũng đi qua một điểm. Biết có tất cả 190 giao điểm, tính số đường thẳng đã cho.
- 1.8. Cho trước 12 điểm trong đó có đúng 4 điểm thẳng hàng. Vẽ các đường thẳng đi qua các cặp điểm. Hỏi vẽ được bao nhiêu đường thẳng?
- 1.9. Cho  $a, b, c$  là ba đường thẳng phân biệt. Hãy cho biết số giao điểm của ba đường thẳng này.
- 1.10. Vẽ 5 đường thẳng sao cho chúng có nhiều giao điểm nhất.
- 1.11. Hai đường thẳng  $m$  và  $n$  có chung điểm O. Hãy nêu điều kiện để:
- a)  $m$  và  $n$  là hai đường thẳng phân biệt;
- b)  $m$  và  $n$  là hai đường thẳng trùng nhau.
- 1.12. Cho bốn điểm A, B, M, N sao cho điểm M nằm giữa hai điểm A và B; điểm B nằm giữa hai điểm M và N. Chứng tỏ rằng hai đường thẳng AB và MN trùng nhau
- 1.13. Cho hai đường thẳng  $a$  và  $b$  cắt nhau tại O. Vẽ các điểm P và Q sao cho chúng không nằm trên hai đường thẳng này. Nêu cách xác định một điểm M thuộc đường thẳng  $a$  hoặc đường thẳng  $b$  sao cho ba điểm M, N, Q thẳng hàng.

**Chuyên đề 2. TIA**

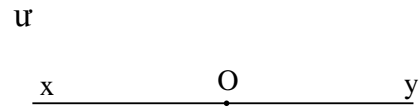
**A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ**

1. Hình gồm điểm O và một phần đường thẳng bị chia ra bởi điểm O được gọi là một tia gốc O. Trên hình 7 ta có tia Ox.



Hình 7

2. Hai tia chung gốc tạo thành đường thẳng gọi là hai tia đối nhau. Trên hình 8 ta có hai tia Ox và Oy đối nhau.



Hình 8

**Nhận xét:** Mỗi điểm trên đường thẳng là gốc chung của hai tia đối nhau.

3. Hai tia trùng nhau: Trên tia Ox lấy một điểm M (M khác O). Khi đó hai tia Ox và OM trùng nhau. (h.9).

Hai tia trùng nhau chỉ coi là một tia.

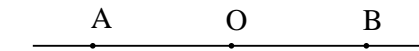


Hình 9

4. Mối quan hệ giữa một điểm nằm giữa hai điểm khác với hai tia đối nhau, hai tia trùng nhau.

Xét ba điểm A, O, B thẳng hàng (h.10).

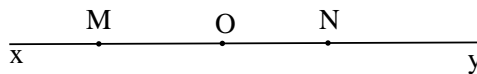
- Nếu hai tia OA, Ob đối nhau thì góc O nằm giữa A và B
- Ngược lại, nếu điểm O nằm giữa A và B thì hai tia OA và OB đối nhau; hai tia AO, AB trùng nhau, hai tia BO, BA trùng nhau.



Hình 10

**B. MỘT SỐ VÍ DỤ**

**Ví dụ 1.** Trên đường thẳng xy lấy ba điểm m, O, N (h.11)



Hình 11

Hãy kể tên:

- Các cặp tia đối nhau;
- Các tia trùng nhau gốc O, các tia trùng nhau gốc M.

**Giải**

- Có ba cặp tia đối nhau là: Mx và My; Ox và Oy; Nx và Ny.
- Có hai cặp tia trùng nhau gốc O là: Ox và OM, Oy và ON.

Có ba tia trùng nhau gốc M là: MO, Mn và My.

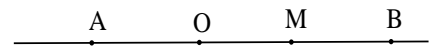
**Lưu ý:** Ba tia trùng nhau này chỉ coi là một tia.

**Ví dụ 2.** Cho điểm O nằm giữa hai điểm A và B và điểm M sao cho hai tia OM và OB trùng nhau. Chứng tỏ rằng:

- a) Hai tia OA, OM đối nhau;
- b) Bốn điểm A, B, O, M thẳng hàng.

**Giải** (h.12)

a) Vì điểm O nằm giữa hai điểm A và B nên hai tia OA và OB đối nhau (1)



Hình 12

Mặt khác hai tia OM và OB trùng nhau (2)

Nên từ (1) và (2) suy ra hai tia OA, OM đối nhau.

b) Hai tia OA, OB đối nhau nên ba điểm O, A, B cùng thuộc một đường thẳng.

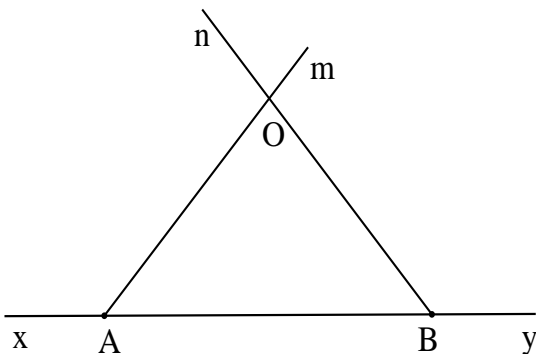
Hai tia OA, OM đối nhau nên ba điểm O, A, M cùng thuộc một đường thẳng.

Hai đường thẳng này có hai điểm chung là O và A nên chúng trùng nhau do đó 4 điểm A, B, O, M thẳng hàng.

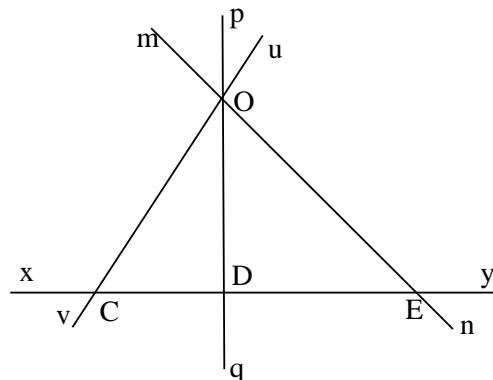
### C. BÀI TẬP

**1.14.** Kể tên các tia có trong hình 13.

**1.15.** Trong hình 14 có bao nhiêu tia?



Hình 13



Hình 14

**1.16.** Trên một đường thẳng lấy n điểm  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Qua các điểm này vẽ các đường thẳng song song với nhau. Tính giá trị của n để trong hình có đúng 100 tia.

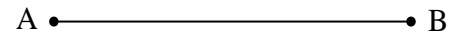
- 1.17.** Cho điểm O nằm giữa hai điểm M và N. Trên tia Om lấy điểm E, trên tia ON lấy điểm F.  
Giải thích vì sao:
- a) Hai tia BO và BC đối nhau;
  - b) Điểm B nằm giữa hai điểm O và C.
- 1.18.** Cho điểm O nằm giữa hai điểm A và B, điểm B nằm giữa hai điểm A và C. Giải thích vì sao:
- a) Hai tia BO và BC đối nhau;
  - b) Điểm B nằm giữa hai điểm O và C.
- 1.19.** Cho điểm B nằm giữa hai điểm A và C, điểm C nằm giữa hai điểm B và D. Chứng tỏ rằng:
- a) Hai tia BA, BD đối nhau;
  - b) Hai tia CA, CD đối nhau.



**Chuyên đề 3. ĐOẠN THẲNG**

**A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ**

1. Đoạn thẳng AB là hình gồm điểm A, điểm B và tất cả các điểm nằm giữa A và B (h. 15).



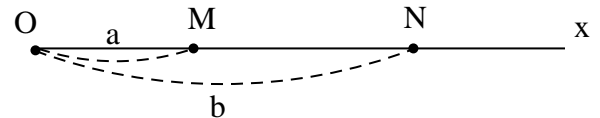
Hình 15

2. Mỗi đoạn thẳng có một độ dài. Độ dài đoạn thẳng là một số lớn hơn 0.

3. Nếu điểm M nằm giữa hai điểm A và B thì  $AM + MB = AB$ .

4. Trên tia Ox bao giờ cũng vẽ được một và chỉ một điểm M sao cho  $OM = a$  (đơn vị dài).

5. Trên tia Ox,  $OM = a$ ,  $ON = b$ , nếu  $0 < a < b$  thì điểm M nằm giữa hai điểm O và N (h. 16).



Hình 16

**B. MỘT SỐ VÍ DỤ**

**Ví dụ 1.** Trên đường thẳng xy lấy ba điểm A, B, C.

a) Kể tên các đoạn thẳng có trong hình.

b) Cho biết  $AC = 3cm$ ,  $BC = 5cm$ . Tính độ dài AB.

**Giải**

a) Trong hình có ba đoạn thẳng AB, AC và BC.

b) Xét ba trường hợp.

- Trường hợp điểm A nằm giữa điểm B và C (h. 17).

C (h. 17).

Ta có:  $BA + AC = BC$

$$BA + 3 = 5$$

$$AB = 5 - 3 = 2 \text{ (cm)}$$

- Trường hợp điểm B nằm giữa hai điểm A và C

Ta có:  $AB + BC = AC$

$$AB + 5 = 3 \text{ (vô lí)}$$

- Trường hợp điểm C nằm giữa hai điểm A và B

Ta có:  $AC + CB = AB$

$$3 + 5 = AB$$

$$AB = 8 \text{ (cm)}$$

Vậy  $AB = 2cm$  hoặc  $AB = 8cm$

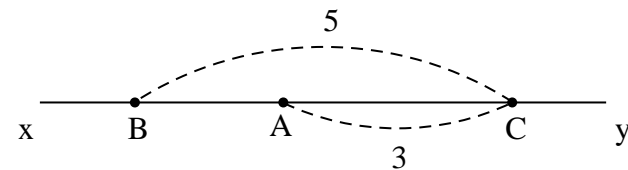
**Lưu ý:** Khi đề bài không cho biết vị trí tương đối giữa ba điểm A, B, C thì phải xét từng trường hợp vị trí của mỗi điểm đối với hai điểm còn lại. Nếu không sẽ bỏ sót đáp số.

**Ví dụ 2.** Trên đường thẳng xy là bốn điểm C, E, F, D theo thứ tự đó. Biết  $CD = 7cm$ ,  $EF = 3cm$ ,  $FD = 2cm$ .

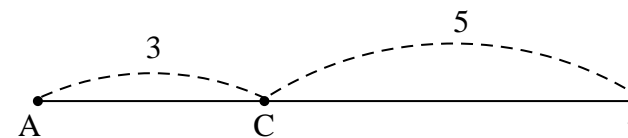
a) So sánh CE và EF.

b) Tìm những cặp đoạn thẳng bằng nhau trong hình vẽ.

**Giải** (h. 19)



Hình 17



Hình 18

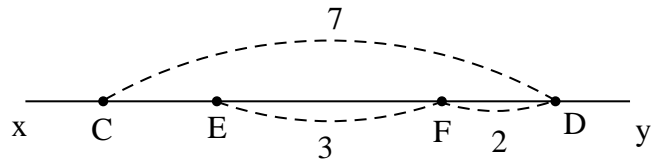
a) Điểm F nằm giữa hai điểm E và D nên  $ED = EF + FD = 3 + 2 = 5$  (cm).

Điểm E nằm giữa hai điểm C và D nên

$$CE + ED = CD$$

$$\Rightarrow CE = CD - ED = 7 - 5 = 2 \text{ (cm)}$$

b) Ta có  $CE = ED$  ( $= 5\text{cm}$ )



Hình 19

**Ví dụ 3.** Cho ba điểm A, B, C sao cho  $AB = 2\text{cm}$ ,  $BC = 4\text{cm}$  và  $CA = 3\text{cm}$ . Hỏi ba điểm A, B, C có thẳng hàng không? Vì sao?

**Giải**

- Giả sử điểm A nằm giữa B và C, khi đó thì  $BA + AC = BC$  tức  $2 + 3 = 4$  (vô lí)

Vậy A không nằm giữa B và C.

- Giả sử điểm B nằm giữa A và C, khi đó thì  $AB + BC = AC$  tức  $2 + 4 = 3$  (vô lí)

Vậy B không nằm giữa A và C.

- Giả sử điểm C nằm giữa A và B, khi đó thì  $AC + CB = AB$  tức  $3 + 4 = 2$  (vô lí)

Vậy C không nằm giữa A và B.

Trong ba điểm A, B, C không có điểm nào nằm giữa hai điểm còn lại nếu ba điểm này không thẳng hàng.

Lưu ý: Bạn có thể giải bài toán trên bằng cách khác gọn hơn như sau:

Ta có  $BA + AC \neq BC$  (vì  $2 + 3 \neq 4$ ) nên A không nằm giữa B và C.

$AB + BC \neq AC$  (vì  $2 + 4 \neq 3$ ) nên B không nằm giữa A và C.

$AC + CB \neq AB$  (vì  $3 + 4 \neq 2$ ) nên C không nằm giữa A và B.

Trong ba điểm A, B, C không có điểm nào nằm giữa hai điểm còn lại nếu ba điểm này không thẳng hàng.

**Ví dụ 4.** Trên tia Ox lấy các điểm A và B sao cho  $OA = 2\text{cm}$ ;  $OB = 5\text{cm}$ . Trên tia đối của tia Bx lấy điểm M sao cho  $BM = OA$ . Tính độ dài AM.

**Giải.** (h. 20)

Trên tia Ox có  $OA < OB$  ( $2 < 5$ ) nên điểm A nằm giữa hai điểm O và B do đó

$$OA + AB = OB$$

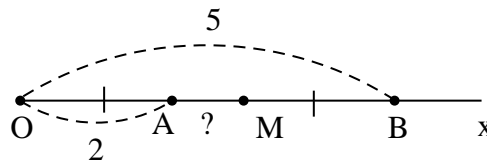
$$\Rightarrow AB = OB - OA = 5 - 2 = 3 \text{ (cm)}.$$

Ta có  $BM = OA = 2\text{cm}$ .

Trên tia BO có  $BM < MA$  ( $2 < 3$ ) nên điểm M nằm giữa B và A.

$$\text{Ta có } BM + MA = BA$$

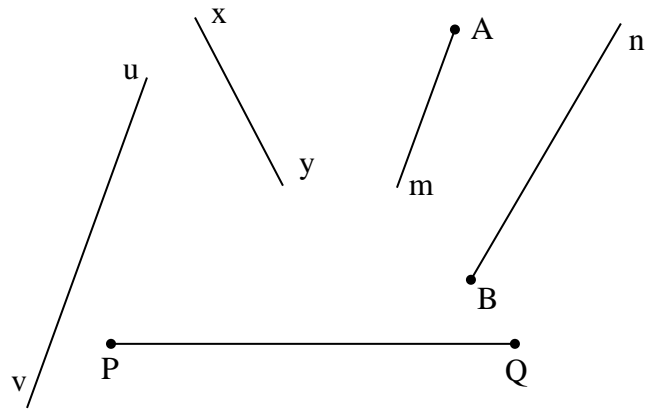
$$2 + MA = 3 \Rightarrow MA = 1 \text{ cm}$$



Hình 20

**C. BÀI TẬP**

- 1.20. Trong hình 21 đường thẳng nào, tia nào cắt đoạn PQ?
- 1.21. Cho bốn điểm A, B, C, D. Vẽ các đoạn thẳng có hai đầu là hai trong số các điểm đã cho. Hỏi vẽ được tất cả bao nhiêu đoạn thẳng.
- 1.22. Cho trước n điểm. Vẽ các đoạn thẳng có hai đầu là hai trong các điểm đã cho. Biết vẽ được tất cả 36 đoạn thẳng. Tính giá trị của n.
- 1.23. Trên đoạn thẳng xy, lấy bốn điểm A, B, C, D theo thứ tự đó. Cho biết  $AC > BD$ . Hãy so sánh hai đoạn thẳng AB và CD.



Hình 21

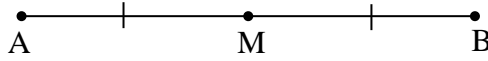
- 1.24. Cho đoạn thẳng AB. Trên tia đối của tia AB lấy điểm M sao cho  $AM = 1cm$ . Trên tia đối của tia BA lấy điểm N sao cho  $BN = 2cm$ . Hãy so sánh hai đoạn thẳng BM và AN.
- 1.25. Cho điểm M nằm giữa hai điểm A và B; điểm B nằm giữa hai điểm A và C. Biết  $AM = 3cm$ ,  $MB = 2cm$ ,  $BC = 1cm$ . Tính độ dài AC.
- 1.26. Cho đoạn thẳng  $AB = 7cm$ . Lấy điểm M nằm giữa A và B sao cho  $MA - MB = 3cm$ . Tính độ dài các đoạn thẳng MA và MB.
- 1.27. Cho đoạn thẳng  $AB = 6cm$ . Trên đường thẳng AB lấy điểm M sao cho  $MA = 2MB$ . Tính độ dài đoạn thẳng MB.
- 1.28. Cho ba điểm A, B, C. Biết rằng  $AC = 3cm$ ,  $BC = 2cm$  và  $AB = 5cm$ . Hỏi hai tia CA và CB có vị trí như thế nào đối với nhau?
- 1.29. Trên tia Ox lấy các điểm A và B sao cho  $OA = 4cm$ ,  $AB = 2cm$ . Tính độ dài đoạn thẳng OB.
- 1.30. Trên tia Ox lấy các điểm M và N sao cho  $OM = 3cm$ ,  $MN = 5cm$ . Tính độ dài đoạn thẳng ON.
- 1.31. Trên tia Ox lấy ba điểm A, B, C sao cho  $OA = 2cm$ ,  $OB = 3cm$ ,  $OC = 5cm$ . Tìm các cặp đoạn thẳng bằng nhau trong hình vẽ.
- 1.32. Trên tia Ox lấy các điểm M và N sao cho  $OM = m$ ,  $ON = m + n$  trong đó  $m > n > 0$ . Hãy so sánh OM và MN.

**Chuyên đề 4. TRUNG ĐIỂM CỦA ĐOẠN THẲNG**

**A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ**

**1. Định nghĩa:** Trung điểm M của đoạn thẳng AB là điểm nằm giữa A và B và cách đều A, B ( $MA = MB$ ).

**2. Tính chất:** Nếu M là trung điểm của AB thì  $MA = MB = \frac{AB}{2}$  (h. 22).



Hình 22

**B. MỘT SỐ VÍ DỤ**

**Ví dụ 1.** Cho đoạn thẳng AB có độ dài là 5cm. Trên đoạn thẳng này lấy điểm C sao cho  $AC = 3cm$ . Gọi M là trung điểm của CB. Tính độ dài AM.

**Giải.** (h. 23)

Điểm C nằm giữa A và B

nên  $AC + CB = AB$

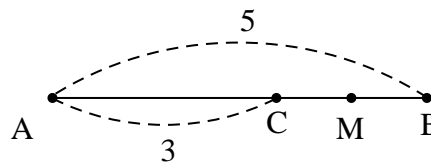
$$\Rightarrow CB = AB - AC = 5 - 3 = 2 \text{ (cm)}$$

Vì M là trung điểm của CB

$$\text{Nên } MB = \frac{CB}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ (cm)}.$$

Điểm M nằm giữa A và B nên  $AM + MB = AB$ .

$$\text{Suy ra } AM = AB - MB = 5 - 1 = 4 \text{ (cm)}.$$



Hình 23

**Nhận xét:** Trong lời giải trên dựa vào nhận biết trực quan qua hình vẽ ta nói điểm M nằm giữa hai điểm A và B mà không giải thích lí do vì chuẩn kiến thức kĩ năng môn Toán 6 không yêu cầu phải giải thích.

Nếu muốn giải thích bạn có thể lập luận như sau:

Trên tia BA có  $BM < BA$  ( $1 < 5$ ) nên điểm M nằm giữa hai điểm A và B. Vấn đề ở đây là bạn phải xét tia gốc B.

**Ví dụ 2.** Cho đoạn thẳng  $AB = 6cm$ . Lấy điểm M nằm giữa hai điểm A và B sao cho  $AM = \frac{1}{3}AB$ . Trên tia MB lấy điểm O sao cho  $MO = \frac{1}{2}AM$ . Chứng tỏ rằng:

a) Điểm O không phải là trung điểm của đoạn thẳng MB;

b) Điểm O là trung điểm của đoạn thẳng MB.

**Giải.** (h. 24)

$$\text{a) Ta có } AM = \frac{1}{3}AB = \frac{1}{3}.6 = 2 \text{ (cm)}.$$

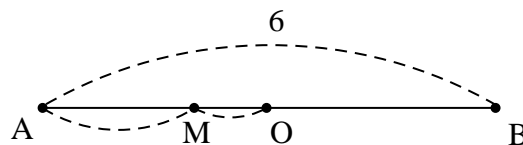
$$MO = \frac{1}{2}AM = \frac{1}{2}.2 = 1 \text{ (cm)}.$$

Vì điểm M nằm giữa A và B nên  $AM + MB = AB$ .

$$\text{Suy ra } MB = AB - AM = 6 - 2 = 4 \text{ (cm)}.$$

Trên tia MB có  $MO < MB$  ( $1 < 4$ ) nên điểm O nằm giữa hai điểm M và B.

$$\text{Do đó } MO + OB = MB.$$



Hình 24

Suy ra  $OB = MB - MO = 4 - 1 = 3$  (cm).

