MỤC LỤC

CHƯƠNG

1 PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN VÀ CÁC KỸ THUẬT XỬ LÝ

Chương này giới thiệu cùng bạn đọc:

① Các phương pháp giải phương trình vô tỷ điển hình.

② Rèn luyện kỹ năng sử dụng phương pháp giải toán.

③ Phân tích sai lầm và giải quyết các khó khăn của mỗi phương pháp.

④ Phân tích ưu điểm và nhược điểm của mỗi phương pháp giải toán.

⑤ Những góc nhìn mới cho những dạng bài toán cũ.

⑥ Trải nghiệm một số phương pháp giải toán và kỹ thuật mới lạ như: Khép chặt miền nghiệm để đánh giá, truy ngược dấu biểu thức liên hợp...

A PHƯƠNG PHÁP NÂNG LÊN LŨY THỪA

1 Một số dạng toán cơ bản

DẠNG 1. $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$

Phương pháp giải. $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)\geq 0 (\text{ hoặc } f(x)\geq 0) \\ f(x)=g(x)\end{cases}$

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sqrt{2x-1}=\sqrt{x^2+2x-5}$.

Lời giải.

$$\sqrt{2x-1}=\sqrt{x^2+2x-5} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1\geq 0 \\ x^2+2x-5=2x-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq \dfrac{1}{2} \\ x^2=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq \dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=2\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow x=2..$$

Chú ý

Các bạn để ý rằng việc chọn $f(x)=2x-1\geq 0$ sẽ khiến chúng ta giải quyết bài toán một cách đơn giản hơn việc chọn $f(x)=x^2+2x-5\geq 0$.

Bài tập tương tự

① Giải phương trình$\sqrt{4-x}=\sqrt{x^2+3x+4}$.
② Giải phương trình $\sqrt{2x^2+3x-1}=\sqrt{5-x}$.
③ Giải phương trình $\sqrt{2x+3}=\sqrt{x^2+2x+2}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\sqrt{x^3-3x+1}=\sqrt{x^3+2x-5}$.

✍ **Lời giải.**

$$\sqrt{x^3-3x+1}=\sqrt{x^3+2x-5}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+2x-5\geq 0\\ x^3-3x+1=x^3+2x-5\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+2x-5\geq 0\\ 5x=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+2x-5\geq 0\\ x=\dfrac{6}{5}\end{cases}$$ (Phương trình vô nghiệm) ■

Chú ý

Trong việc giải phương trình vô tỷ nếu việc tìm những giá trị của x để $g(x)\geq 0$ là phức tạp, chúng ta nên triển khai việc tìm nghiệm của phương trình sau đó thử vào điều kiện để xét xem nghiệm vừa tìm được có thỏa mãn điều kiện bài toán hay không.
Chẳng hạn bài toán trên ta cần thử xem $x=\dfrac{6}{5}$ có thỏa mãn điều kiện $f(x)=x^3+2x-5\geq 0$ không bằng cách thay trực tiếp giá trị cần tìm được vào hàm f(x), ta sẽ thấy $f\left(\dfrac{6}{5}\right)=-\dfrac{109}{125}<0$, nên giá trị $x=\dfrac{6}{5}$ không là nghiệm của phương trình đã cho.

Bài tập tương tự

① Giải phương trình $\sqrt{x^3+2x^2+1}=\sqrt{x^2(x+2)+3x}$..
② Giải phương trình $\sqrt{x^4+1}=\sqrt{x^4-3x+1}$..
③ Giải phương trình $\sqrt{x^3-1}=\sqrt{x^3+x^2-5}$..

Ví dụ 3. Giải phương trình $\sqrt{x^3+x^2-4}=\sqrt{x^3-3x+1}$.

✍ **Lời giải.**

$$\sqrt{x^3+x^2-4}=\sqrt{x^3-3x+1}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+x^2-4\geq 0\\ x^3+x^2-4=x^3-3x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+x^2-4\geq 0\\ x^2+3x-5=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+x^2-4\geq 0\\ x=\dfrac{-3\pm\sqrt{29}}{2}\end{cases}$$ (Phương trình vô nghiệm) ■

Chú ý

Với những bài toán có nghiệm số phức tạp hơn, ta có thể làm như sau:
$f(x)=x^3+x^2-4=(x^2+3x-5)(x-2)+11x-14$
$(x^2+3z-5)(x-2)+g(x)\Rightarrow f\left(\dfrac{-3\pm\sqrt{29}}{2}\right)=g\left(\dfrac{-3\pm\sqrt{29}}{2}\right)<0$

Bài tập tương tự

① Giải phương trình $\sqrt{x^3+x^2}=\sqrt{x^3+x+1}$.
② Giải phương trình $\sqrt{x^4+x}=\sqrt{x^4+x^2-1}$.
③ Giải phương trình $\sqrt{x^5-2x^3}=\sqrt{(x^2-2)(x^3+1)}$.

Ví dụ 4. Giải phương trình $\sqrt{x(x^3-3x+1)}=\sqrt{x(x^3-x)}$.

✍ **Lời giải.**

$$\sqrt{x(x^3-3x+1)}=\sqrt{x(x^3-x)} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^3-x)\geq 0 \\ x(x^3-3x+1)=x(x^3-x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x^3-x)\geq 0 \\ x(2x-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^3-x)\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=0.$$

■

Bài tập tương tự

① Giải phương trình $\sqrt{x(x^2+2x+3)}=\sqrt{x(x^2+1)}$.
② Giải phương trình $\sqrt{(x+1)^2(x^2-x+1)}=\sqrt{(x^2+x)(x^2+3)}$.
③ Giải phương trình $\sqrt{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\sqrt{(x-1)(x^3+x^2-2)}$.

Tổng quát: $\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{g(x)}$

DẠNG 2. $\sqrt[3]{f(x)}=\sqrt[3]{g(x)}$

Phương pháp giải. $\sqrt[3]{f(x)}=\sqrt[3]{g(x)} \Leftrightarrow f(x)=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)\geq 0 (\text{hoặc } f(x)\geq 0) \\ f(x)=g(x) \end{cases}$

Với $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ và n chẳn.

Ví dụ 1.
Ví dụ 1 Giải phương trình $\sqrt[3]{x^3-2x^2+1}=\sqrt[3]{x^3-x}$.

✍ **Lời giải.**
Phương trình đã cho tương đương với:

$$x^3-2x^2+1=x^3-x \Leftrightarrow 2x^2-x-1=0 \Leftrightarrow \left[\ x=-\frac{1}{2}x=1\right.$$

■

Bài tập tương tự

① Giải phương trình $\sqrt[3]{x^2+2x+1}=\sqrt[3]{x^2+x}$.

② Giải phương trình $\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}=\sqrt[3]{x+3}$.

③ Giải phương trình $\sqrt[3]{x^4-3x^2+1}=\sqrt[3]{1-2x^3}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\sqrt[3]{(x-1)\left(x^3-2x+2\right)}=\sqrt[3]{(x-1)\left(x^2-2x\right)}$.

✍ **Lời giải.**
Phương trình đã cho tương đương với:

$$(x-1)\left(x^3-2x+2\right)=(x-1)\left(x^2-2x\right) \Leftrightarrow (x-1)\left(x^3-x^2+2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$$

-Kết luận. Tập nghiệm của phương trình đã cho là $T=\{-1;1\}$. ■

Bài tập tương tự

① Giải phương trình $\sqrt[3]{x\left(x^3+1\right)}=\sqrt[3]{x^3\left(x+1\right)}$.

② Giải phương trình $\sqrt[3]{(x+1)^2\left(x^2-x+1\right)}=\sqrt[3]{\left(x^2+x\right)\left(x^2+3\right)}$.

③ Giải phương trình $\sqrt[3]{(x-1)^2\left(x^2+x+1\right)}=\sqrt[3]{(x-1)\left(x^3+x^2-2\right)}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

① Giải phương trình $\sqrt{x^2+2x+4}=\sqrt{2-x}$. Đáp số. $\mathrm{T}=\{-2;-1\}$.

② Giải phương trình $\sqrt[3]{x^2-4x+2}=\sqrt[3]{3x-10}$. Đáp số. $\mathrm{T}=\{3;4\}$.

③ Giải phương trình $\sqrt{2x^3-3x}=\sqrt{x^2-2x}$. Đáp số. $\mathrm{T}=\left\{-\frac{1}{2};0\right\}$.

④ Giải phương trình $2\sqrt{x^2-9}=(x+5)\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}$. Đáp số. $\mathrm{T}=\{-3;1\}$.

⑤ Giải phương trình $\sqrt{x+3}=\sqrt[3]{5x+3}$. Đáp số. $\mathrm{x}=1;\mathrm{x}=\frac{15+3\sqrt{33}}{2}$.

DẠNG 3. $\sqrt{f(x)}=g(x)$

Phương pháp giải. $\sqrt{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\geq 0\\ f(x)=[g(x)]^2\end{cases}$

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sqrt{x^2-2x+4}=x-1$.

Lời giải.

$$\sqrt{x^2+x-4}=x-1\Leftrightarrow\begin{cases}x-1\geq 0\\ x^2-x-4=(x-1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1\\ x=5\end{cases}\Leftrightarrow x=5.$$

Bài tập tương tự

① Giải phương trình $\sqrt{4x^2+2x+1}=2x-1$.
② Giải phương trình $\sqrt{2x^2+3x+1}=1-x$.
③ Giải phương trình $\sqrt{2x^2+x+1}=3x-1$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\sqrt{(x-3)^2(x-1)}=x-3$.

Lời giải.

$$\sqrt{(x-3)^2(x-1)}=x-3\Leftrightarrow\begin{cases}x-3\geq 0\\ (x-3)^2[(x-1)-1]=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 3\\ \left[\begin{array}{l}x=3\\ x=2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=3.$$

Chú ý

-Sai lầm thường gặp: $\sqrt{(x-3)^2(x-1)} = x-3 \Leftrightarrow (x-3)\sqrt{x-1} = x-3$

$\Leftrightarrow (x-3)\left(\sqrt{x-1}-1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=2 \end{array}\right.$

-Nguyên nhân sai lầm: $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A, A \geq 0 \\ -A, A \leq 0 \end{cases}$

-Hướng khắc phục: $\sqrt{A^2.B} = A \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A^2(B-1) = 0 \end{cases}$

Bài tập tương tự

a) Giải phương trình $\sqrt{(x+1)^2(2x+3)} = x+1$.

b) Giải phương trình $\sqrt{(2x-1)^2(3x+2)} = 2x-1$.

c) Giải phương trình $\sqrt{(x-4)^2(x^2+1)} = x-4$.

Tổng quát: $\sqrt[n]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = [g(x)]^n \end{cases}$

DẠNG 4. $\sqrt[3]{f(x)} = g(x)$

Phương pháp giải. $\sqrt[3]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = [g(x)]^3$

Ví dụ 1. Ví dụ 1 Giải phương trình $\sqrt[3]{x^3+x^2+1} = x+1$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với:

$x^3+x^2+1 = (x+1)^3 \Leftrightarrow 2x^2+3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

Kết luận. Tập nghiệm của phương trình đã cho là $T = \left\{-\dfrac{3}{2}; 0\right\}$.

Bài tập tương tự

1. Giải phương trình $\sqrt[3]{x^3+3x^2+2} = x+1$.
2. Giải phương trình $\sqrt[3]{x^2+x+1} = 1-x$.
3. Giải phương trình $\sqrt[3]{x^3+2x^2+1} = x+2$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\sqrt[3]{(x-3)^3(x-1)} = x-3$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với:

$$(x-3)\sqrt[3]{x-1}=x-3 \Leftrightarrow (x-3)\left(\sqrt[3]{x-1}-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Kết luận. Tập nghiệm của phương trình đã cho là $T=\{2;3\}$.