Vậy  $OM < OB$  ( $1 < 3$ ), do đó O không phải là trung điểm của đoạn thẳng MB.

b) Trên tia BA có  $BO < BA$  ( $3 < 6$ ) nên điểm O nằm giữa hai điểm B và A (1)

Ta có  $BO + OA = BA \Rightarrow OA = BA - BO = 6 - 3 = 3$  (cm).

Vậy  $OA = OB (= 3cm)$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra O là trung điểm của đoạn thẳng AB.

**Ví dụ 3.** Trên đường thẳng xy lấy một điểm O. Trên tia Ox lấy điểm M sao cho  $OM = 2cm$ . Trên tia Oy lấy điểm N và P sao cho  $ON = 2cm$  và  $OP = a > 2cm$ .

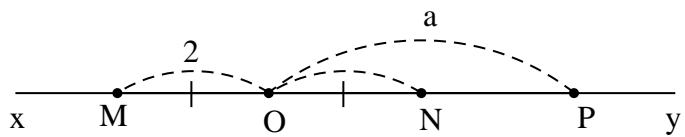
a) Chứng tỏ rằng O là trung điểm của MN.

b) Tìm giá trị của a để N là trung điểm của OP.

**Giải.** (h. 25)

a) Hai tia OM, ON đối nhau nên điểm O nằm giữa hai điểm M và N (1)

Mặt khác  $OM = ON (= 2cm)$  (2)



Từ (1) và (2) suy ra O là trung điểm của đoạn thẳng MN. Hình 25

b) Trên tia Oy có  $ON < OP$  (vì  $2 < a$ ) nên điểm N nằm giữa hai điểm O và P.

Ta có  $ON + NP = OP \Rightarrow NP = OP - ON = a - 2$ .

Để N là trung điểm của OP thì phải có thêm điều kiện:

$NP = ON \Leftrightarrow a - 2 = 2 \Leftrightarrow a = 4$  (cm).

### C. BÀI TẬP

**1.33.** Cho đoạn thẳng AB và điểm O nằm giữa hai điểm A và B. Biết  $AO = \frac{1}{2}AB$ , chứng tỏ

rằng điểm O là trung điểm của đoạn thẳng AB.

**1.34.** Cho ba điểm M, O, N thẳng hàng. Biết  $OM = ON$ , chứng tỏ rằng O là trung điểm của MN.

**1.35.** Trên đường thẳng xy lấy 5 điểm M, N, O, P, Q theo thứ tự đó sao cho  $MN = NO = OP = PQ$ . Tìm những điểm là trung điểm của một đoạn thẳng.

**1.36.** Trên tia Ox lấy hai điểm A và B sao cho  $OA = 4cm$ ;  $OB = 6cm$ . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của OA và OB. Tính độ dài MN.

**1.37.** Cho ba điểm P, O, Q sao cho  $OP = OQ = 2cm$ ;  $PQ = 3cm$ . Hỏi điểm O có phải là trung điểm của đoạn thẳng PQ không? Vì sao?

**1.38.** Trên tia Ox lấy hai điểm A và B sao cho  $OA = 4cm$ ,  $OB = 6cm$ . Gọi M là trung điểm của OA.

a) Tính độ dài BM.

b) Chứng tỏ rằng A là trung điểm của đoạn thẳng MB.

**1.39.** Trên đoạn thẳng AB lấy hai điểm M và N. Cho biết  $AB = 7cm$ ;  $AM = 3cm$ ;  $BN = 2cm$ . Chứng tỏ rằng N là trung điểm của đoạn thẳng MB.

- 1.40.** Trên đường thẳng  $xy$  lấy một điểm  $O$  và hai điểm  $M, N$  sao cho  $OM = 1cm$ ;  $ON = 2,5cm$ . Vẽ các điểm  $A$  và  $B$  trên đường thẳng  $xy$  sao cho  $M$  là trung điểm của  $OA$ ,  $N$  là trung điểm của  $OB$ . Tính độ dài  $AB$ .
- 1.41.** Cho đoạn thẳng  $AB = 2^{10}$  (cm). Gọi  $M_1$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$ ,  $M_2$  là trung điểm của đoạn thẳng  $M_1B$ ,  $M_3$  là trung điểm của đoạn thẳng  $M_2B$ ... và  $M_{10}$  là trung điểm của đoạn thẳng  $M_9B$ . Tính độ dài của đoạn thẳng  $M_1M_{10}$ .

**Chuyên đề nâng cao.**

**CÁC DẤU HIỆU NHẬN BIẾT MỘT ĐIỂM NẸM GIỮA HAI ĐIỂM KHÁC**

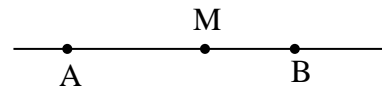
**A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ**

Ta đã biết tổng  $AM + MB = AB$  nếu điểm M nằm giữa A và B. Còn muốn chứng tỏ một điểm là trung điểm của một đoạn thẳng ta phải chứng tỏ điểm đó nằm giữa hai đầu đoạn thẳng và cách đều hai đầu đoạn thẳng. Như vậy, nhiều khi ta phải chứng tỏ một điểm nằm giữa hai điểm khác.

Bình thường, ta nhận biết một điểm nằm giữa hai điểm khác nhau một cách trực quan qua hình vẽ. Tuy nhiên, để rèn luyện tư duy tích cực, trong chuyên đề này ta sẽ chứng tỏ một điểm nằm giữa hai điểm khác bằng những lập luận chính xác, suy luận có căn cứ.

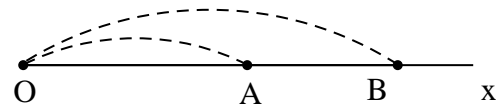
Những dấu hiệu nhận biết một điểm nằm giữa hai điểm khác mà ta đã vận dụng để giải một số bài tập là:

- **Dấu hiệu 1:** Nếu hai tia MA, MB đối nhau thì điểm M nằm giữa hai điểm A và B (h. 26).



Hình 26

- **Dấu hiệu 2:** Nếu  $AM + MB = AB$  thì điểm A nằm giữa hai điểm A và B (h.26).



Hình 27

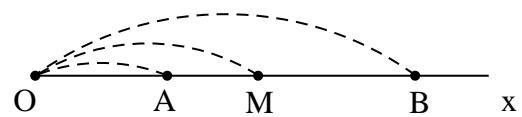
- **Dấu hiệu 3:** Nếu tia Ox có  $OA < OB$  thì điểm A nằm giữa hai điểm O và B (h.27)

Sau đây ta sẽ xét thêm hai dấu hiệu mới:

- **Dấu hiệu 4:** Trên tia Ox có  $OA < OM < OB$  thì điểm M nằm giữa hai điểm A và B (h. 28).

Ta có thể giải thích như sau:

- Trên tia Ox có  $OA < OM$  nên điểm A nằm giữa hai điểm O và M, do đó hai tia MA, MO trùng nhau (1)



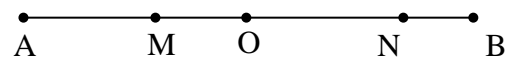
Hình 28

- Trên tia Ox có  $OM < OB$  nên điểm M nằm giữa hai điểm O và B Do đó hai tia MB, MO đối nhau (2)

Từ (1) và (2) suy ra hai tia MA, MB đối nhau.

Vậy điểm M nằm giữa hai điểm A và B.

- **Dấu hiệu 5:** Cho điểm O nằm giữa hai điểm A và B, điểm M nằm giữa O và A, điểm N nằm giữa O và B. Khi đó điểm O nằm giữa hai điểm M và N (h. 29).



Hình 29

Ta có thể giải thích như sau:

- Vì điểm O nằm giữa hai điểm A và B nên hai tia OA, OB đối nhau (1)

- Vì điểm M nằm giữa hai điểm O và A nên hai tia OM, OA trùng nhau (2)

- Vì điểm N nằm giữa hai điểm O và B nên hai tia ON, OB trùng nhau (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra hai tia OM, ON đối nhau, do đó điểm O nằm giữa hai điểm M và

**B. MỘT SỐ VÍ DỤ**

**Ví dụ 1.** Cho ba điểm A, O, B sao cho  $OA = 2cm$ ,  $OB = 3cm$  và  $AB = 5cm$ . Lấy điểm M nằm trên đường thẳng AB sao cho  $OM = 1cm$ . Tính độ dài đoạn thẳng AM.

**Giải**

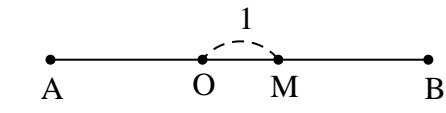
Ta có  $AO + OB = AB$  (vì  $3 + 2 = 5$ ) nên điểm O nằm giữa hai điểm A và B (dấu hiệu 2). Suy ra O nằm trên đường thẳng AB và hai tia OA, OB đối nhau.

- Trường hợp điểm M nằm trên tia OB

(h. 30)

Ta có hai tia OM và OA đối nhau do đó điểm O nằm giữa hai điểm A và M (dấu hiệu 1). Khi đó

$$AM = AO + OM = 2 + 1 = 3 \text{ (cm)}.$$



Hình 30

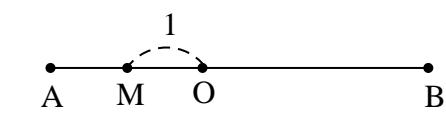
- Trường hợp điểm M nằm trên tia OA

(h. 31).

Ta có  $OM < OA$  (vì  $1 < 2$ ) nên điểm M nằm giữa O và A (dấu hiệu 3).

Khi đó  $OM + MA = OA$ .

Suy ra  $AM = OA - OM = 2 - 1 = 1 \text{ (cm)}$ .



Hình 31

**Ví dụ 2.** Trên tia Ox lấy ba điểm A, B, C sao cho  $OA = 3cm$ ,  $OB = 5cm$ ,  $OC = 7cm$ .

Chúng tỏ rằng:

- a) Điểm A không phải là trung điểm của đoạn thẳng OB;
- b) Điểm B là trung điểm của đoạn thẳng AC.

**Giải.** (h. 32)

a) Trên tia Ox có  $OA < OB$  ( $3 < 5$ ) nên điểm A nằm giữa hai điểm O và B (dấu hiệu 3).

Ta có  $OA + AB = OB$

Suy ra  $AB = OB - OA = 5 - 3 = 2 \text{ (cm)}$ .

Vậy  $OA > AB$  ( $3 > 2$ ) nên A không phải là trung điểm của đoạn thẳng OB.

b) Trên tia Ox có  $OB < OC$  ( $5 < 7$ ) nên điểm B nằm giữa hai điểm O và C (dấu hiệu 3).

Ta có  $OB + BC = OC$ , suy ra  $BC = OC - OB = 7 - 5 = 2 \text{ (cm)}$ .

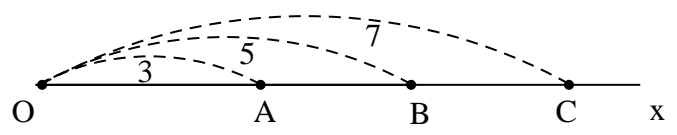
Vậy  $AB = BC$  ( $= 2cm$ ). (1)

Trên tia Ox có  $OA < OB < OC$  ( $3 < 5 < 7$ ) nên điểm B nằm giữa hai điểm A và C (dấu hiệu 4) (2)

Từ (1) và (2) suy ra điểm B là trung điểm của AC.

**Ví dụ 3.** Cho đoạn thẳng AB. Gọi O là điểm bất kì nằm giữa A và B. Lấy điểm M nằm giữa O và A, điểm N nằm giữa O và B.

- a) Chứng tỏ rằng  $MN = \frac{AB}{2}$ .



Hình 32



b) Áp dụng: Cho biết  $MN = 3\text{cm}$ , tính độ dài  $AB$ .

**Giải.** (h.33)

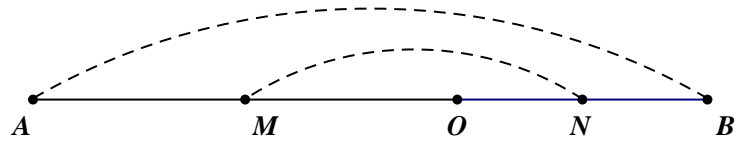
a) Điểm  $M$  là trung điểm của  $OA$  nên  $M$  nằm giữa  $O$  và

$A$ ,  $OM = \frac{OA}{2}$ . Điểm  $N$  là trung điểm của  $OB$  nên

$N$  nằm giữa  $O$  và  $B$ ,  $ON = \frac{OB}{2}$ .

Mặt khác điểm  $O$  nằm giữa  $A$  và  $B$

(đề bài cho) nên  $O$  nằm giữa  $M$  và  $N$  (dấu hiệu 5)



Hình 33

Suy ra  $MN = OM + ON = \frac{OA}{2} + \frac{OB}{2} = \frac{OA + OB}{2} = \frac{AB}{2}$

b) Ta có  $MN = \frac{AB}{2}$  nên  $3 = \frac{AB}{2}$ , suy ra  $AB = 6(\text{cm})$

### C. BÀI TẬP

**1.42.** Vẽ đoạn thẳng  $AB = 2a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ . Lấy điểm  $N$  nằm giữa  $A$  và  $B$  sao cho  $AN < NB$ . Hỏi trong các điểm  $A, M, N$  và  $B, M, N$  điểm nào nằm giữa hai điểm còn lại?

**1.43.** Cho đoạn thẳng  $AB$  và trung điểm  $O$  của nó. Lấy các điểm  $M$  và  $N$  thuộc đoạn thẳng  $AB$  sao cho  $AM = BN < \frac{AB}{2}$ . Hỏi điểm  $O$  có phải trung điểm của  $MN$  không? Vì sao?

**1.44.** Cho đoạn thẳng  $AB = 7\text{cm}$ . Lấy các điểm  $I$  và  $K$  nằm giữa  $A$  và  $B$  sao cho  $AI = 3\text{cm}, BK = a(a < 4\text{cm})$ .

a) Tính độ dài  $IK$

b) Xác định giá trị của  $a$  để  $K$  là trung điểm của  $IB$

**1.45.** Trên tia  $Ox$  lấy hai điểm  $A$  và  $B$  sao cho  $OA = a, OB = b$  với  $a < b$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ . Chứng tỏ rằng  $OM = \frac{a+b}{2}$ .

**1.46.** Cho đoạn thẳng  $AB = 6\text{cm}$ . Lấy hai điểm  $E$  và  $F$  nằm giữa  $A$  và  $B$  sao cho  $AE + BF = 7\text{cm}$ . Tính độ dài  $EF$ .

**1.47.** Trên tia  $Ox$  lấy ba điểm  $A, B, C$  sao cho  $OA = 1,5\text{cm}; OB = 3\text{cm}; OC = 4,5\text{cm}$ . Hỏi trên hình vẽ có điểm nào là trung điểm của một đoạn thẳng?

**1.48.** Cho đoạn thẳng  $AB = 4cm$ . Trên tia đối của tia  $AB$  lấy điểm  $O$  sao cho  $OA = 2cm$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $OA$  và  $OB$ . Hãy so sánh:

a)  $OA$  với  $MN$

b)  $OM$  và  $AN$

**1.49.** Cho đoạn thẳng  $AB = 6cm$ . Lấy điểm  $E$  nằm giữa hai điểm  $A$  và  $B$  sao cho  $AE = \frac{2}{3}AB$ . Gọi  $F$  là trung điểm của  $AE$ .

a) Chứng tỏ rằng  $E$  là trung điểm của  $BF$

b) Gọi  $O$  là trung điểm của  $EF$ , giải thích vì sao  $O$  cũng là trung điểm của  $AB$ .

**1.50.** Cho đoạn thẳng  $AB$  là trung điểm  $O$  của nó. Trên tia đối của tia  $BA$  lấy điểm  $M$  bất kì ( $M$  khác  $B$ ). Chứng tỏ rằng  $OM = \frac{MA + MB}{2}$

**1.51.** Cho đoạn thẳng  $AB$  và trung điểm  $O$  của nó. Gọi  $M$  là một điểm nằm giữa  $A$  và  $B$  nhưng không trùng với  $O$ . Chứng tỏ rằng  $OM = \left| \frac{MA - MB}{2} \right|$

## HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

### PHẦN SỐ HỌC

#### Chương I: ÔN TẬP VÀ BỔ TÚC VỀ SỐ TỰ NHIÊN

##### Chuyên đề 1

**1.1.** Tập hợp  $A = \{1; 2; 3\}$

Các cách viết đúng là:      a)  $I \in A$                       d)  $\{2; 3\} \subset A$

Các cách viết sai là:        b)  $\{I\} \in A$                       c)  $3 \subset A$

Sửa lại là:                      b)  $\{I\} \subset A$                       c)  $3 \in A$

**1.2.**  $A = \{2; 3; 7; 8\}, B = \{1; 3; 5; 7; 9\}$

a) Tập hợp  $A$  có 4 phần tử, tập hợp  $B$  có 5 phần tử

b)  $\emptyset, \{3; 7\}, \{3\}, \{7\}$

**1.3.** a)  $A = \{8\} \Rightarrow A$  có một phần tử

b)  $B = \emptyset \Rightarrow B$  không có phần tử nào

**1.4.** a) Số phần tử của  $A$  là:  $(98 - 10) : 2 + 1 = 45$

b) Số phần tử của  $B$  là:  $(70 - 10) : 3 + 1 = 21$

**1.5.** Xét dãy số  $2; 7; 12; 17; 22; \dots$

a) Quy luật: Dãy số cách đều với khoảng cách 5

b)  $22; 27; 32; 37; 42$

c) Gọi số hạng thứ 100 của dãy là  $x$ , ta có:  $(x - 2) : 5 + 1 = 100$

$\Rightarrow x = 497$ . Do vậy tổng 100 số hạng đầu của dãy là:

$$(2 + 497).100 : 2 = 24950$$

**1.6.**  $A = \{31; 33; 35; 37; 39; 41; 43; 45; 47; 49\}$

$B = \{0; 10; 20; 30; 40; 50; 60; 70; 80\}$

**1.7.** 660 chữ số

**1.8.** Viết liền nhau các số tự nhiên 123456...

a) 9 chữ số đầu tiên: 1, 2, ..., 9

44 số có hai chữ số tiếp theo: 10, 11, ..., 53.

⇒ Chữ số hàng đơn vị của số 53 ở hàng số:  $9 + 44.2 = 97$

Tương tự, chữ số hàng đơn vị của số 328 ở hàng số 876; chữ số hàng đơn vị của số 1587 ở hàng số 5241.

b) Chữ số viết ở hàng thứ 427 là chữ số 1 (chữ số hàng trăm của số 179)

**1.9.** Có 24 phân tử

Các số có chữ số  $a$  ở vị trí hàng nghìn là:

$\overline{abcd}, \overline{abdc}, \overline{acbd}, \overline{acdb}, \overline{adbc}, \overline{adcb}$  (có 6 số)

Vì vai trò của  $a, b, c, d$  như nhau nên khi đặt  $b, c, d$  lần lượt là chữ số hàng nghìn ta được các kết quả tương tự. Vậy số các số tạo thành là:  $6.4 = 24$

**1.10.** a) 17 số. Trong đó:

- Có 16 số với một chữ số 5: 15; 25; 35; 45; 65; 75; 85; 95

51; 52; 53; 54; 56; 57; 58; 59

- Có một số với hai chữ số: 55

b) 36 số

- Từ số 12 đến số 19: có 8 số

- Từ số 23 đến số 29: có 7 số

...

- Từ số 78 đến số 79: có 2 số

- Số 89: có một số

Vậy có tất cả  $1 + 2 + \dots + 7 + 8 = (1 + 8).8 : 2 = 36$  số thoả mãn

c) 45 số

Có 90 số có hai chữ số, 9 số có hai chữ số bằng nhau (11, 22, ..., 99), 36 số có chữ số hàng chục nhỏ hơn hàng đơn vị. Suy ra số các số có chữ số hàng chục lớn hơn hàng đơn vị là:  $90 - 9 - 36 = 45$

*Chú ý:* Có thể giải thích tương tự như câu b.

**1.11.** 8 số: *I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII*

- Số nhỏ nhất là số *I* (có giá trị là 1)

- Số lớn nhất là số *VIII* (có giá trị 8)

**1.12.** a) 81 phân tử

Có 90 số có hai chữ số, 9 số có hai chữ số giống nhau.

$\Rightarrow$  có  $90 - 9 = 81$  số thoả mãn

b) 648 phân tử

**1.13.** 106 điểm 10

- 5 bạn được 4 điểm 10  $\Rightarrow$  có  $5.4 = 20$  (điểm 10)
- $15 - 5 = 10$  bạn được 3 điểm 10  $\Rightarrow$  có  $10.3 = 30$  (điểm 10)
- $41 - 15 = 26$  bạn được 2 điểm 10  $\Rightarrow$  có  $26.2 = 52$  (điểm 10)
- $45 - 41 = 4$  bạn được 1 điểm 10  $\Rightarrow$  có  $4.1 = 4$  (điểm 10)

Vậy tất cả có :  $20 + 30 + 52 + 4 = 106$  (điểm 10)

**1.14.** 4321

Gọi số cần tìm là  $\overline{abc1}$  ( $0 < a, b, c \leq 9; a \neq 0$ )

Theo đề ra ta có:  $\overline{abc1} = \overline{1abc} + 2889$

$$\Rightarrow 10.\overline{abc} + 1 = 1000 + \overline{abc} + 2889$$

$$\Rightarrow 9.\overline{abc} = 3888 \Rightarrow \overline{abc} = 432$$

Vậy số cần tìm là 4321.