Chú ý

Phép biến đổi $\sqrt[3]{A^3}=A$ là một phép biến đổi tương đương.

Bài tập tương tự

1. Giải phương trình $\sqrt[3]{(x+1)^3(2x-1)}=x+1$.
2. Giải phương trình $\sqrt[3]{(3x+1)^3(x-2)}=3x+1$.
3. Giải phương trình $\sqrt[3]{(x^2+1)^3(2x-1)}=x^2+1$.

Tổng quát: $\sqrt[n]{f(x)}=g(x) \Leftrightarrow f(x)=[g(x)]^n$.

Chú ý

Chúng ta cần phân biệt rõ đâu là cách làm của thuộc dạng toán 3, đâu là cách làm thuộc dạng toán 4 khi đứng trước dạng toán $\sqrt[n]{f(x)}=g(x)$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

a) Giải phương trình $3x+\sqrt{x^3-x+1}=-2$. Đáp số. x = – 1.
b) Giải phương trình $\sqrt{x^4-4x^3+14x-11}=1-x$. Đáp số. $x=-2; x=1$.
c) Giải phương trình $\sqrt[3]{x^3+x^2-2x+1}=x$. Đáp số. $x=1$.
d) Giải phương trình $\sqrt{4-3\sqrt{10-3x}}=x-2$. Đáp số. $x=3$.
e) Giải phương trình $\sqrt{7-x^2+x\sqrt{x+5}}=\sqrt{3-2x-x^2}$. Đáp số. $x=-1$.

DẠNG 5. $\sqrt{a_1x+b_1}+\sqrt{a_2x+b_2}=\sqrt{a_3x+b_3}$

Phương pháp giải.

- Giải hệ điều kiện: $\begin{cases} a_1x+b_1\geq 0 \\ a_2x+b_2\geq 0 \\ a_3x+b_3\geq 0 \end{cases}$
- Bình phương 2 vế, đưa phương trình đã cho về dạng $\sqrt{F(x)}=G(x)$.
- Giải phương trình $\sqrt{F(x)}=G(x)$.
- Kiểm tra sự thỏa mãn của nghiệm vừa tìm được với điều kiện bài toán và kết luận.

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}=3$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x+1\geq 0 \\ x+4\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\geq -1$.

Phương trình đã cho tương đương với:
$\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}\right)^2=9 \Leftrightarrow 2x+5+2\sqrt{x^2+5x+4}=9 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+5x+4}=2-x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ x^2+5x+4=(2-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ 9x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0 \text{ (thỏa mãn)}$$

Kết luận. Nghiệm của phương trình đã cho là $x=0$..

Bài tập tương tự

① Giải phương trình $\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}=\sqrt{9+2x}$.
② Giải phương trình $\sqrt{x+3}+\sqrt{2x-1}=3\sqrt{3x-2}$.
③ Giải phương trình $\sqrt{5x+1}=\sqrt{14x+7}+\sqrt{2x+3}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}=\sqrt{3x+7}$.

✍ Lời giải.

Điều kiện $-1 \leq x \leq 3$.
Phương trình đã cho tương đương với:
$\sqrt{3-x}=\sqrt{x+1}+\sqrt{3x+7} \Leftrightarrow 3-x=4x+8+2\sqrt{3x^2+10x+7} \Leftrightarrow -5x-5=2\sqrt{3x^2+10x+7}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \leq 0 \\ 13x^2+10x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{13} \\ x=-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=-1$$

Kết luận. Nghiệm của phương trình đã cho là $x=-1$.

Chú ý

Ở ví dụ 3, để sử dụng phép biến đổi tương đương việc đưa phương trình đã cho về dạng $\sqrt{3-x}=\sqrt{x+1}+\sqrt{3x+7}$ để đảm bảo cả hai vế không âm là cần thiết. Sai lầm thường mắc phải biến đổi:
$\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}=\sqrt{3x+7} \Leftrightarrow \left(\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}\right)^2=3x+7$
-Biến đổi trên không phải là phép biến đổi tương đương.
-Để khắc phục vấn đề này chúng ta phải thử lại tập nghiệm tìm được vào phương trình ban đầu để kiểm tra nó là nghiệm hay không.

DẠNG 6. $\sqrt{a_1x^2+b_1x+c_1}+\sqrt{a_2x^2+b_2x+c_2}=\sqrt{a_3x^2+b_3x+c_3}$

Phương pháp giải. $\sqrt{a_1x^2+b_1x+c_1}+\sqrt{a_2x^2+b_2x+c_2}=\sqrt{a_3x^2+b_3x+c_3}$
(Trong đó $a_1+a_2=a_3$ hoặc $a_1+a_3=a_2$ hoặc $a_2+a_3=a_1$).

Bước 1 Giải hệ điều kiện: $\begin{cases} a_1x^2+b_1x+c_1 \geq 0 \\ a_2x^2+b_2x+c_2 \geq 0 \\ a_3x^2+b_3x+c_3 \geq 0 \end{cases}$

Bước 2
+Trường hợp: $a_1+a_2=a_3$ bình phương hai vế đưa phương trình đã cho về dạng $\sqrt{F(x)}=G(x)$.
+Trường hợp: $a_1+a_3=a_2$ (hoặc $a_2+a_3=a_1$) biến đổi phương trình về dạng: $\sqrt{a_2x^2+b_2x+c_2}=\sqrt{a_3x^2+b_3x+c_3}-\sqrt{a_1x^2+b_1x+c_1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a_3x^2+b_3x+c_3}-\sqrt{a_1x^2+b_1x+c_1}\geq 0 \\ a_2x^2+b_2x+c_2=\left(\sqrt{a_3x^2+b_3x+c_3}-\sqrt{a_1x^2+b_1x+c_1}\right)^2 \end{cases}$$

☑ Kiểm tra sự thỏa mãn của nghiệm vừa tìm được với điều kiện bài toán và kết luận.

DẠNG 7. G

Phương pháp giải. iải phương trình $\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{4-x}$.

Lời giải.

Điều kiện $x\leq 4$.

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{4-x}-\sqrt{x^2+x+1}\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4-x}-\sqrt{x^2+x+1}\geq 0 \\ 4+x=2\sqrt{(4-x)\left(x^2+x+1\right)} \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2+2x-3\leq 0 \\ 4x^3-11x^2-4x=0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} -3\leq x\leq 1 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 4x^2-11x-4=0 \end{array}\right. \end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{11-\sqrt{185}}{8} \end{array}\right.$$

Kết luận. Tập nghiệm của phương trình đã cho là $T=\left\{0;\dfrac{11-\sqrt{185}}{8}\right\}$.

Chú ý

! -Trường hợp: $a_1+a_3=a_2$ (ví dụ 2) ở trong dạng toán này việc sử dụng hệ điều kiện để biến đổi giúp chúng ta vừa sử dụng được phép biến đổi tương đương cũng vừa sử dụng được phép biến đổi hệ quả.

-Đặc thù của dạng toán này là việc tìm điều kiện $\sqrt{a_3x^2+b_3x+c_3}-\sqrt{a_1x^2+b_1x+c_1}\geq 0$ tương đối đơn giản. Nếu trong trường hợp việc tìm điều kiện này là khó khăn, chúng ta hãy ưu tiên cho việc sử dụng phép biến đổi hệ quả.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

a) Giải phương trình $\sqrt{x^2+3}+\sqrt{2x^2-1}=\sqrt{3x^2+6}$. Đáp số. x $=\pm 1$.

b) Giải phương trình $\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2+2x+10}=\sqrt{29}$. Đáp số. $x=\dfrac{1}{5}$.

c) Giải phương trình $\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+2x}=\sqrt{2x^2}$. Đáp số.$x=0; x=\dfrac{-1-\sqrt{10}}{2}$.

d) Giải phương trình $\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{2x^2+2}$. Đáp số. $x=1$.

e) Giải phương trình $\sqrt{-x^2-x+1}-\sqrt{2x^2+2x}=\sqrt{x^2+x+1}$ Đáp số. $x=-1; x=0$.

DẠNG 8. $\sqrt[3]{a_1x+b_1}+\sqrt[3]{a_2x+b_2}=\sqrt[3]{a_3x+b_3}$

Phương pháp giải. Biến đổi phương trình về dạng:
$3\sqrt[3]{a_1x+b_1}.\sqrt[3]{a_2x+b_2}\left(\sqrt[3]{a_1x+b_1}+\sqrt[3]{a_2x+b_2}\right)=\left(a_3-a_2-a_1\right)x+\left(b_3-b_2-b_1\right)$
$\Rightarrow 3\sqrt[3]{\left(a_1x+b_1\right)\left(a_1x+b_1\right)\left(a_1x+b_1\right)}=\left(a_3-a_2-a_1\right)x+\left(b_3-b_2-b_1\right)\Leftrightarrow$
$27\left(a_1x+b_1\right)\left(a_1x+b_1\right)\left(a_1x+b_1\right)=\left[\left(a_3-a_2-a_1\right)x+\left(b_3-b_2-b_1\right)\right]^3$.

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-3}$.

Lời giải.
Phương trình đã cho tương đương với:
$\left(\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}\right)^3=2x-3\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}\left(\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}\right)=0$

$$\Rightarrow 3\sqrt[3]{(x-1)(x-2)(2x-3)}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\\ x=2\\ x=\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$$

Thử lại ta thấy các giá trị $x=1; x=2; x=\dfrac{3}{2}$ đều thỏa mãn phương trình đã cho.
-Kết luận. Tập nghiệm của phương trình đã cho là $T=\left\{1;2;\dfrac{3}{2}\right\}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{x-1}$.

Lời giải.
Phương trình đã cho tương đương với:
$\left(\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x}\right)^2=x-1\Leftrightarrow 3x-1+3\sqrt[3]{x(2x-1)}\left(\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x}\right)=x-1$
$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{x(2x-1)}\left(\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x}\right)=-2x\Rightarrow 3\sqrt[3]{x(2x-1)(x-1)}=-2x\Leftrightarrow 62x^3-81x^2+27x=0$
$\Leftrightarrow x=0$
Thử lại ta thấy giá trị $x=0$ thỏa mãn phương trình đã cho.
-Kết luận. Nghiệm của phương trình đã cho là $x=0$.

Chú ý

-Chúng ta đã sử dụng hằng đẳng thức $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$ khi nâng lên lũy thừa.
-Trong các phép biến đổi ở bài toán, việc thay $\sqrt[3]{a_1x+b_1}+\sqrt[3]{a_2x+b_2}=\sqrt[3]{a_3x+b_3}$ là một phép biến đổi hệ quả. Vì vậy ta cần thử lại tập nghiệm tìm được vào phương trình ban đầu để kiểm tra nó có là nghiệm hay không.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

a) Giải phương trình $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{3x+1}$. Đáp số: $x=\dfrac{7}{6}$.
b) Giải phương trình $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-3}$. Đáp số: T $=\left\{1;\dfrac{3}{2};2\right\}$.
c) Giải phương trình $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+3}=0$. Đáp số: $x=-2$.
d) Giải phương trình $\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{2x+2}+\sqrt[3]{2x+3}=0$. Đáp số: $x=-1$.
e) Giải phương trình $\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+6}=\sqrt[3]{2x+11}$. Đáp số: $T=\left\{-6;-5;-\dfrac{11}{2}\right\}$.

DẠNG 9. $\sqrt{(ax+b)(m_1x+n_1)}+\sqrt{(\mathrm{ax+b})(m_2x+n_2)}=\sqrt{(ax+b)(m_3x+n_3)}$

Phương pháp giải. Nâng lên lũy thừa, đưa phương trình về dạng $(ax+b)^2[f(x)-g(x)]=0$.

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sqrt{x^2+4x+3}+\sqrt{x^2+x}=\sqrt{3x^2+4x+1}$.