**1.15.** 63 và 6

Gọi số trừ là  $x$  ( $x \in N^*$ )

Theo đề ra ta có :  $\overline{x3} - x = 57$

$$\Rightarrow 10.x + 3 - x = 57$$

$$\Rightarrow 9.x = 54 \Rightarrow x = 6$$

Vậy hai số cần tìm là 63 và 6

**1.16.** Có 10 đáp số: 109; 119; 129; ...; 199

Gọi số cần tìm là  $\overline{abc}$  ( $0 < a, c \leq 9; 0 \leq b \leq 9$ )

Theo đề ra ta có:  $\overline{cba} = 792 + \overline{abc}$

$$\Rightarrow 100c + 10b + a = 792 + 100a + 10b + c$$

$$\Rightarrow c - a = 8 \Rightarrow c = 9; a = 1$$

Vậy số cần tìm là  $\overline{1b9}$  với  $b = 0; 1; 2; \dots; 9$

**1.17.** 77

Gọi số cần tìm là  $\overline{ab}$  ( $0 \leq a, b \leq 9; a \neq 0$ )

Theo đề ra ta có:  $\overline{1ab1} = 23.\overline{ab}$

$$\Rightarrow 1000 + 10.\overline{ab} + 1 = 23.\overline{ab}$$

$$\Rightarrow 13.\overline{ab} = 1001 \Rightarrow \overline{ab} = 77$$

Vậy số cần tìm là 77

**1.18.** 14285

Gọi số cần tìm là  $x = \overline{abcde}$  ( $0 \leq a, b, c, d, e \leq 9; a \neq 0$ )

Theo đề ra ta có:  $\overline{7abcde} = 5.\overline{abcde7}$

$$\Rightarrow 700000 + \overline{abcde} = 5.(10.\overline{abcde} + 7)$$

$$\text{Hay } 700000 + x = 5.(10.x + 7)$$

$$\Rightarrow 49.x = 699965 \Rightarrow x = 14285$$

Vậy số cần tìm là 14285

**1.19.** 35

Gọi số cần tìm là  $\overline{ab}$  ( $0 \leq a, b \leq 9; a \neq 0$ )

Theo đề ra ta có:  $\overline{7ab} = \overline{ab7}.2 + 21$

$$\Rightarrow 700 + \overline{ab} = 2.(10.\overline{ab} + 7) + 21$$

$$\Rightarrow 700 + \overline{ab} = 20.\overline{ab} + 14 + 21$$

$$\Rightarrow 19.\overline{ab} = 665 \Rightarrow \overline{ab} = 35$$

Vậy số cần tìm là 35

1.20. a) 9000 số

b) 3000 số

*Chú ý*: Trong ba số tự nhiên có chữ số tận cùng là 4 liên tiếp nhau (chẳng hạn: 14, 24, 34), có duy nhất một số chia hết cho 3.

-----

**Chuyên đề 2**

1.21. a) 30000

b) 303

1.22. a) 8

b)  $2^{101} - 1$

Đặt  $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$

$$\Rightarrow 2.A = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{99} + 2^{100} + 2^{101}$$

$$\Rightarrow 2.A - A = 2^{101} - 1$$

Vậy  $A = 2^{101} - 1$

c)  $(5^{101} - 5) : 24$

Đặt  $B = 5 + 5^3 + 5^5 + \dots + 5^{97} + 5^{99}$

$$\Rightarrow 5^2.B = 5^3 + 5^5 + \dots + 5^{97} + 5^{99} + 5^{101}$$

$$\Rightarrow 25.B - B = 5^{101} - 5$$

Vậy  $B = (5^{101} - 5) : 24$

1.23. 154

1.24. a)  $243^5 = 3.27^8$

b)  $15^{12} < 81^3 \cdot 125^5$

c)  $78^{12} - 78^{11} > 78^{11} - 78^{10}$

1.25.  $A = (1 + 3 + 3^2) + (3^3 + 3^4 + 3^5) + \dots + (3^{1998} + 3^{1999} + 3^{2000})$

$$= 1.13 + 3^3.13 + \dots + 3^{1998}.13 : 13$$

1.26. a)  $x = 10$

b)  $x = 79$

1.27. a)  $x = 2$

b)  $x = 4$

1.28. a)  $x = 4$

b)  $x = \emptyset$

1.29. a)  $x \in \{5; 6\}$

b)  $x \in \{0; 1\}$

1.30.  $x \in \{2; 3\}$

1.31. 4662

**Chú ý:** Mỗi chữ số xuất hiện ở hàng trăm, hàng chục, hàng đơn vị hai lần, nên tổng các số tạo thành là:  $2 \cdot (666 + 777 + 888) = 4662$

1.32. 23 và 12

Thêm 19 đơn vị vào số thứ nhất thì tích tăng thêm 19 lần số thứ hai, ứng với  $713 - 276 = 437$

Số thứ hai là  $437 : 19 = 23 \Rightarrow$  số thứ nhất là  $276 : 23 = 12$

**Chú ý:** Có thể giải bằng cách gọi hai số là  $a$  và  $b$

1.33. Số bị trừ là 16; số trừ là 10

1.34. Số bị chia là 377; số chia là 13.

1.35. Có 5 đáp số

Số chia	54	27	18	9	6
Thương	1	2	3	6	9

**Chú ý:** Số chia lớn hơn số dư

1.36. 85; 28; 9

1.37. Thương mới bằng 3 lần thương cũ cộng 2

Gọi số bị chia là  $x$  và thương của phép chia  $x$  cho 48 là  $q$

Theo đề ra ta có:  $x = 48 \cdot q + 41 = 16 \cdot (3q) + 16 \cdot 2 + 9 = 16 \cdot (3q + 2) + 9$

$\Rightarrow x$  chia cho 16 được thương là  $3q + 2$  và dư 9

1.38. Số bị chia nhỏ nhất là 413, số chia nhỏ nhất là 46

1.39. 29158 và 9412

1.40. 12

-----



**Chuyên đề 3**

**1.41.**  $A$  chia hết cho 3, cho 6, cho 13 và  $A$  không chia hết cho 9

**1.42.** Gọi bốn số tự nhiên liên tiếp là  $a; a+1; a+2; a+3$ . Tổng của bốn số đó bằng  $4a+6$ , không chia hết cho 4 vì  $4a:4$  và  $6 \not\vdots 4$

**1.43.**  $a$  chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4

**1.44.**  $\overline{aaa} = a.111 = 3.37.a:37$

**1.45.** a)  $1+4+4^2+4^3+\dots+4^{2012} = 21.(1+4^3+\dots+4^{2010}):21$

b)  $1+7+7^2+7^3+\dots+7^{101} = 8.(1+7^2+7^4+\dots+7^{100}):8$

c)  $2+2^2+2^3+\dots+2^{100} = 2.(1+2+2^2+2^3+2^4)+2^6.(1+2+2^2+2^3+2^4)$

$$+\dots+2^{96}.(1+2+2^2+2^3+2^4) = 31.(2+2^6+\dots+2^{96}):31$$

Mặt khác  $2+2^2+2^3+\dots+2^{100} = (2+2^3)+(2^2+2^4)+\dots+(2^{97}+2^{99})+(2^{98}+2^{100})$

$$= (2.5+2^2.5+2^5.5+2^6.5+\dots+2^{97}.5+2^{98}.5):5$$

**1.46.** a) Vì  $\overline{abc} - \overline{\text{deg}}:13 \Rightarrow \overline{abc} - \overline{\text{deg}} = 13k \Rightarrow \overline{abc} = \overline{\text{deg}} + 13k$  (với  $k \in N$ )

Do vậy:  $\overline{abc \text{ deg}} = 1000.\overline{abc} + \overline{\text{deg}} = 1000.(\overline{\text{deg}} + 13k) + \overline{\text{deg}}$

$$= (1001.\overline{\text{deg}} + 1000.13.k):13$$

b)  $\overline{abc} = 100a + 10b + c = 98a + 7b + (2a + 3b + c)$

Vậy nếu  $\overline{abc}:7$  thì  $(2a + 3b + c):7$

**1.47.**  $a = 3$

$$\overline{20a20a20a} = \overline{20a}.1000000 + \overline{20a}.1000 + \overline{20a} = \overline{20a}.1001001:7$$

$$\Rightarrow \overline{20a}:7 \text{ (vì } 1001001 \not\vdots 7)$$

$$\Rightarrow (200 + a):7 \Rightarrow 196 + (a + 4):7 \Rightarrow (a + 4):7, \text{ vì } 196:7$$

$$\Rightarrow a = 3$$

**1.48.** a)  $n \in \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$

b)  $n \in \{1;3\}$

c)  $n \in \{3;9\}$

1.49. a)  $n \in \{6;7;8;11;14;23\}$

b)  $n = 0$

c)  $n = 2$

1.50.  $5.(13a + 8b) - 13.(5a + 3b) = b : 2012$

Tương tự:  $8.(5a + 3b) - 3.(13a + 8b) = a : 2012$

-----

**Chuyên đề 4**

1.51. a) 650

b) 305

c) 306

d) 630

1.52. 324; 234; 342; 432.

1.53. a)  $(10^{33} + 8) : 2$  vì  $10^{33} : 2$  và  $8 : 2$

Mặt khác  $10^{33} = 10...00$  có tổng các chữ số bằng 1

$\Rightarrow 10^{33} + 8 = 100...08$  có tổng các chữ số bằng 9  $\Rightarrow (10^{33} + 8) : 9$

Vậy  $10^{33} + 8$  là số chẵn chia hết cho 9 nên cũng chia hết cho 18

b) Tương tự câu a), ta có:  $(10^{10} + 14) : 2$  và 3

1.54. Dù  $n$  là số chẵn hay số lẻ thì trong hai số tự nhiên liên tiếp  $n + 7$  và  $n + 8$  luôn có một số là số chẵn nên tích của  $(n + 7)(n + 8)$  là một số chẵn.

$\Rightarrow (n + 7)(n + 8)$  luôn chia hết cho 2.

1.55. Gọi ba số chẵn liên tiếp là  $2a - 2; 2a; 2a + 2$  (với  $a \in N^*$ )

Tích ba số:  $(2a - 2).2a.(2a + 2) = 8(a - 1)a(a + 1)$

Vì  $(a - 1)a(a + 1) : 3! \Leftrightarrow (a - 1)a(a + 1) : 6$  nên

$(2a - 2).2a.(2a + 2) = 8(a - 1)a(a + 1) : 8.6$

Vậy  $(2a - 2).2a.(2a + 2) : 48$

1.56. Với  $n \in N$

a) Nếu  $n > 1$  thì  $5^n$  có hai chữ số tận cùng là 25  $\Rightarrow 5^n - 1$  có hai chữ số tận cùng là 24, chia hết cho 4. Vậy  $(5^n - 1):4$

b) Ta có:  $10^n - 1 = 99\dots9$  ( $n$  chữ số 9)

$$\Rightarrow 10^n + 18n - 1 = 99\dots9 + 18n = 9(11\dots1 + 2n) \quad (n \text{ chữ số } 1)$$

Ta có:  $(11\dots1 + 2n):3$  (vì  $11\dots1 + 2n$  có tổng các chữ số bằng  $3n:3$ )

$$\Rightarrow (10^n + 18n - 1):9.3 \text{ hay } (10^n + 18n - 1):27$$

**1.57.** 66666.

**1.58.** a)  $\overline{1x85y}$  chia hết cho 2 và 5 nên  $y = 0$ .

$$\text{Vì } \overline{1x85y}:3 \text{ nên } (1+x+8+5):3 \text{ hay } (x+14):3 \Rightarrow x = 4.$$

$$\text{Vậy } x = 4; y = 0.$$

b) có 11 đáp số:

$x$	0	1	2	3	3	4	5	6	7	8	9
$y$	3	2	1	0	9	8	7	6	5	4	3

c)  $x = 7$  và  $y = 0$ .

**1.59.** a)  $\overline{52ab}$  chia cho 5 dư 4  $\Rightarrow b \in \{4; 9\}$ .

$$\text{Lại vì } \overline{52ab}:2 \text{ nên } b = 4.$$

$$\text{Vì } \overline{52ab}:9 \text{ nên } a+11:9 \Rightarrow a = 7.$$

$$\text{Vậy } a = 7; b = 4.$$

b)  $a = 8$  và  $b = 2$ .

**1.60.** 24.

**1.61.**  $a = 6$ .

$$\text{Vì } \overline{aaaaa96}:8 \text{ và } 3 \text{ nên } \overline{a96}:8 \text{ và } (5a+15):3.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a:3 \\ \overline{a96}:8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in \{3; 6; 9\} \\ \overline{a96}:8 \end{cases} \Rightarrow a = 6.$$

**1.62.**  $a = 2$ .

Vì  $\overline{1aaa1} : 11$  nên  $[(a+a) - (1+a+1)] : 11$  hay  $(a-2) : 11 \Rightarrow a = 2$ .

**1.63.** Ta có:  $(1978a + 2012b) - (78a + 10b) = (1900a + 2002b) : 11$ .

Mà  $2002 : 11$  nên  $2002b : 11 \Rightarrow 1900a : 11 \Rightarrow a : 11$ .

Vì  $78a + 10b : 11$  và  $78a : 11 \Rightarrow 10b : 11 \Rightarrow b : 11$ .

**1.64.** 1089.

Gọi số cần tìm là  $\overline{abcd}$ , ta có:  $9 \cdot \overline{abcd} = \overline{dcba}$

Suy ra:  $\begin{cases} a = 1 \\ d = 9 \end{cases}$  và  $(b+c+1) : 9 \Rightarrow b+c \in \{8; 17\}$ .

Vì  $9 \cdot \overline{1bc9} = \overline{9cb1}$  nên  $9b < 10 \Rightarrow b \in \{0; 1\}$ .

- Nếu  $b = 1$  và  $c = 7$ . Thử lại ta thấy  $9 \cdot \overline{1179} \neq \overline{9711}$ : loại.
- Nếu  $b = 0$  và  $c = 8$ . Thử lại ta thấy  $9 \cdot \overline{1089} = \overline{9801}$ : thỏa mãn.

Vậy số cần tìm là 1089.

**1.65.** 675.

Ta có:  $\overline{abc} - \overline{cba} = (n^2 - 1) - (n - 2)^2$

$$\Leftrightarrow 99(a - c) = 4n - 5$$

$$\Rightarrow (4n - 5) : 99 \tag{1}$$

Vì  $n^2 = \overline{abc} + 1 \Rightarrow 101 < n^2 < 1000 \Rightarrow 10 < n < 32$

$$\Rightarrow 35 < 4n - 5 < 123 \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra:  $4n - 5 = 99 \Rightarrow 4n = 104 \Rightarrow n = 26$ .

Do vậy:  $\overline{abc} = 675$ . Thử lại, ta có  $\overline{cba} = 567 = (26 - 2)^2$  là đúng.

Vậy  $\overline{abc} = 675$ .

**1.66.**  $n = 83$ .

Vì  $n + s(n) = 94 \Rightarrow n$  là số có hai chữ số.

Giả sử  $n = \overline{ab}$  (với  $a, b \in \mathbb{N}$ ,  $a \neq 0$ ), ta có:

$$n + s(n) = \overline{ab} + (a + b) = 11a + 2b = 94$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a:2 \\ 76 \leq 11a \leq 94 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a:2 \\ a \in \{7; 8; 9\} \end{cases} \Rightarrow a = 8.$$

Từ đó:  $11.8 + 2b = 94 \Rightarrow b = 3.$

Vậy  $n = 83.$

-----

**Chuyên đề 5**

**1.67.**  $\{4; 12; 20; 60\}.$

**1.68.** Vì  $(2x-1).(y+3) = 12$  nên  $2x-1; y+3 \in U(12).$

Lại vì  $2x-1$  là số lẻ nên ta có:

$2x-1$	1	3
$y+3$	12	4
$x$	1	2
$y$	9	1

**1.69.**

- Vì trong ba số tự nhiên liên tiếp  $p-1; p; p+1$  luôn có một số chia hết cho 3, mà  $p$  là số nguyên tố lớn hơn 3 nên trong hai số  $p-1; p+1$  có một số chia hết cho 3  
 $\Rightarrow (p-1)(p+1):3$  (1)

- Vì  $p$  là số nguyên tố lớn hơn 3 nên  $p$  là số lẻ  $\Rightarrow p-1$  và  $p+1$  là hai số chẵn liên tiếp  $\Rightarrow (p-1)(p+1):8$  (2)

Từ (1), (2) và  $(3,8) = 1$  nên  $(p-1)(p+1):3.8$  hay  $(p-1)(p+1):24.$

**1.70.**  $a \in \{3; 9\}.$

Vì  $\overline{23a} \leq 239$  và  $15^2 < 239 < 16^2$  nên để  $\overline{23a}$  là số nguyên tố thì nó phải không chia hết cho các số nguyên tố 2; 3; 5; 7; 11; 13.

Vì  $\overline{23a} \not\div 2$  nên  $a \in \{1; 3; 5; 7; 9\}.$

Vì  $\overline{23a} \not\div 5$  nên  $a \in \{1; 3; 7; 9\}.$

Vì  $\overline{23a} \not\div 3$  nên  $a \in \{3; 9\}.$

Thử lại ta có 233 và 239 thỏa mãn.

**1.71.** 60.

Ta có:  $12 = 12.1 = 6.2 = 4.3 = 3.2.2$

Do vậy, ta chỉ cần tìm số nhỏ nhất trong các số:  $2^{11}$ ;  $2^5.3$ ;  $2^3.3^2$ ;  $2^2.3.5$

Đáp số:  $2^2.3.5 = 60$ .

**1.72.** Số có ba chữ số tận cùng là 104 chia hết cho 8, vì  $104:8$

$\Rightarrow$  Số đó có ước là  $2^3 \Rightarrow$  có ít nhất 4 ước là 1; 2; 4; 8.

**1.73.** 2 và 307.

Vì tổng hai số bằng 309 nên trong hai số có một số chẵn, một số lẻ. Vì hai số đều là số nguyên tố nên số chẵn là 2, suy ra số lẻ là 307. Kiểm tra lại ta có 307 là số nguyên tố.

**1.74.**  $p = 3$ .

**1.75.**  $p = 5$ .

**1.76.** Vì  $p$  là số nguyên tố lớn hơn 3 nên  $p$  chia 3 dư 1 hoặc dư 2.

- Nếu  $p = 3k + 2$  thì  $p + 4 = 3k + 6 : 3 \Rightarrow$  loại.

- Nếu  $p = 3k + 1$  thì  $p + 7 = 3k + 8 \not\equiv 3$

$\Rightarrow 2(p + 7) \not\equiv 3$  hay  $2p + 14 \not\equiv 3$ .

Trong ba số tự nhiên liên tiếp  $2p + 14$ ;  $2p + 15$ ;  $2p + 16$  luôn có một số chia hết cho 3, mà  $2p + 14 \not\equiv 3$  và  $2p + 15 \not\equiv 3$  nên  $(2p + 16) : 3$  hay  $2(p + 8) : 3$

$\Rightarrow (p + 8) : 3$ , vì  $(2, 3) = 1 \Rightarrow p + 8$  là hợp số.

**1.77.** Số  $3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{2012}$  là hợp số, vì nó lớn hơn 3 và chia hết cho 3.

**1.78.** Giả sử  $a$  là số tự nhiên lớn hơn 4 nằm giữa hai số nguyên tố sinh đôi  $\Rightarrow a$  là số chẵn  $\Rightarrow a : 2$ .

Mặt khác, vì trong ba số tự nhiên liên tiếp luôn có một số chia hết cho 3 nên  $a : 3$  (vì số liền trước và liền sau là các số nguyên tố lớn hơn 3 nên không chia hết cho 3).

Vậy  $a : 2.3$  hay  $a : 6$ .

**1.79.** 3; 5; 7.

Giả sử ba số lẻ liên tiếp đều là số nguyên tố là  $p$ ;  $p + 2$ ;  $p + 4$ .

- Nếu  $p = 3$  thì  $p + 2 = 5$  và  $p + 4 = 7$  đều là số nguyên tố (thỏa mãn).

- Nếu  $p > 3$  thì  $p$  chia 3 dư 1 hoặc dư 2.

- Nếu  $p = 3k + 1$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ) thì  $p + 2 = 3k + 3 : 3 \Rightarrow$  loại.
- Nếu  $p = 3k + 2$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ) thì  $p + 4 = 3k + 6 : 3 \Rightarrow$  loại.

Vậy chỉ có duy nhất một bộ ba số nguyên tố là lẻ liên tiếp đó là 3; 5; 7.

**1.80.**  $n = 11$ .

**1.81.** Theo đề ra:  $\overline{abc}$  chia hết cho 3 và 7.

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c = [(99a - 9b - 3c) + (a + 19b + 4c)] : 3$$

$$\Rightarrow (a + 19b + 4c) : 3.$$

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c = [(98a - 28b - 7c) + 2(a + 19b + 4c)] : 7$$

$$\Rightarrow (a + 19b + 4c) : 7.$$

**1.82.**  $a = 6$ .

Ta có:  $1 + 2 + \dots + n = \overline{aaa} \Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 3.37.a \Leftrightarrow n(n+1) = 2.3.a.37$ .

Vì  $6 \leq 2.3.a \leq 54$  nên để  $2.3.a.37$  là tích của hai số tự nhiên liên tiếp thì  $2.3.a = 38$  (loại) hoặc  $2.3.a = 36 \Rightarrow a = 6$ . Khi đó  $n = 36$ .