Lời giải.
-Bình luận. Đây là dạng toán khá cơ bản, phương pháp giải toán thường dùng là đưa phương trình về dạng: $\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x}-\sqrt{3x+1}\right)=0$. Tuy nhiên vấn đề khó khăn với nhiều học sinh đó là phải

chia các trường hợp để thực hiện được phép biến đổi $\sqrt{A.B}=\sqrt{A}.\sqrt{B}$, để tránh rắc rối này chúng ta sẽ sử dụng phép nâng lên lũy thừa.

Điều kiện: $\begin{cases} x^2+4x+3\geq 0 \\ x^2+x\geq 0 \\ 3x^2+4x+1\geq 0 \end{cases}$ $(*)$. Phương trình đã cho tương đương với:

$2x^2+5x+3+2\sqrt{(x+1)^2+(x^2+3x)}=3x^2+4x+1 \Leftrightarrow 2\sqrt{(x+1)^2(x^2+3x)}=(x+1)(x-2) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} (x+1)(x-2)\geq 0 \\ 4(x+1)^2(x^2+3x)=(x+1)^2(x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x-2)\geq 0 \\ (x+1)^2(3x^2+16x-4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{-8-\sqrt{76}}{3} \end{array}\right.$$

Kết luận. Tập nghiệm của phương trình đã cho là $T=\left\{-1;\dfrac{-8-\sqrt{76}}{3}\right\}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\sqrt{x(x-1)}+\sqrt{x(2x-1)}=x$.

✍ **Lời giải.**

Điều kiện $\begin{cases} x(x-1)\geq 0 \\ x(2x-1)\geq 0 \end{cases}$. Phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ 3x^2-2x+2\sqrt{x^2(x-1)(2x-1)}=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ x\sqrt{(x-1)(2x-1)}=x(1-x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \begin{cases} 0\leq x\leq 1 \\ (x-1)(2x-1)=(1-x)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$$

Kết luận. Tập nghiệm của phương trình đã cho là $T=\{0;1\}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

a) Giải phương trình $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+x}=\sqrt{(x+1)(2x+3)}$. Đáp số: $T=\left\{-1;\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\right\}$.

b) Giải phương trình $\sqrt{2x^2-3x}+\sqrt{2x^2-5x+3}=\sqrt{2x^2-7x+6}$. Đáp số: $x=\dfrac{3}{2};x=1-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

c) Giải phương trình $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2+3x+2}=x+1$. Đáp số: x $=-1$.

d) Giải phương trình $\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{2x^2-3x+1}=x-1$. Đáp số: $x=1$.

e) Giải phương trình $\sqrt{x^2-9x+24}-\sqrt{6x^2-59x+149}=5-x$. Đáp số: $x=5;x=\dfrac{19}{3}$.

DẠNG 10. $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=\sqrt{u(x)}+\sqrt{v(x)}$

Phương pháp giải. $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=\sqrt{u(x)}+\sqrt{v(x)}$

(Trong đó $\sqrt{f(x).g(x)}=\sqrt{u(x).v(x)}$ hoặc $\sqrt{f(x).u(x)}=\sqrt{v(x).g(x)}$ hoặc $f(x)+g(x)=u(x)+v(x)$)

☑ Trường hợp $\sqrt{f(x).g(x)}=\sqrt{u(x).v(x)}$ sử dụng phép biến đổi tương đương: $\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}\right)^2=\left(\sqrt{u(x)}+\sqrt{v(x)}\right)^2$.

- ☑ Trường hợp $\sqrt{f(x).g(x)}=\sqrt{u(x).v(x)}$ sử dụng phép biến đổi hệ quả: $\left(\sqrt{f(x)}-\sqrt{u(x)}\right)^2=\left(\sqrt{v(x)}-\sqrt{g(x)}\right)^2$.
- ☑ Trường hợp $f(x)+g(x)=u(x)+v(x)$, sử dụng phép biến đổi tương đương đưa về phương trình dạng: $\sqrt{f(x).g(x)}=\sqrt{u(x).v(x)}$.

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sqrt{\dfrac{x^3+1}{x+3}}+\sqrt{x+3}=\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x+1}$.

Lời giải.

Điều kiện $x\geq -1$. Phương trình đã cho tương đương với:

$\left(\sqrt{\dfrac{x^3+1}{x+3}}+\sqrt{x+3}\right)^2=\left(\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x+1}\right)^2\Leftrightarrow \dfrac{x^3+1}{x+3}+2\sqrt{x^3+1}+(x+3)=(x^2-x+1)+2\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)}+(x+1)\Leftrightarrow \dfrac{x^3+1}{x+3}=x^2-x-1\Leftrightarrow x^2-2x-2=0\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{3}$.

Kết luận. Tập nghiệm của phương trình đã cho là $T=\left\{1-\sqrt{3};1+\sqrt{3}\right\}$. ■

Ví dụ 2. Giải phương trình $\sqrt{\dfrac{x^3+8}{2x+1}}+\sqrt{x+2}=\sqrt{x^2-2x+4}+\sqrt{2x+1}$.

Lời giải.

Điều kiện $x>-\dfrac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với:

$\sqrt{\dfrac{x^3+8}{2x+1}}-\sqrt{2x+1}=\sqrt{x^2-2x+4}-\sqrt{x+2}\Rightarrow \dfrac{x^3+8}{2x+1}-2\sqrt{x^3+8}+(2x+1)=(x^2-2x+4)-2\sqrt{(x+2)(x^2-2x+4)}+(x+2)\Leftrightarrow x^3-5x^2+7x-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$

Thử lại ta thấy nghiệm của phương trình đã cho chỉ có giá trị $x=1$. ■

Ví dụ 3. Giải phương trình $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}=2\sqrt{x}+\sqrt{2x+2}$.

Lời giải.

Nhận xét: Ta thấy $(x+3)+4x=(3x+1)+(2x+2)$ nếu ta biến đổi phương trình về dạng: $\sqrt{x+3}-\sqrt{4x}=\sqrt{2x+2}-\sqrt{3x+1}$ và nâng lên lũy thừa với phép biến đổi hệ quả.

Điều kiện $x\geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với:

$\sqrt{x+3}-\sqrt{4x}=\sqrt{2x+2}-\sqrt{3x+1}\Rightarrow 5x+3-2\sqrt{4x(x+3)}=5x+3-2\sqrt{(2x+2)(3x+1)}\Leftrightarrow\sqrt{4x(x+3)}=\sqrt{(2x+2)(3x+1)}\Leftrightarrow x^2-2x+1=0\Leftrightarrow x=1$

Thử lại ta thấy $x=1$ thỏa mãn phương trình ban đầu.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là: $x=1$. ■

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

a) Giải phương trình $\sqrt{\dfrac{8x^3+1}{x+2}}+\sqrt{x+2}=\sqrt{2x+1}+\sqrt{4x^2-2x+1}$. Đáp số: $x=-\dfrac{1}{4};x=-1$.

b) Giải phương trình $\sqrt{\dfrac{8x^3-1}{2x+3}}+\sqrt{2x+3}=\sqrt{4x^2+2x+1}+\sqrt{2x-1}$ Đáp số: $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

c) Giải phương trình $\sqrt{\dfrac{8x^3-1}{x+1}}-\sqrt{x+1}=\sqrt{4x^2+2x+1}-\sqrt{2x-1}$. Đáp số: $x=2$.

d) Giải phương trình $\sqrt{10x+1}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{9x+4}+\sqrt{2x-2}$. Đáp số: $x=3$.

e) Giải phương trình $\sqrt{x+7}+\sqrt{4x+1}=\sqrt{5x-6}+2\sqrt{2x-3}$. Đáp số: $x=\dfrac{13}{4}$.

Tổng kết

① Mục đích của phương pháp nâng lên lũy thừa là làm triệt tiêu các căn thức và đưa phương trình vô tỷ về hữu tỷ.

② Do phương pháp nâng lên lũy thừa thường làm số mũ của x tăng lên, vì thế để triệt tiêu những biểu thức chứa x có số mũ cao chúng ta nên khéo léo trong việc lựa chọn sử dụng phép biến đổi tương đương hay phép biến đổi hệ quả.

③ Trong một số bài toán khác chúng ta cần có sự kết hợp với những phương pháp khác như: đánh giá, sử dụng đạo hàm của hàm số... với những phương trình có số mũ cao sau khi nâng lên lũy thừa (xem chương III).

④ Trong một số ví dụ được nêu ở trên, chúng ta thấy nhiều bài toán được giải quyết một cách đẹp mắt nhờ sự kết hợp hoàn hảo giữa phép biến đổi tương đương và phép biến đổi hệ quả. Đó chính là sự biến tấu thú vị của phương pháp nâng lên lũy thừa.

⑤ Những sai lầm và khó khăn thường gặp:
- ☑ Sử dụng tùy tiện dấu hay một cách tùy tiện.
- ☑ Sai lầm khi khai phương một tích: $\sqrt{A.B}=\sqrt{A}.\sqrt{B}$; $\sqrt{A^2}=A$.
- ☑ Không phân biệt được phép biến đổi tương đương hay biến đổi hệ quả.

2 Giải toán bằng "con mắt" của phương pháp nâng lên lũy thừa

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1=0$.

✍ **Lời giải.**

Điều kiện $x\geq\dfrac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với:

$$-\left(x^2-3x+1\right)=\sqrt{2x-1}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-3x+1\leq 0\\ \left(x^2-3x+1\right)^2=2x-1.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-3x+1\leq 0\\ x^4-6x^3+11x^2-8x+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-3x+1\leq 0\\ \left(x^2-2x+1\right)\left(x^2-4x+2\right)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\leq x\leq\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\\ \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=2\pm\sqrt{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=2-\sqrt{2}.\end{array}\right.$$

Kết luận. Tập nghiệm của phương trình đã cho là $T=\left\{1;2-\sqrt{2}\right\}$. ■

Chú ý

! -Quan sát phương trình, ta nhận thấy nếu sử dụng phương pháp nâng lên lũy thừa phương trình đã cho sẽ được đưa về phương trình hữu tỷ bậc 4. Để tìm nghiệm của phương trình bậc 4 này, ta viết phương trình $X^4-6X^3+11X^2-8X+2=0$ lên máy tính CaSiO FX 570 ES (Xem phụ lục).
-Ở ví dụ trên ta sử dụng hằng đẳng thức quen thuộc sau để khai triển thành đa thức $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$.

Bài tập tương tự

a) Giải phương trình $x^2 + \sqrt{x+1} = 1$.
b) Giải phương trình $9x^2 + 12x - 2 = \sqrt{3x+8}$.
c) Giải phương trình $9x^2 - 6x - 5 = \sqrt{3x+5}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $2x^2 - 6x - 1 = \sqrt{4x+5}$.

✍ Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\dfrac{4}{5}$. Phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} 2x^2 - 6x - 1 \geq 0 \\ \left(2x^2 - 6x - 1\right)^2 = 4x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 6x - 1 \geq 0 \\ x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 2x - 1 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 6x - 1 \geq 0 \\ \left(x^2 - 2x - 1\right)\left(x^2 - 4x + 1\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geq \dfrac{3+\sqrt{11}}{2} \\ x \leq \dfrac{3-\sqrt{11}}{2} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \pm \sqrt{2} \\ x = 2 \pm \sqrt{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 - \sqrt{2} \\ x = 2 + \sqrt{3} \end{array}\right.$$

-Kết luận. Tập nghiệm của phương trình đã cho là $T = \left\{1 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{3}\right\}$. ■

Chú ý

Dạng toán ở ví dụ 1 và 2 là $ax^2 + bx + c = \sqrt{mx+n}\,(a, m \neq 0)$, về cơ bản cả hai ví dụ này chúng ta đều sử dụng phương pháp nâng lên lũy thừa để giải toán. Tuy nhiên sự khác nhau giữa hai ví dụ này chính là vấn đề có nghiệm hữu tỷ hay không có nghiệm hữu tỷ. Ở ví dụ 2, sử dụng máy tính CaSiO FX 570 ES ta hoàn toàn tìm được một nhân tử là $\left(x^2 - 2x - 1\right)$, công việc còn lại là thực hiện phép chia đa thức $x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 2x - 1$ cho đa thức $x^2 - 2x - 1$ để đưa phương trình bậc 4 về dạnh tích.

Bài tập tương tự

① Giải phương trình $x^2 + \sqrt{x+11} = 11$.
② Giải phương trình $18x^2 + 6x - 29 = \sqrt{12x+61}$.
③ Giải phương trình $4x^2 + 4x - 3 = \sqrt{2x+5}$.

Ví dụ 3. Giải phương trình $2\left(x^2 + 2\right) = 5\sqrt{x^3+1}$.

✍ Lời giải.

Điều kiện $x \geq -1$. Phương trình đã cho tương đương với:

$4\left(x^2+2\right)^2 = 25\left(x^3+1\right) \Leftrightarrow 4x^4 - 25x^3 + 16x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - 5x - 3\right)\left(4x^2 - 5x + 3\right) = 0 \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 5x - 3 = 0 \\ 4x^2 - 5x + 3 = 0 \ (VN) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}.$$

Kết luận. Tập nghiệm của phương trình đã cho là $T = \left\{\dfrac{5-\sqrt{37}}{2}; \dfrac{5+\sqrt{37}}{2}\right\}$. ■

Bài tập tương tự

a) Giải phương trình $2x^2 + 5x - 1 = 7\sqrt{x^3-1}$.

b) Giải phương trình $3\left(x^2-x+6\right)=10\sqrt{x^3+8}$.
c) Giải phương trình $3\left(x^2+2\right)=10\sqrt{x^3+1}$.

Ví dụ 4. Giải phương trình $\sqrt{4x-1}+\sqrt{4x^2-1}=1$.

Lời giải.
Điều kiện $x\geq\dfrac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với:
$\left(\sqrt{4x-1}+\sqrt{4x^2-1}\right)^2=1\Leftrightarrow 4x^2+4x-2+2\sqrt{(4x-1)\left(4x^2-1\right)}=1\Leftrightarrow 2\sqrt{(4x-1)\left(4x^2-1\right)}=3-4x-4x^2\Leftrightarrow\begin{cases}4x^2+4x-3\leq 0\\4(4x-1)\left(4x^2-1\right)=\left(3-4x-4x^2\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{3}{2}\leq x\leq\dfrac{1}{2}\\(2x-1)\left(8x^3-12x^2-2x-5\right)=0\end{cases}$
$\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.
Kết luận. Tập nghiệm của phương trình đã cho là $T=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$. ■

Bài tập tương tự

① Giải phương trình $\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x-1}=2$.
② Giải phương trình $2\sqrt{2x+4}+4\sqrt{2-x}=\sqrt{9x^2+16}$.
③ Giải phương trình $\sqrt{2x^2+16x+18}+\sqrt{x^2-1}=2x+4$.

Ví dụ 5. Giải phương trình $x^2+3x+1=(x+3)\sqrt{x^2+1}$.

Lời giải.
Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases}\left(x^2+3x+1\right)(x+3)\geq 0\\\left(x^2+3x+1\right)^2=(x+3)^2\left(x^2+1\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\geq\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}\\-3\leq x\leq\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.\\x^2-8=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\pm 2\sqrt{2}.$$

Kết luận. Tập nghiệm của phương trình đã cho là $T=\left\{-2\sqrt{2};2\sqrt{2}\right\}$. ■

Bài tập tương tự

a) Giải phương trình $(3x+2)\sqrt{2x-3}=2x^2+3x-6$.
b) Giải phương trình $(x+3)\sqrt{10-x^2}=x^2-x-12$.
c) Giải phương trình $2(3x+1)\sqrt{2x^2-1}=10x^2+3x-6$.

Bình luận. Từ các ví dụ trên ta có thể nhận thấy:
- ☑ Việc khai triển thành đa thức khá phức tạp, dễ dẫn đến những tính toán sai lầm.
- ☑ Tuy chúng ta có thể dễ dàng tách các đa thức bậc cao thành tích, nhưng việc kết hợp với điều kiện có nghiệm khi nâng lên lũy thừa làm mất khá nhiều thời gian cho người giải toán.
- ☑ Từ những khó khăn đó ta cần tìm những phương pháp giải khác để đưa bài toán về với một lời giải ngắn gọn hơn, bớt những tính toán phức tạp hơn.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

a) Giải phương trình $2\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+1}=4$. (Khối D – 2005) Đáp số: $x=1; x=2-\sqrt{2}$.

b) Giải phương trình $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=\sqrt{2\left(x^3+1\right)}$. Đáp số: $x=1$.

c) Giải phương trình $\sqrt{x^2-\dfrac{7}{x^2}}+\sqrt{x-\dfrac{7}{x^2}}=x$. Đáp số: $x=2$.

d) Giải phương trình $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}=2\sqrt{x}+\sqrt{2x+2}$. Đáp số: $x=1$.

e) Giải phương trình $\dfrac{\sqrt{2\left(x^2-16\right)}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x-3}=\dfrac{7-x}{\sqrt{x-3}}$. Đáp số: $x=10-\sqrt{34}$.

f) Giải phương trình $\sqrt{x+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{x-\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{2}{x}$. Đáp số: x $=\sqrt[3]{\dfrac{5}{4}}$.

g) Giải phương trình $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{2\left(x^3+1\right)}$. Đáp số: $x=1$.

h) Giải phương trình $\sqrt{(3-x)^3}+5(x-1)\sqrt{3-x}=6\sqrt{x-1}$. Đáp số: $x=2$.

B PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG LƯỢNG LIÊN HỢP

Một trong những Cách người giải toán lựa chọn để xử lý một phương trình vô tỷ, đó là đưa phương trình đó về dạng tích. Phương pháp nhân thêm một lượng liên hợp hay tách thành các biểu thức liên hợp là những sự hỗ trợ đắc lực cho phương án xử lý này. Trước hết mời các bạn cùng rèn luyện kỹ năng nhân thêm một lượng liên hợp và tách thành các biểu thức liên hợp thường dùng.

1 Nhân thêm lượng liên hợp

Kiểu 1. Biến đổi $\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}=\dfrac{f(x)-g(x)}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}}, f^2(x)+g^2(x)>0, \forall x\in D$

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sqrt{3x+1}+2x=\sqrt{x-4}-5$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích.

Nhận thấy $(3x+1)-(x-4)=2x+5$, và $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x-4}>0, \forall x\geq 4$ nên ta có thể thực hiện phép biến đổi $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-4}=\dfrac{2x+5}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x-4}}$ để làm xuất hiện nhân tử $(2x+5)$.

Điều kiện $x\geq 4$.

Ta có

$\sqrt{3x+1}+2x=\sqrt{x-4}-5 \Leftrightarrow \left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-4}\right)+2x+5=0 \Leftrightarrow \dfrac{2x+5}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x-4}}+2x+5=0$

$\Leftrightarrow (2x+5)\left(\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x-4}}+1\right)=0 \Leftrightarrow 2x+5=0 \left(\text{Do } \dfrac{1}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x-4}}+1>0, \forall x\geq 4\right)$

$\Leftrightarrow x=-\dfrac{5}{2}$

Đối chiếu điều kiện, suy ra $x=-\dfrac{5}{2}$ không thỏa mãn. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm. ■

Ví dụ 2. Giải phương trình $\sqrt{x^2+5x+5}+x^2=\sqrt{x+2}-3x-2$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích. Nhận thấy $\left(x^2+5x+5\right)-(x+2)=x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$ và $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$ đồng thời: $\sqrt{x^2+5x+5}+\sqrt{x+2}\neq 0$ nên ta có thể thực hiện phép biến đổi: $\sqrt{x^2+5x+5}-\sqrt{x+2}=\dfrac{x^2+4x+3}{\sqrt{x^2+5x+5}+\sqrt{x+2}}$ để làm xuất hiện nhân tử $(x+1)$.

Điều kiện $x\geq\dfrac{-5+\sqrt{5}}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với:

$\left(\sqrt{x^2+5x+5}-\sqrt{x+2}\right)+x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+4x+3}{\sqrt{x^2+5x+5}+\sqrt{x+2}}+x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow$

$(x+1)\left(\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+5x+5}+\sqrt{x+2}}+x+2\right)=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ Do $\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+5x+5}+\sqrt{x+2}}+x+2>0, \forall x\geq\dfrac{-5+\sqrt{5}}{2}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = -1$. ■

Ví dụ 3. Giải phương trình $\sqrt{x^2+x-2}+x^2=\sqrt{2(x-1)}+1$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích. Nhận thấy $(x^2+x-2)-(2x-2)=x^2-x=x(x-1)$ và $x^2-1=(x-1)(x+1)$, như vậy khi chúng ta thực hiện phép nhân liên hợp sẽ xuất hiện nhân tử: $(x-1)$. Tuy nhiên khi $x=1$, biểu thức $\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{2(x-1)}=0$ do đó biến đổi $\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{2(x-1)}=\dfrac{x^2-x}{\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{2(x-1)}}$ là một phép biến đổi không có nghĩa. Vì vậy trước khi thực hiện phép nhân liên hợp ta cần chú ý đến biểu thức liên hợp đã khác 0 hay chưa. Để xử lý các dạng toán này ta có thể chia ra các trường hợp của x làm cho $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=0$ và trường hợp $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}\neq 0$. Cụ thể, với bài toán này ta có thể xử lý như sau:

Điều kiện $x \geq 1$.

+Nhận thấy $x=1$ là một nghiệm của phương trình đã cho.

+Với $x>1$, phương trình đã cho tương đương với:

$\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{2(x-1)}+x^2-1=0 \Leftrightarrow$

$\dfrac{x^2-x}{\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{2(x-1)}}+(x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{2(x-1)}}+x+1\right)=0(*)$

Khi $x>1$ thì $x-1>0$ và $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{2(x-1)}}+x+1>0$ nên phương trình (*) không có nghiệm $x>1$.

Kết luận. Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$. ■

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

a) Giải phương trình $\sqrt{3x+5}+x=6+\sqrt{2x+11}$. Đáp số: $x=6$.

b) Giải phương trình $\sqrt{x^2+2x}+x=1+\sqrt{3x}$. Đáp số: $x=1$.

c) Giải phương trình $\sqrt{x^2+3x}+x^2=2\sqrt{x}+x$. Đáp số: $x=0; x=1$.

d) Giải phương trình $\sqrt{x^2+x+1}+x^3=\sqrt{2x+2}+x^2+x$. Đáp số: $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

e) Giải phương trình $\sqrt{x^2-3x+5}+x^3=\sqrt{2x-1}+4x^2-x-6$. Đáp số: $x=2; x=3$.

Kiểu 2. $\sqrt[3]{f(x)}-\sqrt[3]{g(x)}=\dfrac{f(x)-g(x)}{\sqrt[3]{f^2(x)}+\sqrt[3]{f(x).g(x)}+\sqrt[3]{g^2(x)}}$ hoặc biến đổi:

$\sqrt[3]{f(x)}+\sqrt[3]{g(x)}=\dfrac{f(x)+g(x)}{\sqrt[3]{f^2(x)}-\sqrt[3]{f(x).g(x)}+\sqrt[3]{g^2(x)}}$ với $f^2(x)+g^2(x)\neq 0$.