Thử lại, ta có:  $1 + 2 + \dots + 36 = 666$  là đúng.

Vậy  $a = 6$ .

-----

**Chuyên đề 6**

**1.83.**  $ƯC(48, 120, 150) = ƯC(2^4.3, 2^3.3.5, 2.3.5^3) = ƯC(6) = \{1; 2; 3; 6\}$ .

$$BC(26, 78) = BC(2.13, 2.3.13) = B(78) = \{0; 78; 156; \dots\} = \{78k | k \in \mathbb{N}\}.$$

**1.84.** Gọi  $d = (a, b) \Rightarrow a : d$  và  $b : d \Rightarrow (5a - 4b) : d$

$$\Leftrightarrow 5(4n + 3) - 4(5n + 1) = (20n + 15) - (20n + 4) = 11 : d$$

$$\Rightarrow d = 11 \text{ (vì } d \neq 1).$$

**1.85.** a)  $a = 495; b = 315$ .

$$\text{Vì } (a,b) = 45 \text{ nên } \begin{cases} a = 45m \\ b = 45n \end{cases}, \text{ với } (m,n) = 1.$$

$$\text{Thay vào } 7a = 11b, \text{ ta có: } 7.45m = 11.45n \Leftrightarrow 7m = 11n.$$

$$\text{Vì } (m,n) = 1 \text{ nên } m = 11 \text{ và } n = 7.$$

$$\text{Vậy } a = 45.11 = 495 \text{ và } b = 45.7 = 315.$$

$$\text{b) Vì } [a,b] = 300 \text{ và } [a,b].(a,b) = ab \Rightarrow (a,b) = 15$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 15m \\ b = 15n \end{cases}, \text{ với } (m,n) = 1.$$

$$\text{Thay vào } ab = 4500, \text{ ta được: } 15^2 mn = 4500 \Rightarrow mn = 20.$$

Vì  $(m,n) = 1$  nên ta có:

$m$	20	1	5	4
$n$	1	20	4	5
$a$	300	15	75	60
$b$	15	300	60	75

$$\text{c) Gọi } d = (a,b) \Rightarrow \begin{cases} a = dm \\ b = dn \end{cases}, \text{ với } (m,n) = 1. \text{ Khi đó } [a,b] = \frac{ab}{d} = mnd.$$

$$\text{Vì } [a,b] = 6(a,b) \text{ và } a + b = 30 \text{ nên } \begin{cases} mnd = 6d \\ md + nd = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mn = 6 \\ d(m+n) = 30 \end{cases}$$

Vì  $(m,n) = 1$  và  $m+n \in U(30)$ , nên ta có:

$m$	3	2
$n$	2	3
$d$	6	6
$a$	18	12
$b$	12	18

$$\mathbf{1.86.} \text{ Gọi } d = (a,b) \Rightarrow \begin{cases} a = dm \\ b = dn \end{cases}, \text{ với } (m,n) = 1. \text{ Khi đó } [a,b] = \frac{ab}{d} = mnd.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} a + 2b = 48 \\ (a,b) + 3[a,b] = 114 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d(m+2n) = 48 \\ d(1+3mn) = 114 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \in UC(48, 114) = \{1; 2; 3; 6\}.$$



- Nếu  $d = 1$  thì  $\begin{cases} m + 2n = 48 \\ 3mn + 1 = 114 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m + 2n = 48 \\ 3mn = 113 \end{cases}$  : loại.
- Nếu  $d = 2$  thì  $\begin{cases} m + 2n = 24 \\ 3mn + 1 = 57 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m + 2n = 24 \\ 3mn = 56 \end{cases}$  : loại
- Nếu  $d = 3$  thì  $\begin{cases} m + 2n = 16 \\ 3mn + 1 = 38 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m + 2n = 16 \\ 3mn = 37 \end{cases}$  : loại
- Nếu  $d = 6$  thì  $\begin{cases} m + 2n = 8 \\ 3mn + 1 = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m + 2n = 8 \\ mn = 6 \end{cases}$ .

Vì  $(m, n) = 1$  nên ta có:

$m$	6	2
$n$	1	3
$a$	36	12
$b$	6	18

**1.87.** 8 đáp số.

Gọi  $d = (a, b) \Rightarrow \begin{cases} a = dm \\ b = dn \end{cases}$ , với  $(m, n) = 1$ . Khi đó  $[a, b] = \frac{ab}{d} = mnd$ .

Ta có:  $ƯCLN(a, b) + BCNN(a, b) = 15 \Leftrightarrow d + mnd = 15$

$$\Leftrightarrow d(mn + 1) = 15 \Rightarrow d \in Ư(15) = \{1; 3; 5; 15\}.$$

- Nếu  $d = 1$  thì  $mn = 14$ . Vì  $(m, n) = 1$  nên ta có:

$m$	14	1	7	2
$n$	1	14	2	7
$a$	14	1	7	2
$b$	1	14	2	7

- Nếu  $d = 3$  thì  $mn = 4$ . Vì  $(m, n) = 1$  nên ta có:

$m$	4	1
$n$	1	4
$a$	12	3
$b$	3	12

- Nếu  $d = 5$  thì  $mn = 2$ . Vì  $(m, n) = 1$  nên ta có:

$m$	2	1
$n$	1	2
$a$	10	5
$b$	5	10

- Nếu  $d = 15$  thì  $mn = 0$ : loại.

**1.88.** 65.

Gọi số đã cho là  $a$ . Vì  $a$  chia cho 21 dư 2 nên  $(a+19):21$  (1)

Vì  $a$  chia cho 12 dư 5 nên  $(a+19):12$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra:  $(a+19):[21,12]$  hay  $(a+19):84$ .

Vậy  $a$  chia cho 84 dư  $84 - 19 = 65$ .

**1.89.**  $a \in \{49; 133; 217; 301; 385\}$ .

**1.90.** 959.

Gọi số cần tìm là  $a$  ( $5 \leq a < 1000$ ). Theo đề ra ta có:  $a+1$  chia hết cho 2; 3; 4; 5; 6

$$\Rightarrow a+1 = 60k, \text{ với } k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow a = 60k - 1.$$

Vì  $a < 1000$  nên  $60k - 1 < 1000 \Rightarrow 60k < 1001 \Rightarrow k$  lớn nhất bằng 16.

$\Rightarrow$  Giá trị lớn nhất của  $a$  là  $60 \cdot 16 - 1 = 959$ .

**1.91.** a) Gọi  $d = (a, a-b) \Rightarrow a:d$  và  $(a-b):d \Rightarrow b:d$ .

$$\Rightarrow (a,b):d \text{ hay } 1:d \Rightarrow d = 1.$$

b) Chứng minh tương tự câu a.

**1.92.** a) Gọi  $d = (2n+1, 2n+3) \Rightarrow (2n+1):d$  và  $(2n+3):d$

$$\Rightarrow [(2n+3) - (2n+1)]:d \text{ hay } 2:d \Rightarrow d \in \{1; 2\}.$$

Mà  $2n+1$  là số lẻ nên  $d$  lẻ. Vậy  $d = 1$ .

$$\text{b) Gọi } d = (2n+5, 3n+7) \Rightarrow \begin{cases} (2n+5):d \\ (3n+7):d \end{cases}$$

$$\Rightarrow [3(2n+5) - 2(3n+7)]:d \Rightarrow 1:d \Rightarrow d = 1.$$

$$\text{1.93. Gọi } d = (11a+2b, 18a+5b) \Rightarrow \begin{cases} 11a+2b:d \\ 18a+5b:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow [11(18a+5b) - 18(11a+2b)]:d \text{ hay } 19b:d$$

và  $[5(11a + 2b) - 2(18a + 5b)] : d$  hay  $19a : d$ .

$\Rightarrow (19a, 19b) : d$  hay  $19(a, b) : d \Rightarrow 19 : d$ .

Vậy  $d = 1$  hoặc  $d = 19$ , tương ứng hai số  $11a + 2b$  và  $18a + 5b$  hoặc nguyên tố cùng nhau hoặc có một ước chung là 19.

**1.94.** Có 3 cách chia lớp thành 2; 3 hoặc 6 tổ.

**1.95.** 615 người.

**1.96.** 239 học sinh.

**1.97** 275.

Gọi số học sinh của trường đi tham quan là  $a$  ( $200 < a < 300$ ).

Theo đề ra ta có: Nếu thêm 5 học sinh nữa thì xếp vừa đủ 35 hoặc 40 học sinh lên một xe, tức là  $a + 5$  chia hết cho 35 và 40.

$\Rightarrow a + 5 \in BC(35, 40) \Rightarrow (a + 5) : BCNN(35, 40)$

Ta có:  $BCNN(35, 40) = BCNN(5.7, 5.8) = 5.7.8 = 280$ .

Do đó:  $(a + 5) : 280$  hay  $a + 5 = 280.k$ , với  $k \in \mathbb{N}^*$ .

$\Rightarrow a = 280k - 5$ .

Vì  $200 < a < 300$  nên  $200 < 280k - 5 < 300 \Leftrightarrow 205 < 280k < 305$

$\Rightarrow 1 \leq k < 2 \Rightarrow k = 1$ .

Do vậy  $a = 275$ .

**1..98.**  $(a, b) = 9$ . Đặt  $d = (a, b)$ .

Vì  $a$  và  $b$  đều chia hết cho 9 nên  $d : 9$  (1)

Ta có:  $a + b = 1111111110 = \frac{10^{10} - 10}{9} \Rightarrow 9a + 9b = 10^{10} - 10$ .

Mặt khác:  $10b + a = 9999999999 = 10^{10} - 1$ .

Suy ra:  $(10b + a) - (9a + 9b) = (10^{10} - 1) - (10^{10} - 10)$

$\Leftrightarrow b - 8a = 9 \Rightarrow 9 : d$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $d = 9$ .

**1.99.** Vì  $a$  là số chính phương khác 0 nên  $a \in \{1; 4; 9\}$ .

Vì  $\overline{9b}$  không là số chính phương, với mọi  $b$  nên  $a \in \{1; 4\}$ .

Mặt khác, vì  $\overline{ad}$  là số chính phương nên  $\overline{ad} \in \{16; 49\} \Rightarrow d \in \{6; 9\}$

Vì  $\overline{cd}$  là số chính phương và  $d \in \{6; 9\}$  nên  $\overline{cd} \in \{16; 36; 49\}$

$\Rightarrow c \in \{1; 3; 4\}$ .

- Nếu  $a = 1$  thì  $d = 6 \Rightarrow c \in \{1; 3\}$ . Khi đó  $\overline{abcd}$  là  $\overline{1b16}$  hoặc  $\overline{1b36}$ , nên  $\overline{abcd}$  là  $\overline{x4^2}$  hoặc  $\overline{x6^2}$ . Thử lại ta thấy duy nhất  $1936 = 44^2$  thỏa mãn.

- Nếu  $a = 4$  thì  $d = 9 \Rightarrow c = 4$ . Khi đó  $\overline{abcd} = \overline{4b49}$  là  $\overline{x3^2}$  hoặc  $\overline{x7^2}$ . Thử lại ta thấy không có số nào thỏa mãn.

Vậy các chữ số cần tìm là:  $a = 1, b = 9, c = 3, d = 6$ .

### Chuyên đề nâng cao 1

**1.100.a)** Giả sử  $\overline{abab}$  là số chính phương, tức là:  $n^2 = \overline{abab} = 101 \cdot \overline{ab}$

$\Rightarrow \overline{ab} : 101 : \text{vô lí}$ . Vậy  $\overline{abab}$  không là số chính phương.

b). Giả sử  $\overline{abcabc}$  là số chính phương, tức là:  $n^2 = \overline{abcabc}$

$\Rightarrow n^2 = 1001 \cdot \overline{abc} = 7 \cdot 143 \cdot \overline{abc} \Rightarrow \overline{abc} : 1001 : \text{vô lí}$

**1.101.** Ta có  $A = 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{20}$

Nên  $2A = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{21}$

$\Rightarrow 2A - A = 2^{21} - 2^2$

Do đó  $A + 4 = 2^{21} - 2^2 + 4 = 2^{21} = (2^{10})^2 \cdot 2$  không là số chính phương vì 2 không phải là số chính phương.

**1.102**  $S = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 111a + 111b + 111c = 3 \cdot 37(a + b + c)$

Để  $S$  là số chính phương thì  $a + b + c = 3 \cdot 37 \cdot \lambda^2 (\lambda \in \mathbb{N})$ . Điều này vô lí vì  $a + b + c \leq 27$ .

Vậy  $S$  không là số chính phương

**1.103.**  $2304 = 48^2$

**1.104.** a) Không phải là số chính phương vì số mới tạo thành chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9.

b) Không phải là số chính phương vì số mới tạo thành chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9

**1.105.** a) Tổng các chữ số của  $A$  là 903 nên  $A:3$ , do đó là hợp số

b)  $A$  chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9 nên  $A$  không là số chính phương. (Hoặc  $A$  có số gốc là 3 nên không phải là số chính phương)

c)  $A$  không là số chính phương nên số các ước không thể là lẻ. Vì vậy  $A$  không thể có 35 ước.

**1.106.** Tổng các chữ số của các số lập được là 15 chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9 nên mỗi số lập được không phải là số chính phương:

**1.107.** Vì  $n$  có hai chữ số nên  $10 \leq n \leq 99 \Rightarrow 21 \leq 2n + 1 \leq 199$ . Các số chính phương lẻ trong khoảng trên là: 25, 49, 81, 121, 169.

$2n+1$	25	49	81	121	169
$n$	12	24	40	60	84
$3n+1$	37	73	121	181	253

Ta thấy chỉ có trường hợp  $3n+1 = 121$  là số chính phương.

Vậy  $n=40$

**1.108.** 20;45;80

**1.109.** Ta có  $\overline{ab} - \overline{ba} = (10a + b) - (10b + a) = 9a - 9b = 9(a - b) = 3^2(a - b)$

$\Rightarrow$  Để  $\overline{ab} - \overline{ba}$  là số chính phương thì  $a - b$  phải là số chính phương.

Ta thấy  $1 \leq a - b \leq 8$  nên  $a - b \in \{1; 4\}$

1. Nếu  $a - b = 1$  thì  $\overline{ab} \in \{21; 32; 43; 54; 65; 76; 87; 98\}$ .

Loại các hợp số 21;32;54;65;76;87;98, còn lại 43 là số nguyên tố.

2. Nếu  $a - b = 4$  thì  $\overline{ab} \in \{51; 62; 73; 84; 95\}$ . Loại các hợp số 51;62;84;95, còn lại 73 là số nguyên tố.

Vậy  $\overline{ab}$  bằng 43 hoặc 73

**1.110.** a) Gọi tổng các chữ số của  $n$  và của số  $2n$  là  $k \Rightarrow$  ta có  $(n-k):9$  và  $(2n-k):9$ ; do đó  $[(2n-k)-(n-k)]:9$  hay  $n:9$

b) Số chính phương phải tìm  $:5$ ;  $:9$  và có ba chữ số nên có đáp số là 225 và 900

**1.111.**  $n^2 = \overline{ab} + \overline{ba}$ ; có 8 đáp số 29; 38; 47; 56; 65; 74; 83; 92

**1.112.**

$$A = \underbrace{11\dots1}_{50} \underbrace{00\dots0}_{50} + \underbrace{11\dots1}_{50}$$

chữ số tận cùng của số chính phương là  $a+3$  chỉ có thể bằng 4; 5; 6; 9

$$C = \underbrace{11\dots1}_{50}$$

Tương ứng ta có  $n^2$  bằng 2134; 3245; 4356; 7689.

Chỉ có  $4356 = 66^2$  còn các trường hợp còn lại loại

**1.113,** Số  $5n+4$  tận cùng là 4 hoặc 9. Ta xét hai trường hợp

Trường hợp 1: Số  $5n+4$  tận cùng là 4 thì  $(5n+4)^2$  tận cùng là 6. Cần tìm các số có dạng  $\overline{6**6}$  là bình phương của một số tận cùng bằng 4. Không có số nào thỏa mãn vì  $74^2 = 5476 < \overline{6**6} < 7056 = 84^2$

Trường hợp 2: Số  $5n+4$  tận cùng là 9 thì  $(5n+4)^2$  tận cùng là 1. Cần tìm các số dạng  $\overline{1**1}$  là bình phương của một số tận cùng bằng 9.

Ta thấy  $29^2 = 841 < \overline{1**1} < 2401 = 49^2$  còn  $39^2 = 1521$

Vậy số cần tìm là 1521

**1.114.** Ta có  $A = \underbrace{11\dots1}_{50 \text{ chữ số } 1} \underbrace{00\dots0}_{50 \text{ chữ số } 0} + \underbrace{11\dots1}_{50 \text{ chữ số } 1}$

Đặt  $C = \underbrace{11\dots1}_{50 \text{ chữ số } 1}$  thì  $B = 2C$

Suy ra  $A = C \cdot 10^{50} + C$

Do đó  $A - B = C \cdot 10^{50} + C - 2C = C(10^{50} - 1)$

Ta có  $10^{50} - 1 = \underbrace{99\dots9}_{50} = 9C$

Vậy  $A - B = C \cdot 9C = 9C^2 = (3C)^2 = \underbrace{99\dots9}_{50}$  là số chính phương

**1.115.** Giả sử  $A = \underbrace{11\dots1}_{1995} 100\dots0$

Tổng các chữ số của A bằng:

$\underbrace{1+1+\dots+1}_{50}+0+0+\dots+0=1995$  là một số chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9 nên A

không là số chính phương.

**1.116.** Với  $n=1$  thì  $1!=1=1^2$

Với  $n=2$  thì  $1!+2!=3$  không là số chính phương

Với  $n=3$  thì  $1!+2!+3!=9=3^2$  là số chính phương

Với  $n \geq 4$  thì  $1!+2!+\dots+n!$  tận cùng bằng 3 nên không là số chính phương. ( Thật vậy  $1!+2!+3!+4!=33$ , còn  $5!+6!+\dots$  đều tận cùng bằng 0.

Vậy  $n=1$  hay  $n=3$

-----

### Chuyên đề nâng cao 2

**1.117.** Xét 2014 có dạng  $1,11,111,\dots, \underbrace{11\dots1}_{2014 \text{ số } 1}$ . Theo nguyên lý Dirichlet thì tồn tại hai số có

cùng số dư khi chia cho 2013. Giả sử hai số đó là  $a = \underbrace{11\dots1}_{n \text{ số } 1}$ ,  $b = \underbrace{11\dots1}_{k \text{ số } 1}$  với  $n > k$ .

Khi đó  $a - b = \underbrace{11\dots1}_{n-k \text{ số } 1} \cdot 10^k : 2013$ .

Vì  $(2007, 10^k) = 1$  nên số  $c = \underbrace{11\dots1}_{n-k \text{ số } 1}$  chia hết cho 2013

**1.118.** Ta có  $288 = 3^2 \cdot 2^5$

1. Chứng minh  $P : 3^2$

Xét 4 số  $a_1, a_2, a_3, a_4$ , : Ta thấy tồn tại hai số có cùng số dư khi chia cho 3, giả sử  $a_1$  và  $a_2 \Rightarrow (a_1 - a_2) : 3$

Lại xét  $a_2, a_3, a_4, a_5$  trong 4 số này lại tồn tại 2 số có cùng số dư khi chia cho 3, giả sử  $a_4$  và  $a_5 \Rightarrow (a_4 - a_5) : 3$

Do vậy  $P : 9$  (1)

2. Chứng minh  $P : 2^5$

Trong 5 số đã cho có 3 số cùng tính chẵn lẻ.

- Nếu có 3 số chẵn, 2 số lẻ, chẳng hạn là :  $a_1 = 2k_1, a_2 = 2k_2, a_3 = 2k_3, a_4 = 2k_4 + 1, a_5 = 2k_5 + 1$

Khi đó:  $P = 16(k_1 - k_2)(k_1 - k_3)(k_2 - k_3)(k_4 - k_5).M$

Trong đó 3 số  $k_1, k_2, k_3$  có 2 số cùng tính chẵn lẻ, chẳng hạn  $k_1$  và  $k_2$ , thì  $(k_1 - k_2):2$ . Vậy  $P:32$

- Nếu có 3 số lẻ, 2 số chẵn thì chứng minh tương tự ta cũng có  $P:32$

Vậy trong mọi trường hợp ta đều có  $P:32$  (2)

Từ (1), (2) và  $(9,32)=1$  suy ra  $P:9,32$  hay  $P:288$  (đpcm).

**1.119.** Viết  $n+1$  số lấy ra dưới dạng

$a_1 = 2^{k_1} b_1, a_2 = 2^{k_2} b_2, \dots, a_{n+1} = 2^{k_{n+1}} b_{n+1}$  trong đó  $b_1, b_2, \dots, b_{n+1}$  là các số lẻ,

Ta có:  $1 \leq b_1, b_2, \dots, b_{n+1} \leq 2n-1$ . Mặt khác trong khoảng từ 1 đến  $2n-1$  có đúng  $n$  số lẻ nên tồn tại hai số  $m, n$  sao cho  $b_n = b_m$ . Khi đó, trong hai số  $a_n$  và  $a_m$  có một số là bội của số kia (đpcm)

**1.120.**

1. Nếu  $a_1 = a_2 = \dots = a_{100} = 2$  thì ta chọn 50 số bất kì đều có tổng bằng 100.

2. Nếu  $a_1 \neq a_2$  thì ta lập dãy sau

$a_1, a_2, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_1 + a_2 + \dots + a_{99}$  (các số hạng này có giá trị từ 1 đến 199).