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sqrt[3]{2x+3}-\sqrt[3]{x-1}+x+4=0$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích. Nhận thấy $(2x+3)-(x-1)=x+4$ và không có giá trị nào của làm cho các biểu thức $\sqrt[3]{2x+3}$, $\sqrt[3]{x-1}$ đồng thời bằng 0. Do đó ta có thể thực hiện phép nhân liên hợp để xuất hiện nhân tử $(x+4)$. $\sqrt[3]{2x+3}-\sqrt[3]{x-1}+x+4=0 \Leftrightarrow \dfrac{x+4}{\sqrt[3]{(2x+3)^2}+\sqrt[3]{(2x+3)(x-1)}+\sqrt[3]{(x-1)^2}}+(x+4)=0$

$$\Leftrightarrow (x+4)\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{(2x+3)^2}+\sqrt[3]{(2x+3)(x+1)}+\sqrt[3]{(x-1)^2}}+1\right)=0 \Leftrightarrow x=-4$$

-Kết luận. Phương trình có nghiệm $x=-4$. ■

Ví dụ 2. Giải phương trình $\sqrt[3]{x^2+3x+1}+x^2=\sqrt[3]{5x+1}+2x$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích. Nhận thấy $(x^2+3x+1)-(5x+1)=x^2-2x$ và không có giá trị nào của làm cho các biểu thức $\sqrt[3]{x^2+3x+1}, \sqrt[3]{5x+1}$ đồng thời bằng 0. Từ đó ta có thể nhân thêm lượng liên hợp để xuất hiện nhân tử (x^2-2x). Phương trình đã cho tương đương với: $\left(\sqrt[3]{x^2+3x+1}-\sqrt[3]{5x+1}\right)+(x^2-2x)=0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-2x}{\sqrt[3]{(x^2+3x+1)^2}+\sqrt[3]{(x^2+3x+1)(5x+1)}+\sqrt[3]{(5x+1)^2}}+(x^2-2x)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$$

-Kết luận. Phương trình đã cho có nghiệm $x=0; x=2$. ■

Ví dụ 3. Giải phương trình $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{2x-3}+3x=2$.

Lời giải.

-Phân tích. Nhận thấy $(x+1)+(2x-3)=3x-2$ và không có giá trị nào của làm cho các biểu thức $\sqrt[3]{x+1}, \sqrt[3]{2x-3}$ đồng thời bằng 0. Nên ta có thể thực hiện phép nhân liên hợp để xuất hiện nhân tử $(3x-2)$. Phương trình đã cho tương đương với:

$$\frac{3x-2}{\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x+1)(2x-3)}+\sqrt[3]{(2x-3)^2}}+3x-2=0$$

$$\Leftrightarrow (3x-2)\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x+1)(2x-3)}+\sqrt[3]{(2x-3)^2}}+1\right)=0 \Leftrightarrow 3x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$$

-Kết luận. Nghiệm của phương trình đã cho là $x=\frac{2}{3}$. ■

Ví dụ 4. Giải phương trình $\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{2x-3}+3x^3=x^2$.

Lời giải.

-Phân tích. Nhận thấy $(x+2)+(2x-3)=3x-1; 3x^3-x^2=x^2(3x-1)$ và không có giá trị nào của làm cho các biểu thức $\sqrt[3]{x+2}, \sqrt[3]{2x-3}$ đồng thời bằng 0. Phương trình đã cho tương đương với:

$$\frac{3x-1}{\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt[3]{(x+2)(2x-3)}+\sqrt[3]{(2x-3)^2}}+x^2(3x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (3x-1)\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt[3]{(x+2)(2x-3)}+\sqrt[3]{(2x-3)^2}}+x^2\right)=0 \Leftrightarrow 3x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$$

-Kết luận. Nghiệm của phương trình đã cho là $x=\frac{1}{3}$. ■

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

a) Giải phương trình $\sqrt[3]{2x+1}+x=\sqrt[3]{x-5}-6$. Đáp số: $x=-6$.
b) Giải phương trình $\sqrt[3]{x^2-x-1}+x^2+2=\sqrt[3]{2x-3}+3x$. Đáp số: $x=1; x=2$.
c) Giải phương trình $\sqrt[3]{3x+5}+x^3=\sqrt[3]{x+5}$. Đáp số: $x=0$.
d) Giải phương trình $\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt[3]{x-2}+4x=1$. Đáp số: $x=\frac{1}{4}$.
e) Giải phương trình $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{2x-1}+x^3=1$. Đáp số: $x=1$.
f) Gải phương trình $\sqrt[3]{x^2+1}+\sqrt{x-3}+x^2=2-x$. Đáp số: $x=-2; x=1$.

Kiểu 3. $\sqrt{f(x)}-a=\frac{f(x)-a^2}{\sqrt{f(x)}+a}$, với $a>0$

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}+x-5=0$.

Lời giải.

-Phân tích.
-Nhận thấy: $x = 1$ là nghiệm của phương trình đã cho (Các bạn cũng có thể sử dụng máy tính CasiO để kiểm tra phương trình trên có nghiệm duy nhất $x = 1$-Xem Phụ lục)
-Khi $x = 1$, thì: $\sqrt{3x+1} = \sqrt{3.(1)+1} = 2 \Rightarrow \sqrt{3x+1} - 2 = 0$
và $\sqrt{x+3} = \sqrt{1+3} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x+3} - 2 = 0$
Từ các phân tích đó ta có thể viết phương trình dưới dạng: $\left(\sqrt{3x+1} - 2\right) + \left(\sqrt{x+3} - 2\right) + x - 1 = 0$ để đưa phương trình về dạng có nhân tử $(x-1)$. Điều kiện $x \geq -\frac{1}{3}$.
Phương trình đã cho tương đương với:
$\left(\sqrt{3x+1} - 2\right) + \left(\sqrt{x+3} - 2\right) + x - 1 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{3x-3}{\sqrt{3x+1}+2} + \dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}+2} + x - 1 = 0$
$\Leftrightarrow (x-1)\left(\dfrac{3}{\sqrt{3x+1}+2} + \dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2} + 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 1,$
Do $\dfrac{3}{\sqrt{3\mathrm{x}+1}+2} + \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{x}+3}+2} + 1 > 0, \forall \mathrm{x} \geq -\dfrac{1}{3}$
-Kết luận. Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$. ■

Ví dụ 2. Giải phương trình $\sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0\,(\mathrm{KhoiB} - 2010)$

Lời giải.
-Nhận thấy $x = 5$ là nghiệm của phương trình đã cho.
-Khi $x = 5$, thì: $\sqrt{3x+1} = \sqrt{3.(5)+1} = 4 \Rightarrow \sqrt{3x+1} - 4 = 0$
và $\sqrt{6-x} = \sqrt{6-5} = 1 \Rightarrow \sqrt{6-x} - 1 = 0$
Từ các phân tích đó ta có thể viết lại phương trình thành $\left(\sqrt{3x+1} - 4\right) + \left(1 - \sqrt{6-x}\right) + 3x^2 - 14x - 5 = 0$ để đưa phương trình về dạng có nhân tử $(x-5)$. Điều kiện $-\frac{1}{3} \leq x \leq 6$.
$\left(\sqrt{3x+1} - 4\right) + \left(1 - \sqrt{6-x}\right) + 3x^2 - 14x - 5 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{3x-15}{\sqrt{3x+1}+4} + \dfrac{x-5}{1+\sqrt{6-x}} + (x-5)(3x+1) = 0$
$\Leftrightarrow (x-5)\left[\dfrac{3}{\sqrt{3x+1}+4} + \dfrac{1}{1+\sqrt{6-x}} + (3x+1)\right] = 0 \Leftrightarrow x = 5$ $Do \dfrac{3}{\sqrt{3x+1}+4} + \dfrac{1}{1+\sqrt{6-x}} + (3x+1) > 0, \forall x \in \left[-\dfrac{1}{3}; 6\right]$
-Kết luận. Phương trình đã cho có nghiệm $x = 5$. ■

Ví dụ 3. Giải phương trình $\sqrt{x^2+2x+3} + \sqrt{x+2} = \sqrt{x^2+1} + 1$.

Lời giải.
-Phân tích. Nhận thấy phương trình có nghiệm $x = -1$.
Khi đó: $\sqrt{x^2+2x+3} = \sqrt{x^2+1}; \sqrt{x+2} = 1$, nên ta có thể giải quyết bài toán như sau: Điều kiện: $x \geq -2$. Phương trình đã cho tương đương với:
$\left(\sqrt{x^2+2x+3} - \sqrt{x^2+1}\right) + \left(\sqrt{x+2} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2+1}} + \dfrac{x+1}{\sqrt{x+2}+1} = 0 \Leftrightarrow$ $(x+1)\left(\dfrac{2}{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{x+2}+1}\right) = 0 \Leftrightarrow x = -1$. $Do:$ $\dfrac{2}{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{x+2}+1} > 0, \forall x \geq -2$
-Kết luận. Phương trình đã cho có nghiệm $x = -1$. ■

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

a) Giải phương trình $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+4} + x = 3$. Đáp số: $x = 0$.
b) Giải phương trình $\sqrt{3x+1} + x^2 = 2 + \sqrt{2-x}$. Đáp số: $x = 1$.
c) Giải phương trình $(x+4)\sqrt{x+3} + x^3 = x^2 + x + 9$. Đáp số: $x = 1$.
d) Giải phương trình $\sqrt{x} = 1 - \sqrt[3]{3x^2+x-1} + \sqrt[3]{2x+1}$. Đáp số: $x = 1$.

e) Giải phương trình $\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{2x^2-x+1}=1+\sqrt{1-2x}$. Đáp số: $x=0, \text{x}=-\dfrac{1}{2}$.

Kiểu 4. Biến đổi $\sqrt[3]{f(x)}-a=\dfrac{f(x)-a^3}{\sqrt[3]{f^2(x)}+a\sqrt[3]{f(x)}+a^2}$ hoặc biến đổi

$\sqrt[3]{f(x)}+a=\dfrac{f(x)+a^3}{\sqrt[3]{f^2(x)}-a\sqrt[3]{f(x)}+a^2}$, với $a\neq 0$

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{5x+3}=4$.

Lời giải.

-Phân tích. Nhận thấy $x=1$ là một nghiệm của phương trình đã cho, lúc đó $\sqrt{x+3}=\sqrt{1+3}=2\Rightarrow \sqrt{x+3}-2=0$ và $\sqrt[3]{5x+3}=\sqrt[3]{5.(1)+3}=2\Rightarrow\sqrt[3]{5x+3}-2=0$

Khi đó chúng ta có thể thực hiện phép nhân liên hợp để xuất hiện nhân tử $(x-1)$. Điều kiện $x\geq -3$.

Phương trình đã cho tương đương với:

$\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{5x+3}=4\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+3}-2\right)+\left(\sqrt[3]{5x+3}-2\right)=0$

$\Leftrightarrow\dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}+2}+\dfrac{5(x-1)}{\sqrt[3]{(5x+3)^2}+2\sqrt[3]{5x+3}+4}=0\Leftrightarrow(x-1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2}+\dfrac{5}{\sqrt[3]{(5x+3)^2}+2\sqrt[3]{5x+3}+4}\right)=0\Leftrightarrow x=1$

Do $\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2}+\dfrac{5}{\sqrt[3]{(5x+3)^2}+2\sqrt[3]{5x+3}+4}>0,\forall x\geq -3$

-Kết luận. Phương trình có nghiệm $x=1$. ■

Ví dụ 2. Giải phương trình $\sqrt[3]{2x-3}+\sqrt{3x+1}=2-x$.

Lời giải.

-Phân tích. Nhận thấy $x=1$ là nghiệm của phương trình. Khi $x=1$, thì: $\sqrt[3]{2x-3}+1=0$; $\sqrt{3x+1}-2=0$. Từ đó ta thực hiện phép nhân liên hợp để xuất hiện nhân tử $(x-1)$. Điều kiện $x\geq -\dfrac{1}{3}$.

Phương trình đã cho tương đương với: $\left(\sqrt[3]{2x-3}+1\right)+\left(\sqrt{3x+1}-2\right)+(x-1)=0$

$\Leftrightarrow\dfrac{2(x-1)}{\sqrt[3]{(2x-3)^2}-\sqrt[3]{2x-3}+1}+\dfrac{3(x-1)}{\sqrt{3x+1}+2}+(x-1)=0$

$\Leftrightarrow(x-1)\left(\dfrac{2}{\sqrt[3]{(2x-3)^2}-\sqrt[3]{2x-3}+1}+\dfrac{3}{\sqrt{3x+1}+2}+1\right)=0\Leftrightarrow x=1$

Do $\dfrac{2}{\sqrt[3]{(2x-3)^2}-\sqrt[3]{2x-3}+1}+\dfrac{3}{\sqrt{3x+1}+2}+1>0,\forall x\geq-\dfrac{1}{3}$

-Kết luận. Phương trình đã cho có nghiệm $x=1$. ■

Ví dụ 3. Giải phương trình $\sqrt[3]{x+2}+6=\sqrt[3]{5-x}-x$.

Lời giải.

-Phân tích. Nhận thấy $x=-3$ là nghiệm của phương trình. Khi $x=-3$, ta có: $\sqrt[3]{x+2}+1=0; 2-\sqrt[3]{5-x}=0$, từ đó ta thực hiện phép nhân liên hợp để xuất hiện nhân tử $(x+3)$. Phương trình đã cho tương đương với: $\left(\sqrt[3]{x+2}+1\right)+\left(2-\sqrt[3]{5-x}\right)+(x+3)=0$

$\dfrac{x+3}{\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt[3]{x+2}+1}+\dfrac{x+3}{4+2\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{(5-x)^2}}+(x+3)=0$

$\Leftrightarrow(x+3)\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt[3]{x+2}+1}+\dfrac{1}{4+2\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{(5-x)^2}}+1\right)=0\Leftrightarrow x=-3$

-Kết luận. Phương trình đã cho có nghiệm $x=-3$. ■

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

a) Giải phương trình $\sqrt[3]{3x+2}+3x^3+x^2+3x=0$. Đáp số: $x=-\dfrac{1}{3}$.

b) Giải phương trình $\sqrt[3]{x+4}+\sqrt{2x+7}+x^2+8x+13=0$. Đáp số: $x=-3$.

c) Giải phương trình $\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt{2x+3}+4x^2+36x+65=0$. Đáp số: $x=-\dfrac{9}{2}$.

d) Giải phương trình $\sqrt[3]{2x+3}+(x+2)\sqrt{x+3}=\sqrt[3]{6-x}-3$. Đáp số: $x=-2$.

e) Giải phương trình $\sqrt[3]{2x-5}+\sqrt[3]{2x-3}+x^3+x=2\left(x^2+1\right)$. Đáp số:$x=2$.

Kiểu 5. $\sqrt{f(x)}-g(x)=\dfrac{f(x)-g^2(x)}{\sqrt{f(x)}+g(x)}$ với $\sqrt{f(x)}+g(x)\neq 0, \forall x\in D$

Ví dụ 1. Giải phương trình $x+\sqrt{x}=\sqrt{x^2-x+1}+1$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích. Nhận thấy $x=1$ là nghiệm của phương trình đã cho. Khi $x=1$, thì: $\sqrt{x^2-x+1}-x=0$; $\sqrt{x}-1=0$, từ đó ta thực hiện phép nhân liên hợp để xuất hiện nhân tử $(x-1)$. Điều kiện $x\geq 0$.
Phương trình đã cho tương đương với:

$\left(x-\sqrt{x^2-x+1}\right)+\left(\sqrt{x}-1\right)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x+\sqrt{x^2-x+1}}+\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}\right)=0 \Leftrightarrow x=1$

$Do: \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}>0, \forall x\geq 0$

-Kết luận. Phương trình có nghiệm $x=1$. ■

Ví dụ 2. Giải phương trình $2\sqrt[3]{x^2-4x-4}+x=2\sqrt{x-1}-4$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích. Nhận thấy $x=2$ là nghiệm của phương trình đã cho. Khi đó: $x-2\sqrt{x-1}=0$ và $\sqrt[3]{x^2-4x-4}+2=0$, từ đó ta thực hiện phép nhân liên hợp để xuất hiện nhân tử $x-2$. Điều kiện $x\geq 1$.
Phương trình đã cho tương đương với: $\left(x-2\sqrt{x-1}\right)+2\left(\sqrt[3]{x^2-4x-4}+2\right)=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2\left(\dfrac{1}{x+2\sqrt{x-1}}+\dfrac{2}{\sqrt[3]{(x^2-x-10)^2}-2\sqrt[3]{x^2-x-10}+4}\right)=0 \Leftrightarrow x=2$ Do $\dfrac{1}{x+2\sqrt{x-1}}+\dfrac{2}{\sqrt[3]{(x^2-x-10)^2}-2\sqrt[3]{x^2-x-10}+4}>0, \forall x\geq 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-4x+4}{x+2\sqrt{x-1}}+\dfrac{2\left(x^2-4x+4\right)}{\sqrt[3]{(x^2-4x-4)^2}-2\sqrt[3]{x^2-4x-4}+4}=0$

-Kết luận. Phương trình có nghiệm $x=2$. ■

Ví dụ 3. Giải phương trình $4x^3+5x^2+1=\sqrt{3x+1}-3x$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích. Nhận thấy phương trình đã cho có 2 nghiệm $x=0; \text{x}=-\dfrac{1}{4}$, suy ra chúng ta có thể đưa phương trình trên về phương trình tích với nhân tử $x(4x+1)=4x^2+x$ (Các bạn có thể sử dụng máy tính CaSiO để hỗ trợ tìm nghiệm của phương trình)

Bây giờ ta cần tìm m để: $(2x+m)^2-(3x+1)=4x^2+x \Rightarrow \begin{cases} 4m-3=1 \\ m^2-1=0 \end{cases} \Rightarrow m=1$

Suy ra khi ta thực hiện phép biến đổi: $(2x+1)-\sqrt{3x+1}=\dfrac{4x^2+x}{(2x+1)+\sqrt{3x+1}}$ sẽ xuất hiện nhân tử $(4x^2+x)$. Điều kiện: $x \geq -\dfrac{1}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với:

$$\left[(2x+1)-\sqrt{3x+1}\right]+4x^3+5x^2+x=0 \Leftrightarrow \frac{4x^2+x}{(2x+1)+\sqrt{3x+1}}+(x+1)(4x^2+x)=0$$

$$\Leftrightarrow (4x^2+x)\left(\frac{1}{2x+1+\sqrt{3x+1}}+x+1\right)=0 \Leftrightarrow 4x^2+x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\dfrac{1}{4} \end{array}\right.$$

Do$\dfrac{1}{2x+1+\sqrt{3x+1}}+x+1>0, \forall x \geq -\dfrac{1}{3}$

-Kết luận. Nghiệm của phương trình đã cho là $x=-\dfrac{1}{4}$; x = 0. ■

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

a) Giải phương trình $\sqrt{2x^2+3x+1}-x=2-\sqrt{2x+1}$. Đáp số: $x=0$.
b) Giải phương trình $\sqrt{5x-1}+x^2+x=7+\sqrt{x+2}$. Đáp số: $x=2$
c) Giải phương trình $\sqrt{x+3}+x+4=\sqrt[3]{4-2x}+\sqrt{x^2+4x+5}$. Đáp số: $x=-2$.
d) Giải phương trình $x+\sqrt[3]{3x+8}=\sqrt{x^2+1}+1$. Đáp số: $x=0$.
e) Giải phương trình $x\sqrt{2x^2+1}+x^3-3x^2-2=0$. Đáp số: $x=2$.

Kiểu 6. Biến đổi $\sqrt[3]{f(x)}-g(x)=\dfrac{f(x)-g^3(x)}{\sqrt[3]{f^2(x)}+\sqrt[3]{f(x)}.g(x)+g^2(x)}$, hoặc biến đổi $\sqrt[3]{f(x)}+g(x)=\dfrac{f(x)+g^3(x)}{\sqrt[3]{f^2(x)}-\sqrt[3]{f(x)}.g(x)+g^2(x)}$, với $f^2(x)+g^2(x) \neq 0, \forall x \in D$.

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sqrt[3]{x^3+x^2-4}+\sqrt{2x}=x+2$.

✍ **Lời giải.**
-Phân tích. Nhận thấy $x=2$ là nghiệm của phương trình, lúc đó: $\sqrt[3]{x^3+x^2-4}-x=0; \sqrt{2x}-2=0$. Từ đó ta thực hiện phép nhân liên hợp để xuất hiện nhân tử $(x-2)$. Điều kiện $x \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với:

$$\left(\sqrt[3]{x^3+x^2-4}-x\right)+\left(\sqrt{2x}-2\right)=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{\sqrt[3]{(x^3+x^2-4)^2}+x\sqrt[3]{x^3+x^2-4}+x^2}+\frac{2(x-2)}{\sqrt{2x}+2}=0 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)\left(\frac{x+2}{\sqrt[3]{(x^3+x^2-4)^2}+x\sqrt[3]{x^3+x^2-4}+x^2}+\frac{2}{\sqrt{2x}+2}\right)=0 \Leftrightarrow x=2$$

Do $\dfrac{x+2}{\sqrt[3]{(x^3+x^2-4)^2}+x\sqrt[3]{x^3+x^2-4}+x^2}+\dfrac{2}{\sqrt{2x}+2}>0, \forall x \geq 0$

-Kết luận. Phương trình có nghiệm $x=2$. ■

Ví dụ 2. Giải phương trình $\sqrt[3]{-x^2+x-1}+\sqrt{2x-1}+x^2+x=2$.

✍ **Lời giải.**
-Phân tích. Nhận thấy $x=1$ là nghiệm của phương trình đã cho. Khi $x=1$, ta có: $\sqrt[3]{-x^2+x-1}+x=0; \sqrt{2x-1}-1=0; x^2-1=0$, từ đó xuất hiện nhân tử $(x-1)$ ta có thể giải quyết như sau: Điều kiện $x \geq \dfrac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với:

$$\left(\sqrt[3]{-x^2+x-1}+x\right)+\left(\sqrt{2x-1}-1\right)+(x^2-1)=0 \Leftrightarrow \frac{x^3-x^2+x-1}{\sqrt[3]{(-x^2+x-1)^2}-x\sqrt[3]{-x^2+x-1}+x^2}+$$

$$\frac{2(x-1)}{\sqrt{2x-1}+1}+(x-1)(x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{x^2+1}{\sqrt[3]{(-x^2+x-1)^2}-x\sqrt[3]{-x^2+x-1}+x^2}+\frac{2}{\sqrt{2x-1}+1}+(x+1)\right)=0 \Leftrightarrow x=1$$

Do $\dfrac{x^2+1}{\sqrt[3]{(-x^2+x-1)^2}-x\sqrt[3]{-x^2+x-1}+x^2}+\dfrac{2}{\sqrt{2x-1}+1}+(x+1)>0, \forall x\geq \dfrac{1}{2}$

-Kết luận. Phương trình có nghiệm $x=1$.

Ví dụ 3. Giải phương trình $x^3+2x-(x^2+1)\sqrt{2x-1}=\sqrt[3]{2x^2-x}$.

✍ Lời giải.