- Nếu tồn tại một số hạng nào trong dãy chia hết cho 100 thì số hạng đó bằng 100
- Nếu không có số hạng nào chia hết cho 100 thì trong 100 số này khi chia cho 100 sẽ có hai số hạng có cùng số dư. Hiệu của chúng cho ta tổng cần tìm.

**1.121.** Giả sử 69 số đã cho là  $1 \leq a_1 + a_3 < a_1 + a_4 < \dots < a_1 + a_{69} \leq 100$ . Khi đó  $a_1 \leq 32$ . Xét hai dãy sau:

$$1 < a_1 + a_3 < a_1 + a_3 < \dots < a_1 + a_{69} \leq 132(1)$$

$$1 \leq a_3 - a_2 < a_4 - a_2 < \dots < a_{69} - a_2 \leq 132(2)$$

Từ (1) và (2) ta có 134 số hạng có giá trị từ 1 đến 132, suy ra có 2 số bằng nhau mỗi số thuộc một dãy, chẳng hạn:  $a_1 + a_m = a_n - a_2$  (với  $3 \leq m < n \leq 69$ ) tức là ta tìm được 4 số  $a_1; a_2; a_n; a_m$  với  $a_1 < a_2 < a_m$  mà  $a_1 + a_2 + a_m = a_n$  (đpcm)

**1.122.** Giả sử 39 số tự nhiên liên tiếp đó là  $a_1 < a_2 < \dots < a_{39}$ .

Trong 20 số hạng đầu tiên của dãy này sẽ có hai số tận cùng là 0 và có một số (trong hai số này) có chữ số đứng trước số tận cùng khác 9. Gọi số này là  $N$ .

Xét các số  $N+1, N+2, \dots, N+19$  thuộc 39 số đã cho. Khi đó:



$S(N+i) = S(N) + i$  với  $i = 1, 2, \dots, 9$  và  $S(N+19) = S(N) + 10$ .

(kí hiệu  $S(a)$  là tổng các chữ số của  $a$ ).

Trong 11 số tự nhiên liên tiếp  $S(N), S(N)+1, \dots, S(N)+9, S(N)+10$  luôn có một số chia hết cho 11, chẳng hạn:  $S(N+m):11$  với  $m \in \{1; 2; \dots; 9; 19\}$

Vậy  $N+m$  là số thỏa mãn.

**1.123.** Gọi 15 số tự nhiên sắp xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn là :  $a_1, a_2, \dots, a_{15}$ .

Xét dãy số:  $b_1 = a_2 - a_1, b_2 = a_3 - a_1, \dots, b_{14} = a_{15} - a_1$ . Các số hạng của dãy số này có giá trị từ 1 đến 27 và đôi một khác nhau.

$\Rightarrow$  Dãy số  $a_1, a_2, \dots, a_{15}; b_1, b_2, \dots, b_{14}$  có 29 số hạng nhưng chỉ nhận 28 giá trị khác nhau (từ 1 đến 28). Theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại hai số bằng nhau, chẳng hạn:  $b_m = a_n (1 \leq m \leq 14, 1 \leq n \leq 15)$

Hay  $a_{m+1} - a_1 = a_n \Leftrightarrow a_{m+1} = a_1 + a_n$ .

- Nếu  $n = 1$  thì  $a_{m+1} = 2a_1$

- Nếu  $n \neq 1$  thì 3 số  $a_1, a_n, a_{m+1}$  phân biệt và  $a_{m+1} = a_1 + a_n$ .

Vậy ta chỉ việc chọn 3 số  $a_1, a_n, a_{m+1}$  hoặc 2 số  $a_1, a_{m+1}$  sẽ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

**1.124.** Là bài tổng quát của bài 1.123.

**1.125.** Mỗi người trong số 5 người có khả năng về số người quen (từ 0 đến 4). Ta xét hai trường hợp sau:

1. Nếu có một người không quen ai trong số 4 người còn lại thì rõ ràng không có ai quen cả 4 người. Như vậy, 5 người mà chỉ có 4 khả năng về số người quen (từ 0 đến 3) nên theo nguyên lí Dirichlet có ít nhất hai người có cùng số người quen.

2. Nếu mỗi người đều có ít nhất một người quen. Khi đó 5 người mà chỉ có 4 khả năng về số người quen (từ 1 đến 4), theo nguyên lí Dirichlet có ít nhất hai người có cùng số người quen.

**1.126.** Là bài toán tổng quát của bài 1.125

**1.127.** Giả sử 6 đội bóng đá là A, B, C, D, E, F. Xét đội A, Vì A phải đấu từ 0 đến 5 trận nên theo nguyên lí Dirichlet ta suy ra. Hoặc A đã đấu hoặc A chưa đấu với ít nhất 3 đội khác. Không mất tính tổng quát, giả sử A đã đấu với B, C, D.

- Nếu B, C, D từng cặp chưa đấu với nhau thì bài toán được chứng minh.

- Nếu B, C, D có 2 đội đã đấu với nhau, ví dụ là C thì 3 đội A, B, C từng cặp đã đấu với nhau

Như vậy bất cứ lúc nào cũng có 3 đội trong đó từng cặp đã đấu với nhau hoặc chưa đấu với nhau trận nào.

-----

## Chương II. SỐ NGUYÊN

### Chuyên đề 1

2.1. a)

b)  $Z' \cap N = N^*$

2.2. Khẳng định: “Nếu  $a \in Z$  thì  $|a| \in Z^*$ ” là sai

Sửa lại là: “Nếu  $a \in Z$  thì  $|a| \in N$  hoặc “Nếu  $a \in Z^*$  thì  $|a| \in N^*$ ”

2.3. a)  $a = 9$                       b)  $a \in \emptyset$                       c)  $a = 5$

Chú ý:  $-a < -b \Leftrightarrow a > b$

2.4. a)  $-9$ .                      b)  $-1$                       c)  $-9876543210$ .                      d)  $-1023456789$ .

**Chú ý:** Với  $a \in N$ , nếu  $a$  càng lớn thì  $-a$  càng nhỏ,  $a$  càng nhỏ thì  $-a$  càng lớn.

2.5. Ta xét hai trường hợp:

- Nếu  $a \geq 0$  thì  $|a| = a$ , do đó:  $|a| \geq a$

- Nếu  $a < 0$  thì  $|a| = -a > 0$ , do đó:  $|a| > 0 > a$

Vậy  $|a| \geq a$ , với mọi  $a \in Z$  và  $|a| = a \Leftrightarrow a \geq 0$

2.6. Ta xét hai trường hợp:

- Nếu  $x \geq 0$  thì  $|x| = x$ , nên từ  $|x| = a$  suy ra  $x = a$

- Nếu  $x < 0$  thì  $|x| = -x$ , nên từ  $|x| = a$  suy ra  $-x = a$  hay  $x = -a$

Vậy  $|x| = a \Leftrightarrow x = \pm a$

**Chú ý:** Vì  $|x| \geq 0$  nên nếu  $a < 0$  thì không tồn tại  $x$  thỏa mãn  $|x| = a$ .

2.7. Ta xét 4 trường hợp sau:

- Nếu  $\begin{cases} x \geq 0 \\ a \geq 0 \end{cases}$  thì  $\begin{cases} |x| = x \\ |a| = a \end{cases}$  Do đó:  $|x| = |a| \Leftrightarrow x = a$

- Nếu  $\begin{cases} x \leq 0 \\ a \leq 0 \end{cases}$  thì  $\begin{cases} |x| = -x \\ |a| = -a \end{cases}$ . Do đó:  $|x| = |a| \Leftrightarrow -x = -a \Leftrightarrow x = a$

- Nếu  $\begin{cases} x \geq 0 \\ a \leq 0 \end{cases}$  thì  $\begin{cases} |x| = x \\ |a| = -a \end{cases}$ . Do đó:  $|x| = |a| \Leftrightarrow x = -a \Leftrightarrow x = -a$

- Nếu  $\begin{cases} x \leq 0 \\ a \geq 0 \end{cases}$  thì  $\begin{cases} |x| = -x \\ |a| = a \end{cases}$ . Do đó:  $|x| = |a| \Leftrightarrow -x = a \Leftrightarrow x = -a$

Vậy  $|x| = |a| \Leftrightarrow x = \pm a$

**2.8.** a)  $|x| + |-23| = |17| \Leftrightarrow |x| + 23 = 17 \Leftrightarrow |x| = -6$ : vô nghiệm.

b)  $|-5| \cdot |x| = |-20| \Leftrightarrow 5 \cdot |x| = 20 \Leftrightarrow |x| = 4 \Leftrightarrow x = \pm 4$ .

**2.9.** a)  $|x| = |-14| \Leftrightarrow |x| = 14 \Leftrightarrow x = \pm 14$

Vì  $x > 0$  nên  $x = 14$ .

b)  $|x| = |23| \Leftrightarrow |x| = 23 \Leftrightarrow x = \pm 23$

Vì  $x < 0$  nên  $x = -23$ .

**2.10.** a)  $|x| < -5 \Leftrightarrow x \in \emptyset$ , vì  $|x| \geq 0$  với mọi  $x$ .

b)  $12 \leq |x| < 15 \Leftrightarrow \begin{cases} 12 \leq x < 15 \\ -15 < x \leq -12 \end{cases}$

Vì  $x \in \mathbb{Z}$  nên  $x \in \{12; 13; 14; -14; -13; -12\}$

**2.11.**  $A = \{x \in \mathbb{Z} | -3 < x \leq 7\} = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$

$B = \{x \in \mathbb{Z} | 3 \leq |x| < 7\} = \{-6; -5; -4; -3; 3; 4; 5; 6\}$

$C = \{x \in \mathbb{Z} | |x| > 5\} = \{\pm 6; \pm 7; \pm 8; \dots\}$

Do vậy:  $A \cap B = \{3; 4; 5; 6\}$ ,  $B \cap C = \{-6; 6\}$ ,  $C \cap A = \{6; 7\}$

**2.12.** a) Vì  $|x| \geq 0$  và  $|y| \geq 0$  nên  $|x| + |y| \geq 0$  và

$$|x| + |y| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = 0 \\ |y| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

b)  $|x| + |y| = 2$ . Ta có các trường hợp sau:

$ x $	0	2	1
$ y $	2	0	1
$x$	0	$\pm 2$	$\pm 1$
$y$	$\pm 2$	0	$\pm 1$

**2.13.** Ta có:  $|x| \geq 0 \Rightarrow |x| + 7 \geq 7$  hay  $P \geq 7$ , với mọi  $x \in \mathbb{Z}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 7 ( kí hiệu:  $P_{\min} = 7$ ) khi  $x = 0$ .

**2.14.** Ta có:  $|x| \geq 0 \Rightarrow -|x| \leq 0 \Rightarrow -|x| + 9 \leq 0 + 9$  hay  $Q \leq 9$ , với mọi  $x \in \mathbb{Z}$ .

Vậy giá trị lớn nhất của Q là 9 ( kí hiệu:  $Q_{\max} = 9$ ) khi  $x = 0$ .

-----

### Chuyên đề 2

**2.15.** a) 0.

b) -2012.

**2.16.** a) -50

b) 8.

**2.17.** Vì  $|x| = 20 \Leftrightarrow x = \pm 20$  và  $|y| = 12 \Leftrightarrow y = \pm 12$  nên ta có 4 trường hợp sau:

- $x = 20$  và  $y = 12 \Rightarrow x - y = 20 - 12 = 8$
- $x = 20$  và  $y = -12 \Rightarrow x - y = 20 - (-12) = 20 + 12 = 32$
- $x = -20$  và  $y = 12 \Rightarrow x - y = -20 - 12 = -32$
- $x = -20$  và  $y = -12 \Rightarrow x - y = -20 - (-12) = -20 + 12 = -8$

**2.18.** a) 16.

b) 0.

**2.19.** a)  $37 + (\overline{-5a}) = -20 \Leftrightarrow 37 - \overline{5a} = -20 \Leftrightarrow \overline{5a} = 37 + 20 = 57$

$$\Rightarrow a = 7$$

b)  $10 \leq n \leq 99 \Rightarrow 21 \leq 2n + 1 \leq 199 \quad (\overline{-a9}) + 45 = 26 \Leftrightarrow \overline{a9} = 45 - 26 = 19 \Rightarrow a = 1$

**2.20.** a)  $x = 0$

b)  $x = -29$ .

**2.21.** a)  $|x| - (-2) = (-1) \Leftrightarrow |x| = -3 \Rightarrow$  không có số  $x$  nào thỏa mãn.

b)  $5 - |x + 1| = 29 \Leftrightarrow |x + 1| = 5 - 29 = -24 \Rightarrow$  không có số  $x$  nào thỏa mãn.

**2.22.** a)  $x + 23 = -1 \Rightarrow x = -24$ .

b)  $x + 99 = -99 \Rightarrow x = -198$ .

**2.23.** a)  $x = 1199$ .

Ta có  $(-1) + 3 + (-5) + 7 + \dots + x = 600$

$$\Leftrightarrow [(-1) + 3] + [(-5) + 7] + \dots + [-(x-2) + x] = 600 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2 + \dots + 2 = 600$$

Suy ra về trái có 300 số hạng là 2, tương ứng về trái của (\*) có 300 dấu ngoặc [ ].

Mặt khác, số dấu ngoặc [ ] bằng  $(x-3):4+1$ .

$$\Rightarrow (x-3):4+1=300 \Rightarrow x-3=299.4 \Rightarrow x=1199.$$

b)  $x = 4000$ .

Ngoài cách giải như câu a), ta có thể giải như sau.

Vì  $x$  là số tự nhiên chia hết cho 4 nên giả sử  $x = 4n (n \in \mathbb{N})$ . Khi đó

$$2 + (-4) + 6 + (-8) + \dots + (-x) = -2000$$

$$\Leftrightarrow [2 + 6 + \dots + (4n-2)] - [4 + 8 + \dots + 4n] = -2000$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 + (4n-2)}{2} \cdot n - \frac{4 + 4n}{2} \cdot n = -2000$$

$$\Leftrightarrow n = 1000.$$

Vậy  $x = 4 \cdot 1000 = 4000$ .

**2.24.**  $x \in \{-7; -6; 12; 13\}$ .

Vì  $x \in \mathbb{Z}$  nên  $|x-3| \in \mathbb{Z}$ . Từ  $9 \leq |x-3| < 11 \Rightarrow |x-3| \in \{9; 10\}$ .

+ Nếu  $|x-3| = 9 \Leftrightarrow x-3 = \pm 9 \Leftrightarrow x = 12$  hoặc  $x = -6$ .

+ Nếu  $|x-3| = 10 \Leftrightarrow x-3 = \pm 10 \Leftrightarrow x = 13$  hoặc  $x = -7$ .

Vậy  $x \in \{-7; -6; 12; 13\}$ .

**2.25.** Ta có  $1986 < |x+2| < 2012 \Leftrightarrow \begin{cases} 1986 < x+2 < 2012 \\ -2012 < x+2 < -1986 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1984 < x < 2010 \\ -2014 < x < -1988 \end{cases}$

Từ đó suy ra giá trị nguyên lớn nhất của  $x$  là 2009 và giá trị nguyên nhỏ nhất của  $x$  là -2013.

**2.26.** Gọi  $S$  là tổng của 31 số nguyên đã cho.

a) Chọn ra 3 số bất kì. Vì tổng của 3 số này là một số nguyên âm nên trong 3 số phải có ít nhất một số nguyên âm, kí hiệu số đó là  $a$ .

Chia 30 số còn lại thành 10 nhóm, mỗi nhóm có 3 số. Vì tổng 3 số trong mỗi nhóm là số âm nên tổng của tất cả 20 số (kí hiệu là  $b$ ) cũng là số âm.

Vì  $S = a + b$  nên  $S$  là số âm.

b)  $S$  là số nguyên dương.

\* Kết quả trên vẫn còn đúng nếu thay số 31 bằng số 32.

**2.27.** Thật vậy:

Chọn 6 số bất kì chia thành 2 nhóm, mỗi nhóm 3 số, từ đó chọn được hai số âm  $a, c$ . Tổng 30 số còn lại là số âm  $b$ . Vậy  $S = a + b + c$  là số âm.

Tổng các số trên bảng

$$1 + 2 + \dots + 2012 + 2013 = \frac{2013 \cdot (1 + 2013)}{2} = 2027091 \text{ là một số lẻ.}$$

Mỗi lần xóa hai số  $a, b$  (giả sử  $a > b$ ) rồi viết thay vào giá trị tuyệt đối của hai số  $|a - b| = a - b$  sẽ làm tổng các số trên bảng giảm đi  $(a + b) - (a - b) = 2b$ , là một số chẵn. Do đó, tổng các số còn lại trên bảng vẫn là số lẻ. Lặp lại cho đến khi trên bảng còn lại một số thì số đó vẫn là số lẻ, không thể là số 0.

---

### *Chuyên đề 3*

**2.28.** a) 400    b)  $-500$     c) 2012.

**2.29.** a) 55    b) 810

**2.30.** a)  $M = x + 60$                               b)  $N = -x - 26$                               c)  $P = 10$ .

**2.31.**  $x - y = -100$ .

**2.32.** a) Với  $x < 3$ ,  $|x - 3| + x - 5 = -(x - 3) + x - 5 = -2$ .

b) Với  $x \geq -2$ ,  $|2 + x| - (x + 1) = (x + 2) - (x + 1) = 1$ .

c) Với  $-1 \leq x \leq 2$ ,  $|x + 1| + |x - 2| = (x + 1) - (x - 2) = 3$ .

**2.33.**  $S = -(a - b - c) + (-c + a + b) - (a + b)$

$$S = -a + b + c - c + b + a - a - b$$

$$S = -a + b$$

$$S = -(a - b)$$

Với  $a - b = -1$ , ta có  $S = -1$ .

**2.34.** a)  $(a - b) + (c - d) - (a + c) = a - b + c - d - a - c = -b - d = -(b + d)$

b)  $(a - b) + (c - d) + (b + c) = a - b + c - d + b + c = a + d$ .

**2.35.** Chúng tỏ  $P + Q = 0$ .

**2.36.** Các số nguyên tố có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn 100 gồm 199 số là  $-99; -98; \dots; -1; 0; 1; 2; \dots; 99$

Suy ra các số chỉ thứ tự của các số nguyên là  $1; 2; 3; \dots; 199$ .

Chi tổng  $S$  cần tìm thành hai nhóm

- Nhóm các số nguyên từ  $-99$  đến  $99$ , có tổng bằng  $0$ .

- Nhóm các số thứ tự của các số nguyên có tổng bằng

$$1 + 2 + 3 + \dots + 199 = (1 + 199) \cdot 199 : 2 = 19900.$$

Vậy  $S = 19900$ .

**2.37.** a)  $x = -31$

b)  $x = 9$

c)  $x = -11$ .

**2.38.** a)  $-7 + |x - 4| = -3 \Leftrightarrow |x - 4| = 4 \Leftrightarrow x - 4 = \pm 4$ .

Vậy  $x \in \{0; 8\}$ .

b)  $13 - |x + 5| = 13 \Leftrightarrow |x + 5| = 0 \Leftrightarrow x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$ .

c)  $|x - 10| - (-12) = 4 \Leftrightarrow |x - 10| = -8 \Leftrightarrow x \in \emptyset$ .

**2.39.** a)  $|x + 2| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x + 2 \leq 5 \Leftrightarrow -5 - 2 \leq x \leq 5 - 2 \Leftrightarrow -7 \leq x \leq 3$ .

Vì  $x \in \mathbb{Z}$  nên  $x \in \{-7; -6; -5; \dots; 1; 2; 3\}$ .

b)  $|x + 1| > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 > 2 \\ x + 1 < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -3 \end{cases}$ .

**2.40.** a)  $|x - 1| - x + 1 = 0 \Leftrightarrow |x - 1| = x - 1 \Leftrightarrow x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ .

Vậy  $x \in \{1; 2; 3; \dots\}$  hay  $x \in \mathbb{N}^*$ .

b)  $|2 - x| + 2 = x \Leftrightarrow |2 - x| = x - 2 = -(2 - x) \Leftrightarrow 2 - x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$ .

Vậy  $x \in \{2; 3; 4; \dots\}$ .

c)  $|x + 7| = |x - 9| \Leftrightarrow x + 7 = \pm(x - 9)$ .

- $x + 7 = x - 9 \Leftrightarrow 0 \cdot x = -16 \Rightarrow$  không có giá trị nào của  $x$  thỏa mãn.
- $x + 7 = -(x - 9) \Leftrightarrow x - 7 = -x + 9 \Leftrightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$ .

Vậy  $x \in \{1\}$ .

**2.41.** a)  $|x + 25| + |-y + 5| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x + 25| = 0 \\ |-y + 5| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -25 \\ y = 5. \end{cases}$

b)  $|x - 40| + |x - y + 10| \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x - 40| = 0 \\ |x - y + 10| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 40 = 0 \\ x - y + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 50. \end{cases}$

**2.42.** a)  $A = 1001 + |x + 9| \leq 1001$ , với mọi  $x \in \mathbb{Z}$ .

Vậy  $A_{\max} = 1001$  khi  $|x + 9| = 0$  hay  $x = -9$ .

b)  $B = |y - 2| + 34 \geq 34$ , với mọi  $x \in \mathbb{Z}$ .