Điều kiện $x\geq \dfrac{1}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với: $(x^2+1)\left(x-\sqrt{2x-1}\right)+\left(x-\sqrt[3]{2x^2-x}\right)=0 \Leftrightarrow (x^2+1)\dfrac{x^2-2x+1}{x+\sqrt{2x-1}}+$
$\dfrac{x^3-2x^2+x}{x^2+x.\sqrt[3]{2x^2-x}+\sqrt[3]{(2x^2-x)^2}}=0 \Leftrightarrow (x-1)^2\left(\dfrac{x^2+1}{x+\sqrt{2x-1}}+\dfrac{x}{x^2+x.\sqrt[3]{2x^2-x}+\sqrt[3]{(2x^2-x)^2}}\right)=$
$0 \Leftrightarrow x=1$ $Do\dfrac{x^2+1}{x+\sqrt{2x-1}}+\dfrac{x}{x^2+x\sqrt[3]{2x^2-x}+\sqrt[3]{(2x^2-x)^2}}>0, \forall x\geq \dfrac{1}{2}$

-Kết luận. Phương trình đã cho có nghiệm $x=1$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

a) Giải phương trình $\sqrt[3]{x^3+x^2-1}+\sqrt{x}+x^2=3$. Đáp số: $x=1$.
b) Giải phương trình $\sqrt[3]{x-10}+\sqrt{x-1}+x^2=x+1$. Đáp số: $x=2$.
c) Giải phương trình $\sqrt[3]{x-\dfrac{4}{3}}+4x=\sqrt[3]{x^3+3x^2+2}-\sqrt{3x}$. Đáp số: $x=\dfrac{1}{3}$.
d) Giải phương trình $\sqrt[3]{3x-5}+\sqrt{3-x}=2x+2$. Đáp số: $x=-1$.
e) Giải phương trình $x^2+2x=x\sqrt{4x+1}+\sqrt[3]{3x+2}$. Đáp số: $x=2$.

2 Tách thành tích các biểu thức liên hợp

Ở mục 1, chúng ta đã sử dụng kỹ thuật nhân thêm một lượng liên hợp để đưa phương trình vô tỷ về dạng tích. Tuy nhiên trong một số dạng toán kỹ thuật nhân thêm một lượng liên hợp không đảm bảo được mẫu số khác 0, hoặc việc giải quyết biểu thức thứ 2 trong phương trình tích là khó khăn. Chúng ta có thể lựa chọn phương án tách đa thức thành các biểu thức liên hợp để thay thế.

Kiểu 1. $f(x)-g(x)=\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}\right)\left(\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}\right)$, với $\begin{cases} f(x)\geq 0 \\ g(x)\geq 0\end{cases}$

Ví dụ 1. Giải phương trình $2+\sqrt{x-1}+\sqrt{3x-5}=x$.

✍ Lời giải.

-Phân tích. Nhận thấy $\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{3x-5}\right)\left(\sqrt{3x-5}-\sqrt{x-1}\right)=(3x-5)-(x-1)=2(x-2)$
Do vậy, nếu ta biến đổi $\sqrt{x-1}+\sqrt{3x-5}=\dfrac{2(x-2)}{\sqrt{3x-5}-\sqrt{x-1}}$, ta sẽ có nhân tử $(x-2)$. Tuy nhiên vấn đề nảy sinh ở đây là chưa đảm bảo được rằng biểu thức $\left(\sqrt{3x-5}-\sqrt{x-1}\right)$ khác 0 và để khắc phục nó chúng ta có thể xét 2 trường hợp $\sqrt{3x-5}-\sqrt{x-1}=0$ và $\sqrt{3x-5}-\sqrt{x-1}\neq 0$. Song để tránh sự rối rắm không cần thiết, ta chọn phương án biến đổi ngược lại, đó là: $2(x-2)=\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{3x-5}\right)\left(\sqrt{3x-5}-\sqrt{x-1}\right)$, từ đó ta có thể gải quyết bài toán như sau:

Điều kiện $x\geq \dfrac{5}{3}$.

Phương trình đã cho tương đương với:

$2(x-2)-2\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{3x-5}\right)=0$
$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}+\sqrt{3x-5}\right)\left(\sqrt{3x-5}-\sqrt{x-1}\right)-2\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{3x-5}\right)=0$
$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}+\sqrt{3x-5}\right)\left(\sqrt{3x-5}-\sqrt{x-1}-2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x-1}+\sqrt{3x-5}=0\,(VN)\\ \sqrt{3x-5}-\sqrt{x-1}-2=0\end{array}\right.$

Lại có: $\sqrt{3x-5}-\sqrt{x-1}-2=0 \Leftrightarrow x-4=2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 4\\ x^2-12x+20=0\end{cases} \Leftrightarrow x=10$

-Kết luận. Nghiệm của phương trình đã cho là $x=10$. ■

Bài tập tương tự

a) Giải phương trình $\sqrt{2x+1}+\sqrt{1-x}=3x$.
b) Giải phương trình $\sqrt{4x-3}+\sqrt{2x+7}=x-5$.
c) Giải phương trình $\sqrt{x+5}+\sqrt{2-2x}=x+1$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x-1}=x^2-1$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích. Nhận thấy
$\left(\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{x-1}\right)=(x^2+x-2)-(x-1)=x^2-1$ từ đó ta có lời giải sau: Điều kiện $x\geq 1$. Phương trình đã cho tương đương với:
$\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x-1}=\left(\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{x-1}\right)$
$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{x-1}-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x-1}=0(1)\\ \sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{x-1}-1=0(2)\end{array}\right.$

$(1)\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0\\ x^2+x-2=0\end{cases} \Leftrightarrow x=1$

$(2)\Leftrightarrow x^2-2=2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq \sqrt{2}\\ x^4-4x^2-4x+8=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq \sqrt{2}\\ (x-2)\left(x^3+2x^2-4\right)=0\end{cases} \Leftrightarrow x=2$

Do $x^3+2x^2-4\geq 2\sqrt{2}+4-4>0, \forall x\geq\sqrt{2}$

-Kết luận. Tập nghiệm của phương trình đã cho là: $T=\{1;2\}$ ■

Bài tập tương tự

a) Giải phương trình $\sqrt{x^2+3x-1}+\sqrt{x^2+2x-1}=x$.
b) Giả phương trình $x+3=\sqrt{3x^2+13x+12}+\sqrt{2x^2+7x+3}$.
c) Giải phương trình $3-x(x+1)=\sqrt{4-x^2}+\sqrt{x+1}$.

Ví dụ 3. Giải phương trình $\left(1+\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{2x^2-2x+1}+x-1\right)=x\sqrt{x}$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích. Ta nhận thấy $\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}-1\right)=x$, tuy nhiên kh sử dụng phép nhân thêm lượng liên hợp ta phải chia thành các trường hợp $\sqrt{1+x}-1=0vaø\sqrt{1+\mathrm{x}}-1\neq 0$. Để tránh những vấn đề vấn đề phức tạp đó nảy sinh, ta có thể xử lý như sau: Điều kiện $x \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với:

$\left(1+\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{2x^2-2x+1}+x-1\right)=\left(1+\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{1+x}-1\right)\sqrt{x}$.

$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-2x+1}+x-1=\left(\sqrt{1+x}-1\right)\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+x}\right)+\left(x-1+\sqrt{x}\right)=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-3x+1}{\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+x}}+\left(x-1+\sqrt{x}\right)=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{\left(x-1+\sqrt{x}\right)\left(x-1-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+x}}+\left(x-1+\sqrt{x}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-1+\sqrt{x}\right)\left(\dfrac{x-1-\sqrt{x}}{\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+x}}+1\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1+\sqrt{x}=0(1) \\ \sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+x}+x-1-\sqrt{x}=0(2) \end{array}\right.$$

Khi đó:

$(1) \Leftrightarrow x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

$(2) \Leftrightarrow \left(\sqrt{2x^2-2x+1}+x-1\right)+\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x}\right)=0(*)$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \sqrt{2x^2-2x+1}+x-1=\sqrt{x^2+(x-1)^2}+x-1 \geq \sqrt{(x-1)^2}+(x-1) \geq (1-x)+(x-1)=0 \\ \sqrt{x^2+x}-\sqrt{x} \geq \sqrt{x}-\sqrt{x}=0 \end{cases}$$

Do đó $(*) \Leftrightarrow x=0$. ■

Bài tập tương tự

a) Giải phương trình $\left(\sqrt{5x-1}+\sqrt{x-1}\right)\left(3x-1-\sqrt{5x^2-6x+1}\right)=4x$.

b) Giải phương trình $2x+\dfrac{6}{x}-1=\sqrt{4x^2+9}+\sqrt{2x-3}$.

c) Giải phương trình $\sqrt{x+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{x-\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{2}{x}$.

> **Ví dụ 4.** Giải phương trình $(x+1)\sqrt{x+2}+(x+6)\sqrt{x+7}=x^2+7x+12$.

✍ Lời giải.

-Phân tích.

-Trước hết ta nhận định phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$. Nếu ta sử dụng phương pháp nhân liên hợp một cách thông thường, dấu trước các biểu thức là ngược nhau nên có thể dẫn đến việc phải kết hợp với phương pháp đánh giá. Ta sẽ tìm cách khắc phục vấn đề này bằng cách tìm nhóm các biểu thức với sao cho phương trình được đưa về dạng $(x-2).f(x)=0$, trong đó: $f(x)>0, \forall x \geq -2$.

-Để ý rằng, với điều kiện: $x \geq -2$ thì ta chưa khẳng định được dấu của nhị thức $(x+1)$ vì vậy khi thực hiện phép nhân liên hợp đối với $(x+1)\sqrt{x+2}$, ta cần tạo ra nhân tử: $(x+1)^2(x-2)$ hay ta cần tìm m, n sao cho: $mx+n-\sqrt{x-2}=0$ khi $x=-1$; x = 2, tức ta có hệ: $\begin{cases} -m+n=1 \\ 2m+n=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=\dfrac{1}{3} \\ n=\dfrac{4}{3} \end{cases}$

Từ đó nhân cả hai vế của phương trình với 3 cho ta:

$3x^2+21x+36-3(x+1)\sqrt{x+2}-3(x+6)\sqrt{x+7}=0$

Tiến hành việc nhóm nhân tử cho biểu thức $3(x+1)\sqrt{x+2}$, ta sẽ được:

$(x+1)\left(x+4-3\sqrt{x+2}\right)+2x^2+16x+32-3(x+6)\sqrt{x+7}=0$

Đối với $(x+6)\sqrt{x+7}$ thì do $x+6 \geq 0, \forall x \geq -2$ nên ta sẽ nhóm như sau

$(x+1)\left(x+4-3\sqrt{x+2}\right)+(x+6)\sqrt{x+7}\left(\sqrt{x+7}-3\right)+x^2+3x-10=0$ Điều kiện $x\geq -2$. Phương trình đã cho tương đương với:
$(x+1)\left(x+4-3\sqrt{x+2}\right)+(x+6)\sqrt{x+7}\left(\sqrt{x+7}-3\right)+x^2+3x-10=0$.
$\Leftrightarrow \dfrac{(x+1)^2(x-2)}{x+4+3\sqrt{x+2}}+(x+6)\sqrt{x+7}.\dfrac{(x-2)}{\sqrt{x+7}+3}+(x-2)(x+5)=0$.
$\Leftrightarrow (x-2)\left[\dfrac{(x+1)^2}{x+4+3\sqrt{x+2}}+\dfrac{(x+6)\sqrt{x+7}}{\sqrt{x+7}+3}+(x+5)\right]=0\Leftrightarrow x=2$.
Do $\dfrac{(x+1)^2}{x+4+3\sqrt{x+2}}+\dfrac{(x+6)\sqrt{x+7}}{\sqrt{x+7}+3}+(x+5)>0,\forall x\geq -2$.
Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$. ■

Bài tập tương tự

a) Giải phương trình $3x^2+14x+13=(x+1)\sqrt{4x+5}+2(x+5)\sqrt{x+3}$.
b) Giải phương trình $5x^2+(3x+1)\sqrt{2-x}=17x+28+3(x-13)\sqrt{2x-1}$.
c) Giải phương trình $2(8x^2+7x+1)=(x+1)\sqrt{2x+3}+2(3x+1)\sqrt{4x+2}$.