Vậy  $B_{\min} = 34$  khi  $|y - 2| = 0$  hay  $y = 2$ .

-----

**Chuyên đề 4**

**2.43.** a)  $-1000000$

b)  $-16733$

**2.44.** a)  $A = -5$

b)  $B = -36$ .

**2.45.** a) Với  $a + b = -3; x + y = 17$ , ta có

$$ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y) = (a + b)(x + y) = 17 \cdot (-3) = -51.$$

b)  $a + b = -7; x - y = -18$ , ta luôn có

$$ax - ay + bx - by = a(x - y) + b(x - y) = (x - y)(a + b) = (-7) \cdot (-18) = 126.$$

**2.46.**  $a(c - b) - b(-a - c) = ac - ab + ba + bc = ac + bc = c(a + b)$ .



2.47. a)  $x = -37$ ;

b)  $x \in \{-7; 8\}$ .

2.48. a)  $(x^2 + 1)(49 - x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 0 \\ 49 - x^2 = 0 \end{cases}$

Vì  $x^2 \geq 0$ , với mọi  $x \in \mathbb{Z}$  nên  $x^2 + 1 > 0$ . Từ đó không có  $x$  để  $x^2 + 1 = 0$ .

Ta có  $49 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 7^2 \Leftrightarrow x = \pm 7$ .

Vậy  $x \in \{-7; 7\}$ .

b)  $x \in \{-3; 3\}$ .

2.49. a)  $(x-2)(7-x) > 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-7) < 0 \Leftrightarrow x-2$  và  $x-7$  trái dấu.

Mặt khác, vì  $x-2 > x-7$  nên suy ra  $x-2 > 0 > x-7$ . Khi đó

$$\begin{cases} x-2 > 0 \\ x-7 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 7 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x < 7.$$

Vì  $x \in \mathbb{Z}$  nên  $x \in \{3; 4; 5; 6\}$ .

b)  $(x^2 - 13)(x^2 - 17) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 13$  và  $x^2 - 17$  trái dấu.

Mặt khác,  $x^2 - 13 > x^2 - 17$  nên  $x^2 - 13 > 0 > x^2 - 17$ . Khi đó

$$\begin{cases} x^2 - 13 > 0 \\ x^2 - 17 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 13 \\ x^2 < 17 \end{cases} \Leftrightarrow 13 < x < 17.$$

Vì  $x^2$  là số chính phương nên  $x^2 = 16 = 4^2 \Leftrightarrow x = \pm 4$ .

Vậy  $x \in \{-4; 4\}$ .

2.50. a)  $|6x - 3| = 15 \Leftrightarrow 6x - 3 = \pm 15 \Leftrightarrow 2x - 1 = \pm 5$

•  $2x - 1 = 5 \Leftrightarrow x = 3$ .

•  $2x - 1 = -5 \Leftrightarrow x = -2$ .

Vậy  $x \in \{-2; 3\}$ .

b)  $|7x - 2| \leq 19 \Leftrightarrow -19 \leq 7x - 2 \leq 19 \Leftrightarrow -17 \leq 7x \leq 21 \Leftrightarrow \frac{-17}{7} \leq x \leq 3$ .

Vậy  $x \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$ .

2.51. a)  $x.y = -28$ .

Có 12 trường hợp sau:

$x$	-28	-14	-7	-4	-2	-1	1	2	4	7	14	28
$y$	1	2	4	7	14	28	-28	-14	-7	-4	-2	-1

b)  $(2x-1)(4y-2) = -42 \Leftrightarrow (2x-1)(2y-1) = -21$ .

Có 8 trường hợp:

$2x-1$	-21	-7	-3	-1	1	3	7	21
$2y-1$	1	3	7	21	-21	-7	-3	-1
$x$	-10	-3	-1	0	1	2	4	11
$y$	1	2	4	11	-10	-3	-1	0

2.52.  $P = -(x+1)^2 - |3-y| + 35 \leq 35$ , với mọi  $x, y \in \mathbb{Z}$ .

$$\text{Vậy } P_{\max} = 35 \text{ khi } \begin{cases} (x+1)^2 = 0 \\ |3-y| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$$

2.53. Chọn 6 số bất kì. Vì tích của 6 số này là một số âm nên số các thừa số âm là số lẻ, do đó luôn tồn tại một trong 6 số là số âm, kí hiệu là  $a$ .

Chia 78 số còn lại (trừ số  $a$ ) thành 13 nhóm, mỗi nhóm có 6 số. Vì tích của các số trong mỗi nhóm là một số âm nên tích của tất cả 78 số là một số âm (vì tích của 13 số âm), kí hiệu là  $b$ .

Vậy tích của tất cả 79 số (là  $a.b$ ) là một số dương.

2.54. a)  $x + xy + y = 9 \Leftrightarrow x(1+y) + y = 9 \Leftrightarrow x(1+y) + (y+1) = 9+1$

$$\Leftrightarrow (x+1)(1+y) = 10.$$

Ta có 8 trường hợp sau:

$x+1$	-10	-5	-2	-1	1	2	5	10
$y+1$	-1	-2	-5	-10	10	5	2	1
$x$	-11	-6	-3	-2	0	1	4	9

$y$	$-2$	$-3$	$-6$	$-11$	$9$	$4$	$1$	$0$
-----	------	------	------	-------	-----	-----	-----	-----

b)  $xy - 2x - 3y = 5 \Leftrightarrow x(y - 2) - 3y + 6 = 5 + 6$

$$\Leftrightarrow x(y - 2) - 3(y - 2) = 11$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)(y - 2) = 11$$

Ta có 4 trường hợp sau

$x - 3$	$-11$	$-1$	$1$	$11$
$y - 2$	$-1$	$-11$	$11$	$1$
$x$	$-8$	$2$	$4$	$14$
$y$	$1$	$-9$	$13$	$3$

**Chuyên đề 5**

**2.55.**  $BC(12, -30) = B(60) = \{0; \pm 60; \pm 120; \dots\} = \{60k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

**2.56.**  $ƯC(-60, 45, -105) = Ư(15) = \{\pm 1; \pm 3; \pm 5; \pm 15\}$ .

**2.57.** a)  $(3n - 4)(3n + 19)$  là số chẵn, vì hiệu  $(3n + 19) - (3n - 4) = 23$  nên trong hai số  $3n - 4$  và  $3n + 19$  có một số chẵn, một số lẻ.

b)  $n^2 - n + 1 = n(n - 1) + 1$  là số lẻ, vì  $n(n - 1)$  là số chẵn.

**2.58.** a)  $a \in \{-9; -3; -1; 5\}$ .

b)  $a \in \{-5; -1; 1; 5\}$ .

c)  $a \in \{-2; -1; 0; 1\}$ .

**2.59.** a)  $P = a(a + 2) - a(a - 5) - 7 = 7(a - 1):7$ .

b)  $Q = (a - 2)(a + 3) - (a - 3)(a + 2) = 2a$  là một số chẵn.

**2.60.** a)  $(2x - 1)(y - 4) = -13 \Rightarrow 2x - 1$  và  $y - 4$  là ước của 13.

$2x-1$	$-13$	$-1$	$1$	$13$
$y-4$	$1$	$13$	$-13$	$-1$
$x$	$-6$	$0$	$1$	$7$
$y$	$5$	$17$	$-9$	$3$

b)  $(x = -1; y = 0)$  hoặc  $(x = 0; y = 5)$ .

c)  $5xy - 5x + y = 5 \Leftrightarrow (5x + 1)(y - 1) = 4 \Rightarrow$  tương tự câu b).

**2.61.** Vì  $(5x + 47y) - 5(x + 6y) = 17y : 17$  nên  $5x + 47y$  là bội của 17 khi và chỉ khi  $x + 6y$  là bội của 17.

**2.62.** a)  $x \in \{-2; 0; 2; 4\}$ ;

b)  $x \in \{-3; 0; 1; 4\}$ .

**2.63.** a)  $x^2 + 2 = x^2 + 2x - 2x - 4 + 6 = x(x + 2) - 2(x + 2) + 6 : (x + 2)$  khi và chỉ khi  $x + 2 \in U(6)$ .

Vậy  $x \in \{-8; -5; -4; -3; -1; 0; 1; 4\}$ .

b)  $x \in \{-1; 0; 2; 3\}$ .

**2.64.** Đặt  $N = (a - 1)(a + 2) + 12$ .

- Nếu  $a = 3k$  thì  $N = (3k - 1)(3k + 2) + 12$

$$\Rightarrow N \not\equiv 3 \text{ vì } \begin{cases} (3k - 1)(3k + 2) \not\equiv 3 \\ 12 \equiv 3 \end{cases} \Rightarrow N \not\equiv 9.$$

- Nếu  $a = 3k + 1$  thì  $N = 3k(3k + 3) + 12 = 9k(k + 1) + 12 \Rightarrow N \not\equiv 9$  vì  $\begin{cases} 9k(k + 1) \equiv 9 \\ 12 \not\equiv 9 \end{cases}$ .

- Nếu  $a = 3k + 2$  thì  $N = (3k + 1)(3k + 4) + 12$

$$\Rightarrow N \not\equiv 3 \text{ vì } \begin{cases} (3k + 1)(3k + 4) \not\equiv 3 \\ 12 \equiv 3 \end{cases} \Rightarrow N \not\equiv 9.$$

Vậy trong mọi trường hợp thì N không là bội của 9.

b) Chứng minh tương tự câu a).

*Chuyên đề nâng cao*

**2.65.** Ta có  $2^5 = 32 \equiv 1 \pmod{31} \Rightarrow (2^5)^{400} \equiv 1 \pmod{31}$  hay  $2^{2000} \equiv 1 \pmod{31}$ .

Mặt khác,  $2^{2000} \cdot 2^2 \equiv 1 \cdot 4 \pmod{31}$  hay  $2^{2002} \equiv 4 \pmod{31} \Rightarrow 2^{2002} - 4 \equiv 0 \pmod{31}$  hay  $(2^{2002} - 4) : 31$ .

**2.66.** Ta có  $5^2 \equiv 1 \pmod{12} \Rightarrow (5^2)^{35} \equiv 1 \pmod{12}$  hay  $5^{70} \equiv 1 \pmod{12}$ . (1)

$7^2 \equiv 1 \pmod{12} \Rightarrow 7(5^2)^{35} \equiv 1 \pmod{12}$  hay  $7^{50} \equiv 1 \pmod{12}$ . (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $5^{70} + 7^{50} \equiv 2 \pmod{12}$ .

Vậy  $5^{70} + 7^{50}$  chia cho 12 dư 2.

**2.67.** + Ta có  $3^5 = 243 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow (3^5)^{401} \equiv 1 \pmod{11}$  hay  $3^{2005} \equiv 1 \pmod{11}$ . (1)

Mặt khác,  $4^5 = 1024 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow (4^5)^{401} \equiv 1 \pmod{11}$  hay  $4^{2005} \equiv 1 \pmod{11}$ . (2)

Từ (1) và (2) suy ra A chia cho 11 dư 2.

+ Lại có  $3^3 = 27 \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow (3^3)^{668} \equiv 1 \pmod{13}$  hay  $3^{2004} \equiv 1 \pmod{13}$   
 $\Rightarrow 3^{2005} \equiv 3 \pmod{13}$ . (3)

Mặt khác  $4^3 = 64 \equiv -1 \pmod{13} \Rightarrow (4^3)^{668} \equiv 1 \pmod{13}$  hay  $4^{2004} \equiv 1 \pmod{13}$   
 $\Rightarrow 4^{2005} \equiv 4 \pmod{13}$  (4)

Từ (3) và (4) suy ra A chia cho 13 dư 7.

**2.68.** Ta có hai trường hợp:

- Nếu  $x \equiv 1 \pmod{3}$  thì  $x^2 \equiv 1 \pmod{3}$ .
- Nếu  $x \equiv 2 \pmod{3}$  thì  $x^2 \equiv 2^2 \pmod{3}$  hay  $x^2 \equiv 1 \pmod{3}$ .

Vậy ta luôn có  $x^2 \equiv 1 \pmod{3}$ .

**2.70.** Chứng minh tương tự bài 2.68.

Giả sử phản chứng rằng  $x \not\equiv 3$ . Áp dụng kết quả bài 2.68, ta có

$$x^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow y^2 \equiv 2 \pmod{3}$$

Điều này không xảy ra vì  $y \vdots 3$  thì  $y^2 \equiv 0 \pmod{3}$ ; còn nếu  $y \not\vdots 3$  thì  $y^2 \equiv 1 \pmod{3}$ .

Vậy  $x \vdots 3$ . Chứng minh tương tự ta cũng có  $y \vdots 3$ .

**2.71.** Đặt  $A = 1924^{2003^{2004^n}} + 1920$ . Ta có  $124 = 4 \cdot 31$ . Dễ thấy  $A$  chia hết cho 4.

Để chứng minh  $A$  chia hết cho 124, ta chứng minh  $A$  chia hết cho 31.

Thật vậy, vì  $1924 \equiv 2 \pmod{31}$  và  $1920 \equiv -2 \pmod{31}$  nên

$$A \equiv 2^{2003^{2004^n}} - 2 \pmod{31}. \quad (1)$$

Lại có  $2^5 = 32 \equiv 1 \pmod{31}$ . Ta cần tìm số dư của  $2003^{2004^n}$  khi chia cho 5.

Vì  $2004^n \vdots 4$  nên  $2004^n = 4k \Rightarrow 2003^{2004^n} = 2003^{4k}$ .

Vì  $2003 \equiv 3 \pmod{5} \Rightarrow 2003^{4k} \equiv 3^{4k} \equiv 81^k \equiv 1 \pmod{5}$ .

Vậy  $A = 2003^{2004^n} \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 2003^{2004^n} = 5m + 1$ .

Suy ra  $2^{2003^{2004^n}} = 2^{5m+1} = 2 \cdot (2^5)^m \equiv 2 \pmod{31}$ .

Thay vào (1) ta suy ra  $A \equiv 0 \pmod{31}$  hay  $A \vdots 31$ .

**2.72.** a)  $1991 \equiv 1 \pmod{10}$  nên  $1991^{1997} \equiv 1 \pmod{10}$ ;

$$1997 \equiv -3 \pmod{10} \Rightarrow 1997^2 \equiv 9 \pmod{10} \text{ hay } 1997^2 \equiv -1 \pmod{10}.$$

Suy ra  $1997^{1996} \equiv 1 \pmod{10} \Rightarrow (1991^{1997} - 1997^{1996}) \equiv 0 \pmod{10}$

Vậy  $(1991^{1997} - 1997^{1996}) \vdots 10$ .

b) Ta có:  $(2^9 + 2^{99}) \vdots 4$ . (1)

Mặt khác,  $2^9 = 512 \equiv 12 \pmod{25}$  và  $2^{10} = 1024 \equiv -1 \pmod{25}$

$$\Rightarrow (2^{10})^9 \equiv -1 \pmod{25} \quad \text{hay} \quad 2^{90} \equiv -1 \pmod{25} \Rightarrow 2^{90} \cdot 2^9 \equiv -1 \cdot 12 \pmod{25} \quad \text{hay} \\ 2^{90} \cdot 2^9 \equiv -12 \pmod{25}.$$

Do vậy  $(2^9 + 2^{99}) \equiv 0 \pmod{25}$  (2)

Từ (1), (2) và  $UCLN(4;25) = 1$  suy ra  $(2^9 + 2^{99}) : 100$ .

**2.73.** a) Ta có  $2^5 = 32 \equiv -1 \pmod{11}$ .

Vì  $2^{4n+1} = 2 \cdot 16^n$  mà  $16 \equiv 1 \pmod{5}$  nên  $2^{4n+1} \equiv 2 \pmod{5} \Rightarrow 2^{4n+1} = 5k + 2$  (với  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k$  chẵn). Khi đó,  $2^{2^{4n+1}} = 2^{5k+2} = 4 \cdot (2^5)^k \equiv 4 \pmod{11}$

$$\Rightarrow 2^{2^{4n+1}} + 7 \equiv 0 \pmod{11} \text{ hay } (2^{2^{4n+1}} + 7) : 11.$$

b) Ta có  $n \equiv 1 \pmod{n-1}$ , với mọi  $n > 1$ .

$$\Rightarrow n^k \equiv 1 \pmod{n-1}, \text{ với mọi } n > 1.$$

Do vậy  $n^{n-1} + n^{n-2} + \dots + n^2 + 1 \equiv 1 + 1 + \dots + 1 + 1 \pmod{n-1}$  (vế phải có  $n > 1$  số 1)

$$\Rightarrow n^{n-1} + n^{n-2} + \dots + n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{n-1}.$$

Vậy  $(n^{n-1} + n^{n-2} + \dots + n^2 + 1) : (n-1)$  (đpcm).

**2.74.** a) Ta có  $5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1} = 25 \cdot 5^n + 26 \cdot 5^n + 8 \cdot 64^n$ .

Vì  $64 \equiv 5 \pmod{59}$  nên  $64^n \equiv 5^n \pmod{59}$ .

Do đó  $5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1} \equiv 51 \cdot 5^n + 8 \cdot 5^n \pmod{59}$

$$\Leftrightarrow 5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1} \equiv 59 \cdot 5^n \pmod{59}$$

$$\Leftrightarrow 5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1} \equiv 0 \pmod{59}$$

Vậy  $(5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1}) : 59$ .

b) Ta có  $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$

Vì  $3^{2n} + 7 = 9^n + 7 \equiv 1 + 7 \pmod{8}$  hay  $3^{2n} + 7 \equiv 0 \pmod{8}$  (1)

$\Rightarrow (3^{2n} + 7) : 8$ . Mặt khác  $4^{2n} = 16^n : 8$  nên  $(4^{2n} - 3^{2n} - 7) : 8$

Vì  $4^{2n} \equiv 1 \pmod{3}; 7 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 4^{2n} - 7 \equiv 0 \pmod{3}$

Do đó  $(4^{2n} - 3^{2n} - 7) : 3$  (2)

Vì  $4^{2n} - 3^{2n} \equiv 0 \pmod{7}; 3^{2n} = 9^n \equiv 2^n \pmod{7}$

nên  $4^{2n} - 3^{2n} \equiv 0 \pmod{7}$ . Do đó  $(4^{2n} - 3^{2n} - 7) : 7$  (3)

Từ (1),(2),(3) và  $(8 \cdot 3 \cdot 7) = 1$  nên  $(4^{2n} - 3^{2n} - 7) : (8 \cdot 3 \cdot 7)$

**2.75** Rõ ràng với  $n = 0$  hoặc  $n = 1$  thì  $(9^n + 1) \not\equiv 100$

Với  $n \geq 2$ , ta xét hai trường hợp

$$n = 2k (k \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow 9^{2k} + 1 = 81^k + 1 \equiv 2 \pmod{10}$$

$$\Rightarrow (9^n + 1) \not\equiv 10 \Rightarrow (9^n + 1) \not\equiv 100$$

$$n = 2k (k \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow 9^n + 1 = 9^{2k+1} + 1 = 9 \cdot 81^k + 1 \equiv 2 \pmod{4}$$

$$\Rightarrow (9^n + 1) \not\equiv 4 \Rightarrow (9^n + 1) \not\equiv 100$$

Vậy  $(9^n + 1) \not\equiv 100$ , với mọi  $n \in \mathbb{N}$

**2.76** a) Ta có  $2^{3n+4} + 3^{2n+1} = 16 \cdot 8^n + 3 \cdot 9^n$

$$\text{Vì } 16 \equiv -3 \pmod{19} \Rightarrow 16 \cdot 8^n \equiv -3 \cdot 8^n \pmod{19}$$

$$\text{nên } (16 \cdot 8^n + 3 \cdot 9^n) : 19 \Leftrightarrow (-3) \cdot 8^n + 3 \cdot 9^n \equiv 0 \pmod{19}$$

$$\Leftrightarrow 9^n - 8^n \equiv 0 \pmod{19} \Leftrightarrow 9^n \equiv 8^n \pmod{19}$$

$$\Rightarrow n = 0, \text{ vì trái lại, từ } 9^n \equiv 8^n \pmod{19} \Rightarrow 9 \equiv 8 \pmod{19} : \text{ vô lý!}$$

Vậy  $n = 0$

b) Ta xét 3 trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu  $n = 3k$  (với  $k \in \mathbb{N}$ ) thì  $n \cdot 2^n : 3 \Rightarrow n \cdot 2^n + 1$

Trường hợp 2: Nếu  $n = 3k + 1$  (với  $k \in \mathbb{N}$ ) thì

$$n \cdot 2^n + 1 : 3 \Rightarrow (3k + 1) \cdot 2^{3k+1} + 1 = 3k \cdot 2^{3k+1} + 2^{3k+1} = 3k \cdot 2^{3k+1} + 2 \cdot 8^k + 1$$

$$\text{Do đó: } n \cdot 2^n + 1 : 3 \Leftrightarrow (2 \cdot 8^k + 1) : 3$$

$$\text{Vì } 8 \equiv -1 \pmod{3} \Leftrightarrow 8^k \equiv (-1)^k \pmod{3}$$

$$\text{suy ra } 2 \cdot 8^k + 1 : 3 \Leftrightarrow 2 \cdot (-1)^k + 1 \equiv 0 \pmod{3} \Leftrightarrow k \text{ chẵn} \Leftrightarrow k = 2m (m \in \mathbb{N})$$

$$\text{Do đó: } n = 6m + 1 \text{ với } m \in \mathbb{N}$$

Trường hợp 3: Nếu  $n = 3k + 2$  (với  $k \in \mathbb{N}$ ) thì

$$n \cdot 2^n + 1 = (3k + 2) \cdot 2^{3k+2} + 1 = 3k \cdot 2^{3k+2} + 2 \cdot 2^{3k+2} + 1 = 3k \cdot 2^{3k+2} + 8^{k+1} + 1$$

$$\text{Do đó: } (n \cdot 2^n + 1) : 3 \Leftrightarrow (8^{k+1} + 1) : 3$$

$$\text{Vì } 8 \equiv -1 \pmod{3} \text{ nên } 8^{k+1} \equiv (-1)^{k+1} \pmod{3}$$

$$\text{suy ra: } (8^{k+1} + 1) : 3 \Leftrightarrow (-1)^{k+1} + 1 \equiv 0 \pmod{3} \Leftrightarrow k + 1 \text{ lẻ} \Leftrightarrow k \text{ chẵn} \Leftrightarrow k = 2m (m \in \mathbb{N})$$

$$\text{Do đó: } n = 6m + 2 \text{ (với } m \in \mathbb{N} \text{)}$$

Vậy điều kiện cần tìm của  $m$  là  $m \equiv 1 \pmod{6}$  hoặc  $m \equiv 2 \pmod{6}$

**2.77.**

a) Vì  $7^4 \equiv 01 \pmod{100}$  nên ta tìm số dư khi chia  $9^{7^4}$  cho 4

$$\text{Ta có: } 9 \equiv 1 \pmod{4} \text{ nên } 9^{7^4} \equiv 1 \pmod{4}$$

$$\text{Do đó: } 9^{7^4} = 4k + 1 (k \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow A = 7^{9^{7^4}} = 7^{4k+1} = 7 \cdot (7^4)^k \equiv 7 \cdot 01 \pmod{100} \Rightarrow 7^{9^{7^4}} \equiv 07 \pmod{100}$$

Vậy  $A$  có hai chữ số tận cùng là 07



b) Vì  $29^{10} \equiv 01(\text{mod } 100)$  nên ta tìm số dư khi chia  $9^{2012}$  cho 10

Ta có:  $9 \equiv -1(\text{mod } 10)$  nên  $9^{2012} \equiv 1(\text{mod } 10) \Rightarrow 9^{2012} \equiv 10k + 1$  với  $k \in N$

Do đó:  $B = 29^{10k+1} = 29 \cdot (29^{10})^k \equiv 29 \cdot 01(\text{mod } 100)$

Hay  $B \equiv 29(\text{mod } 100)$

Vậy  $B$  có hai chữ số tận cùng là 29.

**2.78.**

$$C = 1978^{1986}$$

a) Vì  $1978 \equiv 8(\text{mod } 10) \Rightarrow 1978^4 \equiv 6(\text{mod } 10)$

Mặt khác  $1986^8 \equiv 0(\text{mod } 4)$  nên  $1986^8 = 4k (k \in N) \Rightarrow C = 1986^{4k} \equiv 6(\text{mod } 10)$

Vậy chữ số tận cùng của  $C$  là 6

b) Vì  $C \equiv 8(\text{mod } 10)$  nên  $C^{20} \equiv 76(\text{mod } 100) \Rightarrow C^{20m} \equiv 76(\text{mod } 100)$

Mặt khác  $1986 \equiv 6(\text{mod } 20) \Rightarrow 1986^8 \equiv 16(\text{mod } 20)$

Do đó:  $1986^8 = 20k + 16 (k \in N)$

$\Rightarrow C = 1978^{20k+16} = 1978^{16} \cdot (1978^{20})^k \equiv 1986^{16} \cdot 76(\text{mod } 100)$

Lại có:  $1978 \equiv -22(\text{mod } 100) \Rightarrow 1978^4 \equiv 56(\text{mod } 100)$

$\Rightarrow (1978^4)^4 \equiv 56^4(\text{mod } 100)$  hay  $1978^{16} \equiv 96(\text{mod } 100)$

Từ đó ta có:  $C \equiv 96 \cdot 76(\text{mod } 100) \Rightarrow C \equiv 76(\text{mod } 100)$

Vậy  $C$  có hai chữ số tận cùng là 76

## PHẦN HÌNH HỌC

### Chuyên đề 1

**1.1** (h.6). Có 8 nhóm ba điểm thẳng hàng gồm: ba hàng ngang, ba hàng dọc và hai hàng chéo.

**1.2.** Xem hình 34.

**1.3.** Gọi số điểm phải có để vẽ được 36 đường thẳng là  $x$ .

$$\text{Ta có } \frac{x(x-1)}{2} = 36$$

$$\text{Suy ra } x(x-1) = 72 = 9 \cdot 8$$

Vì  $x$  và  $x-1$  là hai số tự nhiên liên tiếp nên  $x = 9$ .

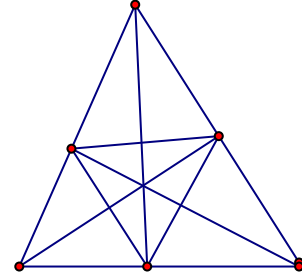
Vậy số điểm lúc ban đầu là  $9 + 3 = 12$ .

Số đường thẳng vẽ được lúc ban đầu là  $\frac{12 \cdot 11}{2} = 66$ .

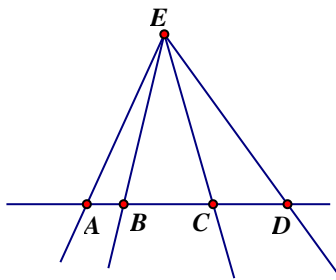
**1.4.** a) Trong 5 điểm phải có điều kiện không có ba điểm nào thẳng hàng.

b) Trong số 5 điểm phải có điều kiện 4 điểm thẳng hàng (h.35).

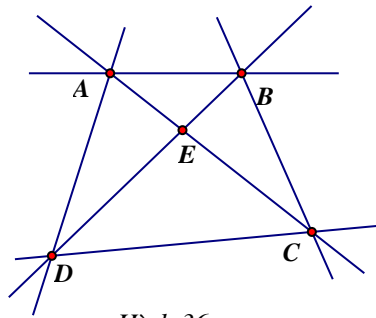
c) Phải có điều kiện có hai nhóm ba điểm thẳng hàng (h.36).



Hình 34



Hình 35



Hình 36

**1.5.** Số đường thẳng vẽ được qua các cặp điểm lúc ban đầu là  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

Nếu bớt đi một điểm thì số đường thẳng vẽ được qua các cặp điểm về sau là:  $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ .

Theo đề bài ta có

$$\frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} = 0$$

$$(n-1)[n - (n-2)] = 20$$

$$(n-1) \cdot 2 = 20$$

$$n-1 = 10$$

$$n = 11.$$

Vậy số điểm lúc đầu là 11.

*Cách khác:* Nếu bớt đi một điểm thì qua điểm này và mỗi điểm trong số  $n-1$  điểm còn lại bớt đi được 1 đường thẳng. Vì tổng số đường thẳng giảm đi 10 nên  $n-1=10$  hay  $n=11$ .

**1.6.** *Hướng dẫn:* Áp dụng công thức  $\frac{n(n-1)}{2}$  để tính số giao điểm của các đường thẳng.

Đáp số: 120 giao điểm.

1.7. Gọi  $n$  là số đường thẳng. Ta có  $\frac{n(n-1)}{2} = 190$ , suy ra  $n(n-1) = 380 = 20 \cdot 19$ . Vậy  $n = 20$ .

1.8. Nếu trong 12 điểm đã cho không có 4 điểm nào thẳng hàng thì số đường thẳng vẽ được là  $\frac{12 \cdot 11}{2} = 66$  (đường thẳng).

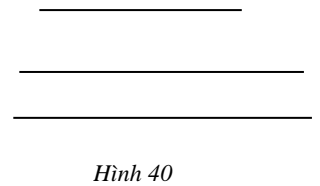
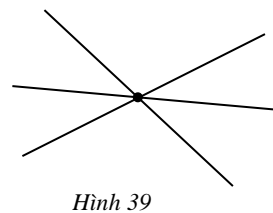
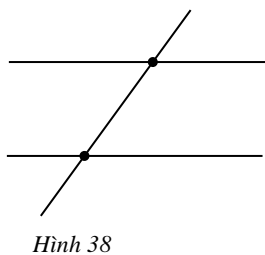
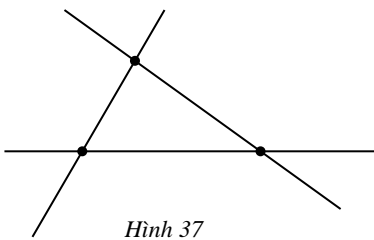
Bây giờ xét đến 4 điểm thẳng hàng, qua chúng chỉ vẽ được một đường thẳng. Nếu 4 điểm này không thẳng hàng thì vẽ được  $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$  (đường thẳng).

Số đường thẳng giảm đi là  $6 - 1 = 5$  (đường thẳng).

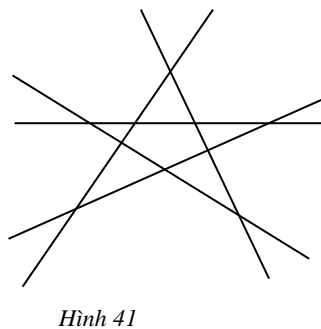
Vậy vẽ được tất cả là  $66 - 5 = 61$  (đường thẳng).

1.9. Số giao điểm có thể là:

- 3 (h.37)
- 2 (h.38)
- 1 (h.39)
- 0 (h.40)

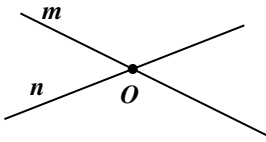


1.10. Hướng dẫn: Bạn có thể vẽ 5 đường thẳng cắt nhau tạo thành ngôi sao 5 cánh (h. 41).

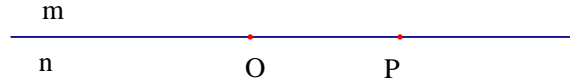


1.11. a)  $m$  và  $n$  là hai đường thẳng phân biệt nếu ngoài điểm chung  $O$ , chúng không còn điểm chung nào khác (h.42).

b)  $m$  và  $n$  là hai đường thẳng trùng nhau nên chúng còn một điểm chung khác điểm  $O$  (h.43).



Hình 42



Hình 43

1.12. (h.44)

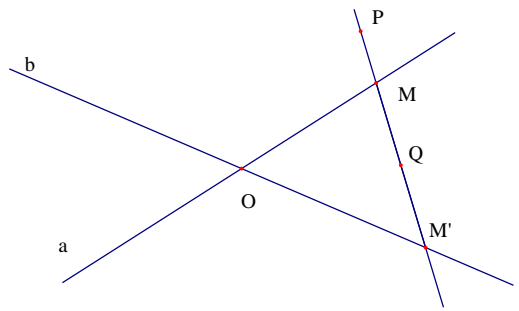
- Vì điểm M nằm giữa hai điểm A và B nên ba điểm M, A, B thẳng hàng, do đó điểm M nằm trên đường thẳng AB.



Hình 44

- Vì điểm B nằm giữa hai điểm M và N nên ba điểm B, M, N thẳng hàng do đó điểm B nằm trên đường thẳng MN. Hai đường thẳng AB và MN có hai điểm chung là B và N nên chúng trùng nhau.

1.13. Vẽ đường thẳng đi qua P và Q nó cắt đường thẳng a hoặc cắt đường thẳng b tại M. Khi đó ba điểm M, P, Q thẳng hàng (h.45)



Hình 45

Chuyên đề 2

1.14. Trong hình 13 có 8 tia, gồm:

- Ba tia gốc A là Ax, Ay, Am;
- Ba tia gốc B là Bx, By, Bn;
- Hai tia gốc O là Om, On.

1.15. Trong hình 14 có 18 tia, gồm:

Bốn tia gốc C, bốn tia gốc D, bốn tia gốc E và 6 tia gốc O.

1.16. (h.46)

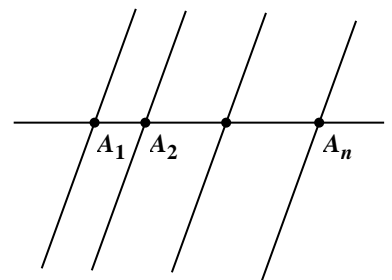
Tại mỗi điểm  $A_1, A_2, \dots, A_n$  đều có 4 tia.

Do đó để trong hình có 100 tia thì  $n = 100 : 4 = 25$  (điểm).

1.17. (h.47)

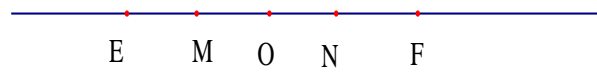
a) Điểm O nằm giữa hai điểm M và N nên hai tia OM, ON đối nhau. (1)

Điểm E thuộc tia OM, điểm F thuộc tia ON nên tia OE trùng với tia OM; tia OF trùng với tia ON. (2)



Hình 46

Từ (1) và (2) suy ra hai tia OE và OF đối nhau.

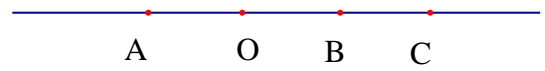


Hình 47

b) Vì hai tia OE và OF đối nhau nên góc O nằm giữa hai điểm E và F.

**1.18. (h.48)**

a) Điểm O nằm giữa hai điểm A và B nên hai tia BA, BO trùng nhau. (1)



Hình 48

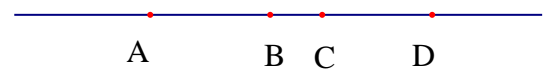
Điểm B nằm giữa hai điểm A và C nên hai tia BA, BC đối nhau. (2)

Từ (1) và (2) suy ra hai tia BO và BC đối nhau.

b) Vì hai tia BO và BC đối nhau nên góc B nằm giữa hai điểm O và C.

**1.19. (h.49)**

a) Vì điểm B nằm giữa hai điểm A và C nên hai tia BA, BC đối nhau. (1)



Hình 49

Vì điểm C nằm giữa hai điểm B và D nên hai tia BC và BD trùng nhau. (2)

Từ (1) và (2) suy ra hai tia BA, BD đối nhau.

b) Vì điểm B nằm giữa hai điểm A và C nên hai tia CA, CB trùng nhau. (3)

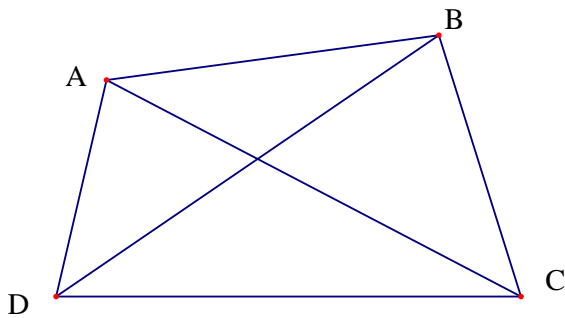
Vì điểm C nằm giữa hai điểm B và D nên hai tia CD, CB đối nhau. (4)

Từ (3) và (4) suy ra hai tia CA, CD đối nhau.

**Chuyên đề 3**

**1.20. (h.21)** Đường thẳng xy và tia Am cắt đoạn thẳng PQ.

**1.21. (h.50 a,b)** Vẽ được tất cả 6 đoạn thẳng là AB, AC, AD, BC, BD và CD.



Hình 50a



Hình 50b

**1.22.** Ta có  $\frac{n(n-1)}{2} = 36 \Rightarrow n(n-1) = 72 = 9 \cdot 8$ . Vì n và n-1 là hai số tự nhiên liên tiếp nên

n = 9.

**1.23. (h.51)** Vì điểm B nằm giữa hai điểm A và C nên  $AB + BC = AC$ . Vì điểm C nằm giữa hai điểm B và D nên  $BC + CD = BD$ .



Hình 51

Mặt khác  $AC > BD$  nên  $AB + BC > BC + CD$  hay  $AB > CD$ .

**1.24. (h.52)** Vì điểm A nằm giữa M và B nên

$$MA + AB = MB$$



Hình 52

Suy ra  $MB = 1 + AB$  (1)

Vì điểm B nằm giữa A và N nên

$$AB + BN = AN$$

Suy ra  $AN = AB + 2$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $MB < AN$

**1.25.** (h.53) Vì điểm M nằm giữa A và B nên  $AM + MB = AB$ .

Do đó  $AB = 3 + 2 = 5$  (cm)

Vì điểm B nằm giữa A và C nên  $AB + BC = AC$ .

Do đó  $AC = 5 + 1 = 6$  (cm)

**1.26** (h.54) Vì M nằm giữa A và B nên

$$MA + MB = AB = 7\text{cm}.$$

Mặt khác  $MA - MB = 3\text{cm}$ .

nên  $MA = (7 + 3) : 2 = 5$  (cm)

$$MB = 7 - 5 = 2$$
 (cm).

**1.27.** Xét ba trường hợp:

- Trường hợp M nằm giữa A và B (h.55)

Ta có

$$AM + MB = AB$$

$$2MB + MB = 6$$

$$3MB = 6$$

$$MB = 2$$
 (cm).

- Trường hợp B nằm giữa A và M (h.56)

Ta có

$$AB + BM = AM$$

$$6 + BM = 2MB$$

$$BM = 6$$
 (cm)

- Trường hợp điểm A nằm giữa hai điểm B và M. Ta có  $BA + AM = BM$

$$6 + 2BM = BM$$

$$6 + BM = 0$$
 (vô lí)

Vậy trường hợp này không xảy ra.

*Đáp số:*  $MB = 2\text{cm}$  hoặc  $MB = 6\text{cm}$

**1.28.** Ta có  $AC + CB = AB$  (vì  $3 + 2 = 5$ ). Vậy điểm C nằm giữa hai điểm A và B. Do đó hai tia CA, CB đối nhau.

**1.29.** Điểm O là gốc của tia nên không nằm giữa A và B

\* Xét trường hợp điểm A nằm giữa O và B

(h. 57)

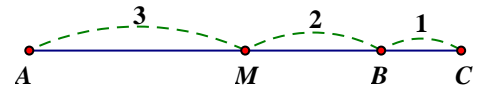
Ta có  $OB = OA + AB = 4 + 2 = 6$  (cm)

\* Xét trường hợp điểm B nằm giữa O và A

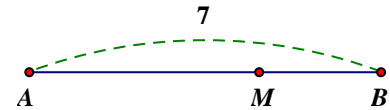
(h. 58)

Ta có  $OB + BA = OA$

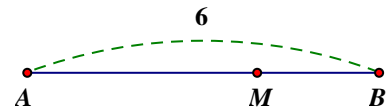
$$\Rightarrow OB = OA - BA = 4 - 2 = 2$$
 (cm)



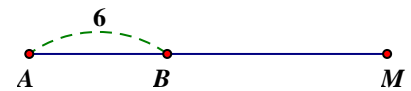
Hình 53



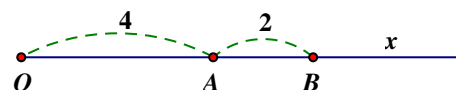
Hình 54



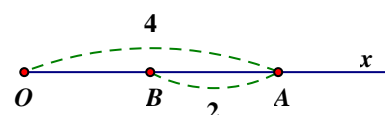
Hình 55



Hình 56



Hình 57



Hình 58

**1.30.** Điểm O là gốc của tia nên không nằm giữa hai điểm M và N

\* Xét trường hợp M nằm giữa O và N (h. 59)

Ta có:  $ON = OM + MN = 3 + 5 = 8(\text{cm})$

\* Xét trường hợp điểm N nằm giữa hai điểm O và M

Ta có:  $ON + NM = OM$

$ON + 5 = 3$  (vô lí)

Vậy trường hợp này không xảy ra

Do đó bài toán có một đáp số là 8cm.

**1.31** (h. 60)

\* Trên tia Ox có  $OB < OC$  ( $3 < 5$ ) nên điểm B nằm giữa O và C.

Ta có  $OB + BC = OC$

Suy ra  $BC = OC - OB = 5 - 3 = 2(\text{cm})$

Do đó  $OA = BC (=2\text{cm})$

\* Trên tia Ox có  $OA < OC$  ( $2 < 5$ ) nên điểm A nằm giữa O và C.

Ta có:  $OA + AC = OC \Rightarrow AC = OC - OA = 5 - 2 = 3(\text{cm})$

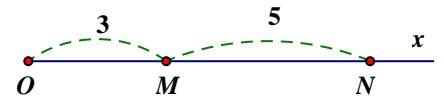
Do đó  $OB = AC (=3\text{cm})$

**1.32.** (h. 61) Trên tia Ox có  $OM < ON$  ( $m < m+n$ ) nên điểm M nằm giữa hai điểm O và N.

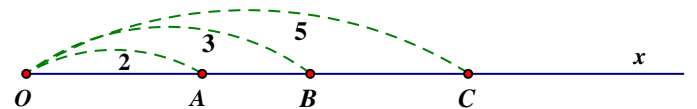
Do đó:  $OM + MN = ON$

Suy ra  $MN = ON - OM = m + n - m = n$

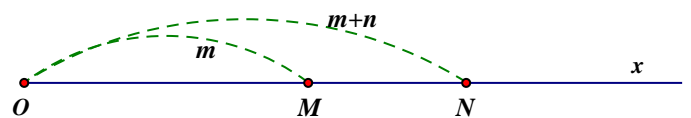
Vậy  $OM > MN$  (vì  $m > n$ )



Hình 59



Hình 60

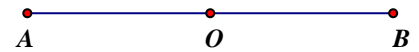


Hình 61

**Chuyên đề 4**

**1.33.** (h. 62) Vì điểm O nằm giữa hai điểm A và B nên  $AO + OB = AB$  (1)

Suy ra  $OB = AB - AO = AB - \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} .AB$



Hình 62

Do đó  $OA = OB (= \frac{1}{2} AB)$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra O là trung điểm của đoạn thẳng AB.

*Lưu ý:* Bài toán này cho ta một dấu ấn nhận biết trung điểm của đoạn thẳng.

**1.34.** Trong 3 điểm M, O, N thẳng hàng có một điểm nằm giữa hai điểm khác.

\* Giả sử M nằm giữa O và N, khi đó ta có:

$OM + MN = ON \Rightarrow MN = ON - OM = 0$  (vì  $OM = ON$ ). Điều này vô lí vì  $MN > 0$ . Vậy trường hợp này không xảy ra.

Do đó, điểm O nằm giữa M và N.

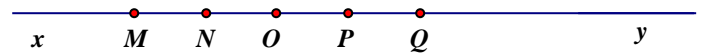
Mặt khác  $OM = ON$  nên O là trung điểm của MN.

**1.35** (h.63)

\* N là trung điểm của đoạn thẳng MO

\* O là trung điểm của đoạn NP và MQ

\* P là trung điểm của OQ



Hình 63

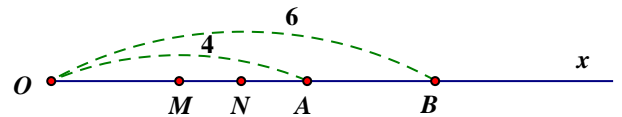
**1.36.** (h.64) Vì M là trung điểm của OA nên  $OM = \frac{4}{2} = 2(cm)$ .

Vì N là trung điểm của OB nên  $ON = \frac{6}{2} = 3(cm)$

Trên tia Ox có  $OM < ON$  ( $2 < 3$ )

nên điểm M nằm giữa hai điểm O và N.

Do đó  $OM + MN = ON \Rightarrow MN = ON - OM = 3 - 2 = 1(cm)$



Hình 64

**1.37.** Ta có  $OP + OQ \neq PQ$  ( $2 + 2 \neq 3$ ) nên điểm O không nằm giữa P và Q do đó O không phải là trung điểm của PQ.

**1.38.** (h. 65)

a) Vì M là trung điểm của OA nên  $OM = MA = \frac{OA}{2} = 2(cm)$

Trên tia Ox có  $OM < OB$  ( $2 < 6$ )

nên M nằm giữa O và B

Do đó  $OM + MB = OB$ .

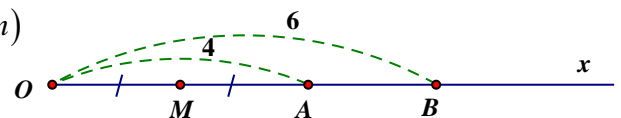
Suy ra  $MB = OB - OM = 6 - 2 = 4(cm)$

b) Trên tia Ox có  $OA < OB$  ( $4 < 6$ ) nên điểm A nằm giữa hai điểm O và B.

Do đó  $OA + AB = OB \Rightarrow AB = OB - OA = 6 - 4 = 2(cm)$

Trên tia BO có  $BA < BM$  ( $2 < 4$ ) nên điểm A nằm giữa hai điểm B và M

Mặt khác  $BA = \frac{1}{2} BM$  ( $2 = \frac{1}{2} .4$ ) nên điểm A là trung điểm của MB.

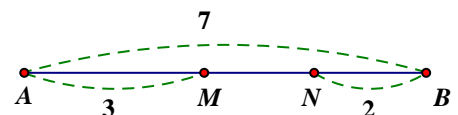


Hình 65

**1.39.** (h. 66) Điểm M nằm giữa A và B nên  $AM + MB = AB$

$\Rightarrow MB = AB - AM = 7 - 3 = 4 (cm)$

Trên tia BA có  $BN < BM$  ( $2 < 4$ )





nên điểm N nằm giữa hai điểm B và M (1)  
 Ta có  $BN + NM = BM \Rightarrow MN = BM - BN = 4 - 2 = 2$  (cm)  
 Vậy  $BN = MN (=2\text{cm})$  (2)

Hình 66

Từ (1) và (2) suy ra N là trung điểm của đoạn thẳng MB

**1.40.** Vì M là trung điểm của OA nên  $OA = 2OM = 2\text{cm}$

Vì N là trung điểm của OB nên  $OB = 2ON = 5\text{cm}$ .

\* Xét trường hợp M và N thuộc cùng một tia gốc O (h. 67).

Khi đó A và B cùng thuộc một tia gốc O.

Vì  $OA < OB$  ( $2 < 5$ ) nên điểm A nằm giữa hai điểm O và B.

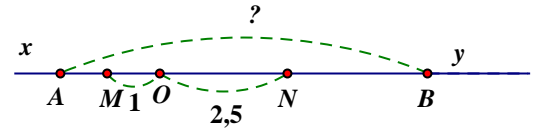
Suy ra  $OA + AB = OB \Rightarrow AB = OB - OA = 5 - 2 = 3$  (cm)

\* Xét trường hợp M và N thuộc hai tia đối nhau gốc O (h. 68)

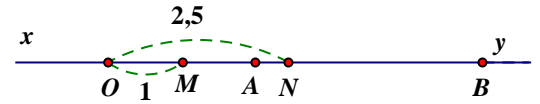
Điểm A và điểm B nằm trên hai tia đối nhau gốc O

nên điểm O nằm giữa A và B.

$\Rightarrow AB = AO + OB = 2 + 5 = 7$  (cm)



Hình 67



Hình 68

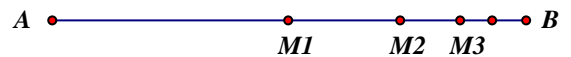
**1.41.** (h. 69) Vì  $M_1$  là trung điểm của AB nên  $M_1B = \frac{AB}{2} = \frac{2^{10}}{2} = 2^9$  (cm)

Vì  $M_2$  là trung điểm của  $M_1B$  nên  $M_2B = \frac{M_1B}{2} = \frac{2^9}{2} = 2^8$  (cm)

.....

Vì  $M_{10}$  là trung điểm của đoạn thẳng  $M_9B$  nên

$$M_{10}B = \frac{M_9B}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ (cm)}$$



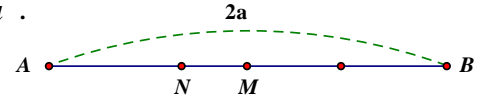
Hình 69

Trên tia BA có  $BM_{10} < BM_1$  ( $1 < 2^9$ ) nên điểm  $M_{10}$  nằm giữa hai điểm B và  $M_1$ .

Do đó  $BM_{10} + M_{10}M_1 = BM_1 \Rightarrow M_{10}M_1 = BM_1 - BM_{10} = 2^9 - 1 = 511$  (cm)

**Chuyên đề nâng cao 1**

**1.42** (h. 70) Điểm M là trung điểm của AB nên  $AM = MB = \frac{AB}{2} = a$ .



Điểm N nằm giữa hai điểm A và B nên  $AN + NB = AB = 2a$ .

Vì  $AN < AM$  nên  $2AN < 2a$ , do đó  $AN < a$ .

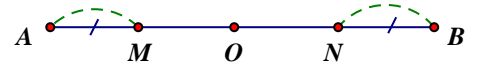
Trên tia AB có  $AN < AM$  nên điểm N nằm giữa hai điểm A và M (dấu hiệu 3).

Hình 70

Trên tia AB có  $AN < AM < AB$  nên điểm M nằm giữa hai điểm N và B (dấu hiệu 4).

**1.43.** (h.71) Điểm O là trung điểm của AB nên O nằm giữa A và B. Trên tia AB có

$AM < AO = \frac{AB}{2}$  nên điểm M nằm giữa hai điểm A và O.



Trên tia BA có  $BN < BO = \frac{AB}{2}$

nên điểm N nằm giữa hai điểm B và O.

Hình 71

Suy ra điểm O nằm giữa hai điểm M và N (dấu hiệu 5) (1)

Ta có  $OM = OA - AM$ ;  $ON = OB - BN$ . Mặt khác  $OA = OB$  và  $AM = BN$  nên  $OM = ON$ . (2)

Từ (1) và (2) suy ra O là trung điểm của MN.

**1.44** (h. 72)

a) Điểm I nằm giữa A và B nên

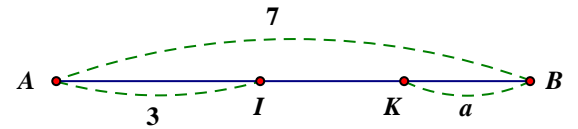
$$AI + IB = AB \Rightarrow IB = AB - AI = 7 - 3 = 4(\text{cm})$$

Trên tia BA có  $BK < BI$  (vì  $a < 4$ ) nên điểm K nằm giữa hai điểm B và I.

$$\text{Do đó } BK + KI = BI \Rightarrow IK = BI - BK = 4 - a (\text{cm})$$

b) Ta có K nằm giữa B và I nên muốn K là trung điểm của BI thì phải có

$$BK = \frac{1}{2}BI \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}4 = 2(\text{cm})$$



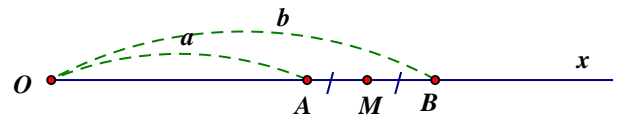
Hình 72

**1.45** (h. 73) Trên tia Ox có  $OA < OB$  (vì  $a < b$ )

nên điểm A nằm giữa hai điểm O và B

$$\text{Suy ra } OA + AB = OB \Rightarrow AB = OB - OA = b - a$$

Vì M là trung điểm của AB nên  $BM = \frac{AB}{2} = \frac{b-a}{2}$ .



Hình 73

Ta có:  $\frac{b-a}{2} < \frac{b}{2} < b$ . Trên tia BO có  $BM < BO$  (vì  $\frac{b-a}{2} < \frac{b}{2} < b$ ) nên điểm M nằm giữa hai

điểm B và O. Suy ra  $BM + MO = BO$ . Do đó  $OM = OB - BM = b - \frac{b-a}{2} = \frac{2b - (b-a)}{2} = \frac{a+b}{2}$

**1.46** (h. 74) Điểm E nằm giữa hai điểm A và B nên  $AE + BE = AB = 6\text{cm}$  mà  $AE + BF = 7\text{cm}$  nên  $BE < BF$ . Trên tia BA có  $BE < BF$  nên điểm E nằm giữa hai điểm B và F.

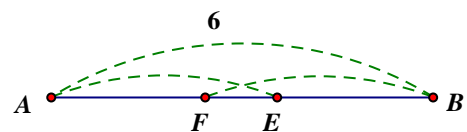
Suy ra  $BE + FE = BF$ .

$$\text{Ta có: } AE + BF = 7\text{cm}$$

$$\text{Do đó: } AE + (BE + FE) = 7\text{cm}$$

$$AB + FE = 7\text{cm}$$

$$\Rightarrow FE = 7 - AB = 7 - 6 = 1 (\text{cm})$$



Hình 74

**1.47** (h. 75)

- Trên tia Ox có  $OA < OB$  ( $1,5 < 3$ ) nên điểm A nằm giữa hai điểm O và B.

Ta có  $OA + AB = OB \Rightarrow AB = OB - OA = 3 - 1,5 = 1,5$  (cm)

Vậy  $OA = AB (=1,5\text{cm})$

Suy ra A là trung điểm của OB

- Trên tia Ox có  $OB < OC$  ( $3 < 4,5$ ) nên điểm B nằm giữa O và C

Ta có:  $OB + BC = OC \Rightarrow BC = OC - OB = 4,5 - 3 = 1,5$  (cm)

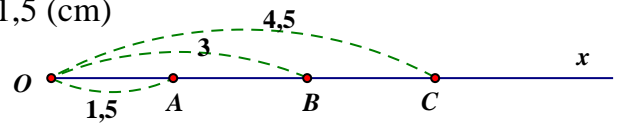
Vậy  $AB = BC$  (1)

Trên tia Ox có  $OA < OB < OC$  ( $1,5 < 3 < 4,5$ )

nên điểm B nằm giữa hai điểm A và C (dấu hiệu 4) (2)

Từ (1) và (2) suy ra B là trung điểm của AC

Tóm lại, trên hình có điểm A là trung điểm của OB;  
điểm B là trung điểm của AC.



Hình 75

**1.48.** (h. 76)

a) Hai tia OA, AB đối nhau nên điểm A nằm giữa hai điểm O và B, do đó  $OB = AO + AB = 2 + 4 = 6$ (cm)

Vì điểm M là trung điểm của AO nên  $OM = 1$  (cm)

Vì N là trung điểm của OB nên  $ON = 3$  (cm)

Trên tia OB có  $OM < ON$  nên điểm M nằm giữa hai điểm O và N. Suy ra  $OM + MN = ON$

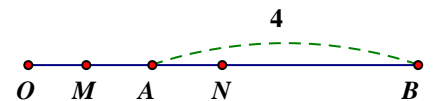
Do đó  $MN = ON - OM = 3 - 1 = 2$ (cm)

Vậy  $OA = MN (=2\text{cm})$

b) Trên tia OB có  $OA < ON$  ( $2 < 3$ ) nên điểm A nằm giữa hai điểm O và N

Suy ra  $OA + AN = ON \Rightarrow AN = ON - OA = 3 - 2 = 1$  (cm)

Vậy  $AN = OM (= 1\text{cm})$



Hình 76

**1.49** (h. 77)

a) Ta có  $AE = \frac{2}{3} AB = 4$ (cm)

Điểm F là trung điểm của AE nên  $AF = FE = 4 : 2 = 2$ (cm). Điểm E nằm giữa hai điểm A và B nên  $AE + BE = AB$ . Suy ra  $BE = AB - AE = 6 - 4 = 2$  (cm).

Do đó  $BE = FE (=2\text{cm})$  (1)

Trên tia AB có  $AF < AE < AB$  ( $2 < 4 < 6$ ) nên điểm E nằm giữa F và B (dấu hiệu 4) (2)

Từ (1) và (2) suy ra E là trung điểm của BF.

b) Điểm F nằm giữa hai điểm A và E (vì F là trung điểm của AE)

Suy ra hai tia FA và FE đối nhau. (1)

Điểm O nằm giữa hai điểm E và F (vì O là trung điểm của FE).

Suy ra hai tia FO và FE trùng nhau. (2)

Từ (1) và (2) suy ra hai tia FA, FO đối nhau.

Do đó điểm F nằm giữa hai điểm A và O dẫn tới OF, OA trùng nhau (3)

Lập luận tương tự có hai tia OE, OB trùng nhau. (4)

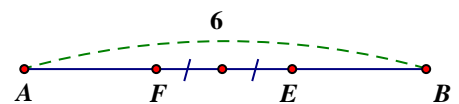
Mặt khác hai tia OF, OE đối nhau (vì O là trung điểm của FE) (5)

Từ (3); (4); (5) suy ra hai tia OA, OB đối nhau, dẫn tới điểm O nằm giữa hai điểm A và B (6)

Ta có:  $OA = OF + AF$  (vì F nằm giữa A và O)

$OA = 1 + 2 = 3$  (cm)

$OB = OE + BE$  (vì E nằm giữa B và O)



Hình 77

$$OB = 1 + 2 = 3 \text{ (cm)}$$

$$\text{Do đó } OA = OB \text{ (7)}$$

Từ (6) và (7) suy ra O là trung điểm của AB

**1.50** (h. 78) Vì O là trung điểm của AB nên  $OA = OB$  và O nằm giữa A và B

Suy ra hai tia BO, BA trùng nhau.

Mặt khác hai tia BM, BA đối nhau nên hai tia BO, BM đối nhau,

do đó điểm B nằm giữa hai điểm O và M. Suy ra  $OM = OB + BM$  (1)

Điểm O nằm giữa hai điểm A và B nên hai tia OA, OB đối xứng nhau.

Điểm B nằm giữa hai điểm O và M nên hai tia OM, OB trùng nhau.

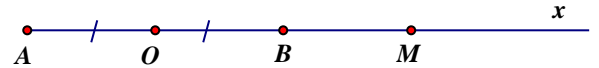
Suy ra hai tia OA, OM đối nhau. Do đó điểm O nằm giữa hai điểm A và M

$$\text{Vậy } AO + OM = AM \Rightarrow OM = MA - AO \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) ta có  $2OM = OB + BM + MA - AO$

$$2OM = MA + MB \text{ (vì } OA = OB)$$

$$OM = \frac{MA + MB}{2}$$



Hình 78

**Nhận xét:**

1. Muốn chứng minh  $OM = \frac{MA + MB}{2}$  ta chứng tỏ  $2OM = MA + MB$

Muốn có  $2OM$  ta tính  $OM$ , theo hai cách khác nhau rồi cộng lại. Sau đó muốn được  $OM$  ta chia kết quả cho 2.

2. Bài toán trên vẫn đúng nếu M nằm trên tia đối của tia AB.

**1.51** Xét hai trường hợp:

\* M nằm giữa O và B (h. 79)

Ta có hai tia OM và OB trùng nhau. (1)

Điểm O là trung điểm của AB nên  $OA = OB$  và O nằm giữa A và B.

Suy ra hai tia OA, OB đối nhau. (2)

Từ (1) và (2) suy ra hai tia OA, OM đối nhau

do đó điểm O nằm giữa hai điểm A và M.

$$\text{Ta có } AO + OM = AM \Rightarrow OM = MA - OA \text{ (3)}$$

$$\text{Mặt khác: } OM + MB = OB \Rightarrow OM = OB - MB \text{ (4)}$$

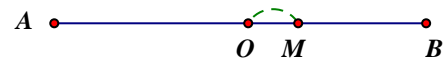
Từ (3) và (4) ta có  $2MO = MA - AO + OB - MB$

$$2MO = MA - MB \text{ (vì } OA = OB) \text{ (5)}$$

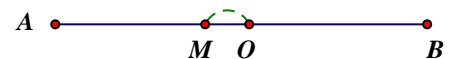
\* M nằm giữa O và A (h. 80)

$$\text{Cũng giải tương tự như trên ta được } OM = \frac{MB - MA}{2} \text{ (6)}$$

$$\text{Từ (5) và (6) suy ra } OM = \left| \frac{MA - MB}{2} \right|$$



Hình 79



Hình 80

*Lưu ý:* Nếu điểm M trùng với O thì kết quả trên vẫn đúng.

**MỤC LỤC**

**PHẦN SỐ HỌC..... 1**

**Chương I: ÔN TẬP VÀ BỔ TÚC VỀ SỐ TỰ NHIÊN ..... 1**

*Chuyên đề 1: TẬP HỢP CÁC SỐ TỰ NHIÊN ..... 1*

*Chuyên đề 2. PHÉP TOÁN TRONG TẬP HỢP CÁC SỐ TỰ NHIÊN ..... 10*

*Chuyên đề 3. TÍNH CHẤT CHIA HẾT CỦA MỘT TỔNG, HIỆU, TÍCH ..... 18*

*Chuyên đề 4. DẤU HIỆU CHIA HẾT..... 21*

*Chuyên đề 5. SỐ NGUYÊN TỐ VÀ HỢP SỐ..... 28*

*Chuyên đề 6. ƯỚC CHUNG LỚN NHẤT ..... 33*

*Chuyên đề nâng cao 1. SỐ CHÍNH PHƯƠNG ..... 40*

*Chuyên đề nâng cao 2. NGUYÊN LÝ DIRICHLET ..... 50*

**Chương II. SỐ NGUYÊN ..... 55**

*Chuyên đề 1. TẬP HỢP CÁC SỐ NGUYÊN ..... 55*

*Chuyên đề 2. PHÉP CỘNG VÀ PHÉP TRỪ CÁC SỐ NGUYÊN ..... 61*

*CHUYÊN ĐỀ 3. QUY TẮC DẤU NGOẶC VÀ QUY TẮC CHUYỂN VẾ..... 67*

*Chuyên đề 4. PHÉP NHÂN HAI SỐ NGUYÊN ..... 73*

*Chuyên đề 5. BỘI VÀ ƯỚC CỦA MỘT SỐ NGUYÊN..... 78*

*Chuyên đề nâng cao. ĐỒNG DƯ ..... 82*

**PHẦN HÌNH HỌC ..... 89**

**Chương I. ĐOẠN THẲNG. .... 89**

*Chuyên đề 1. ĐIỂM. ĐƯỜNG THẲNG..... 89*

*Chuyên đề 2. TIA..... 93*

*Chuyên đề 3. ĐOẠN THẲNG ..... 96*

*Chuyên đề 4. TRUNG ĐIỂM CỦA ĐOẠN THẲNG..... 99*

*Chuyên đề nâng cao. .... 102*

**CÁC DẤU HIỆU NHẬN BIẾT MỘT ĐIỂM NẪM GIỮA HAI ĐIỂM KHÁC ..... 102**

**HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ..... 106**

**PHẦN SỐ HỌC..... 106**

**Chương I. ÔN TẬP VÀ BỔ TÚC VỀ SỐ TỰ NHIÊN..... 106**

**Chương II. SỐ NGUYÊN ..... 129**

**PHẦN HÌNH HỌC ..... 145**