Ví dụ 5. Giải phương trình $(x+2)\sqrt{x+1}-(4x+5)\sqrt{2x+3}=-6x-23$.

✍ **Lời giải.**
Điều kiện $x\geq -1$, đặt $\sqrt{x+1}=t\,(t\geq 0)$. Phương trình đã cho trở thành:
$t^3+6t^2+t+17=(4t^2+1)\sqrt{2t^2+1}$
$\Leftrightarrow (4t^2+1)\left(\sqrt{2t^2+1}-t-1\right)+(t-2)(3t^2+4t+8)=0$.
$\Leftrightarrow (4t^2+1)\dfrac{t^2-2t}{\sqrt{2t^2+1}+t+1}+(t-2)(3t^2+4t+8)=0$
$\Leftrightarrow (t-2)\left(\dfrac{4t^3+t}{\sqrt{2t^2+1}+t+1}+3t^2+4t+8\right)=0\Leftrightarrow t=2$.
Do $\dfrac{4t^3+t}{\sqrt{2t^2+1}+t+1}+3t^2+4t+8>0,\forall t\geq 0$.
Với $t=2$, thay trở lại ta tìm được $x=3$.
Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=3$. ■

Chú ý

! Thông thường khi sử dụng phép biến đổi truy ngược sẽ làm xuất hiện những biểu thức không chứa căn có số mũ cao. Trong trường hợp số mũ cao nhất của biểu thức không chứa căn bé hơn số mũ cao nhất của những biểu thức chứa căn thức, ta sử dụng phép đặt ẩn phụ để thay đổi vai trò của chúng.

Bài tập tương tự

a) Giải phương trình $x-3+(x+1)\sqrt{x-1}-(x-1)\sqrt{x+2}=0$.
b) Giải phương trình $(8x+13)\sqrt{4x+7}=12x+35+2(x+2)\sqrt{2x+3}$.
c) Giải phương trình $4x+12=(3x+8)\sqrt{x+6}-(4x+13)\sqrt{x+2}$.

Ví dụ 6. Giải phương trình $x^3+2x^2-6x+1=2\sqrt{x^2-x+1}-(x+1)\sqrt{3x+1}$.

✍ **Lời giải.**
Điều kiện $x\geq -\dfrac{1}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với:
$2\sqrt{x^2-x+1}\left(\sqrt{x^2-x+1}-1\right)+\sqrt{3x+1}\left(x+1-\sqrt{3x+1}\right)+x^3-x=0$.
$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-x+1}\dfrac{x^2-x}{\sqrt{x^2-x+1}+1}+\sqrt{3x+1}\dfrac{x^2-x}{x+1+\sqrt{3x+1}}+(x+1)(x^2-x)=0$.

$$\Leftrightarrow (x^2-x)\left(\frac{2\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x^2-x+1}+1}+\frac{\sqrt{3x+1}}{x+1+\sqrt{3x+1}}+x+1\right)=0 \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1. \end{array}\right.$$

Do $\dfrac{2\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x^2-x+1}+1}+\dfrac{\sqrt{3x+1}}{x+1+\sqrt{3x+1}}+x+1>0, \forall x \geq -\dfrac{1}{3}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $T=\{0;1\}$.

Bài tập tương tự

a) Giải phương trình $3x^2-10=2\sqrt{x^2+x-1}-(x+2)\sqrt{3x+6}$.

b) Giải phương trình $\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}-x^3}+\sqrt{x-\dfrac{2}{9}}=1$.

c) Giải phương trình $(x+3)\left(\sqrt{2x^2+6x+2}-2x\right)=\sqrt[3]{x^2+1}+(x^2-7)\sqrt{x+3}$.

Bình luận.

+Khi giải một phương trình vô tỷ bằng phương pháp nhân liên hợp ta thường gặp rất nhiều khó khăn ở công đoạn xử lý phương trình $A(x)=0$ bởi nó phụ thuộc nhiều vào sự tinh tế của người giải toán trong quá trình so sánh các đại lượng có trong biểu thức $A(x)$. Để giải quyết vấn đề này, ta thay thế những cách nhóm nhân tử thông thường bằng những cách nhóm truy ngược dấu của biểu thức liên hợp.
+Khi biến đổi truy ngược chúng ta luôn phải chú ý đến điều kiện có nghĩa của phương trình vô tỷ ban đầu để đảm bảo dấu của các đại lượng trong biểu thức $A(x)$ là cùng dương hoặc cùng âm.
+Ta cần chú ý đến hệ số bậc cao nhất của các biểu thức chứa căn và biểu thức không chứa căn, nếu dấu của chúng ngược nhau ta sẽ sử dụng phép truy ngược biểu thức liên hợp để biến đổi .
+Trong phương pháp sử dụng liên hợp để giải phương trình vô tỷ, việc đoán biết được nghiệm và số nghiệm của phương trình rất quan trọng. Tuy nhiên nếu sử dụng sự hỗ trợ của máy tình bỏ túi CaSiO-FX 570ES vấn đề này hoàn toàn được giải quyết.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

a) Giải phương trình $4\sqrt{x+2}+\sqrt{22-3x}=x^2+8$ (TH&TT – T11/396).

b) Giải phương trình $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}+\sqrt{2x-5}=2x^2-5x$ (TH&TT – T4/388).

c) Giải phương trình $x^2+14x+1=\sqrt[3]{2x+1}+2\sqrt{9x+4}-2\sqrt{4-x}$.

d) Giải phương trình $15x+6=\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt{x^2+1}+2\sqrt{11x+4}$.

e) Giải phương trình $6(x-1)\sqrt{x+1}+(x^2+2)\left(\sqrt{x-1}-3\right)=x(x^2+2)$ (TH&TT – T4/419).

f) Giải phương trình $(x+6)\sqrt{x+2}+1=\sqrt[3]{3x+7}$.

g) Giải phương trình $(x+3)\left(2+\sqrt{x+2}\right)=\sqrt{2x+5}+\sqrt[3]{3x+7}$.

h) Giải phương trình $\sqrt{x^2+9x-1}+x\sqrt{11-3x}=2x+3$ (Cuộc thi 45 năm TH&TT).

i) Giải phương trình $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{(x-1)(x^2-3x+5)}=2x$.

3 Kỹ thuật nhóm phân tử (ax^2+bx+c).

Ở các mục trên chúng ta đã cơ bản nghiên cứu phương pháp sử dụng lượng liên hợp, các bài toán chủ yếu tập trung vào những phương trình có nhân tử là $(ax+b)$. Ở mục này chúng ta vận dụng các phương pháp trên vào các phương trình có nhều nghiệm hữu tỷ hay những phương trình có nghiệm vô tỷ dạng $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ với kỹ thuật nhóm nhân tử (ax^2+bx+c).

3.1 Phương trình có nhiều nghiệm hữu tỷ

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sqrt{2x^2-x+3}+x^2-x=\sqrt{21x-17}$.

Lời giải.

-Phân tích.

Ta nhận đoán được rằng phương trình có hai nghiệm $x=1; x=2$ (có thể sử dụng sự hỗ trợ của máy tính bỏ túi – Xem Phụ lục). Do vậy phương trình này sẽ có nhân tử $(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$ khi ta có ý định sử dụng lượng liên hợp để giải bài toán. Điều quan tâm là cách tách-nhóm các đại lượng có trong phương trình.

Giả sử ta sẽ nhóm $\left(\sqrt{2x^2-x+3}-(a_1x+b_1)\right)+\left((a_2x+b_2)-\sqrt{21x-17}\right)$. Thay các giá trị $x=1; x=2$ vào các đẳng thức $\begin{cases}\sqrt{2x^2-x+3}-(a_1x+b_1)=0\\(a_2x+b_2)-\sqrt{21x-17}=0\end{cases}$, ta sẽ tìm được $\begin{cases}2-a_1-b_1=0\\3-2a_1-b_1=0\end{cases}$ $\Rightarrow\begin{cases}a_1=1\\b_1=1\end{cases}$; $\begin{cases}a_2+b_2-2=0\\2a_2+b_2-5=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_2=3\\b_2=-1\end{cases}$. Hay ta sẽ biến đổi phương trình như sau: Điều kiện $x\geq\dfrac{17}{21}$. Phương trình đã cho tương đương với:

$\left(\sqrt{2x^2-x+3}-x-1\right)+\left(3x-1-\sqrt{21x-17}\right)+x^2-3x+2=0$.

$\Leftrightarrow\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{2x^2-x+3}+x+1}+\dfrac{9\left(x^2-3x+2\right)}{3x-1+\sqrt{21x-17}}+x^2-3x+2=0$.

$\left(x^2-3x+2\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{2x^2-x+3}+x+1}+\dfrac{9}{3x-1+\sqrt{21x-17}}+1\right)=0$

$\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$

Do $\dfrac{1}{\sqrt{2x^2-x+3}+x+1}+\dfrac{9}{3x-1+\sqrt{21x-17}}+1>0,\forall x\geq\dfrac{17}{21}$.

-Kết luận. Tập nghiệm của phương trình đã cho là $T=\{1;2\}$. ■

Bài tập tương tự

a) Giải phương trình $x^2-2x+\sqrt{2x^2+1}=\sqrt{4x+1}$.

b) Giải phương trình $3x^2-x+3=\sqrt{3x+1}+\sqrt{5x+4}$.

c) Giải phương trình $x^2-x-3+\sqrt{2x^2+5x+7}=\sqrt{5x+6}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $4\sqrt{x+1}-1=3x+2\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x^2}$.

Lời giải.

-Phân tích.

Bài toán lại xuất hiện nhiều dấu căn thức và với một suy nghĩ đơn giản là chúng ta sẽ làm triệt tiêu một số căn thức nhưng đồng thời đảm bảo bậc của đa thức ngoài dấu căn không quá cao, và tội lựa chọn phương pháp biến đổi hệ quả để đưa về phương trình (*) như sau:

$\Leftrightarrow 4\sqrt{x+1}-2\sqrt{1-x}=3x+1+\sqrt{1-x^2}$

$\Rightarrow 16(x+1)-16\sqrt{1-x^2}+4(1-x)=(3x+1)^2+2(3x+1)\sqrt{1-x^2}+\left(1-x^2\right)$

$\Leftrightarrow 4x^2-3x-9+(3x+9)\sqrt{1-x^2}=0(*)$

Lúc này dễ dàng tìm ra nhân tử của phương trình (*) là $x(5x+3)=5x^2+3x$. Điều kiện $-1\leq x\leq 1$.

Phương trình đã cho tương đương với:

$4\sqrt{x+1}-2\sqrt{1-x}=3x+1+\sqrt{1-x^2}$.

$\Rightarrow 16(x+1)-16\sqrt{1-x^2}+4(1-x)=(3x+1)^2+2(3x+1)\sqrt{1-x^2}+(1-x^2)$
$\Leftrightarrow 4x^2-3x-9+(3x+9)\sqrt{1-x^2}=0(*)$
$\Leftrightarrow (5x^2+3x)+(3x+9)\sqrt{1-x^2}-(x^2+6x+9)=0$
$\Leftrightarrow (5x^2+3x)-\dfrac{2(x+3)(5x^2+3x)}{3\sqrt{1-x^2}+x+3}=0 \Leftrightarrow (5x^2+3x)\left(1-\dfrac{2x+6}{3\sqrt{1-x^2}+x+3}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x^2+3x=0 \\ 3\sqrt{1-x^2}=x+3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\dfrac{3}{5} \end{array}\right.$$

Thử lại ta thấy $x=0; \mathrm{x}=-\dfrac{3}{5}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

-Kết luận. Tập nghiệm của phương trình đã cho là $T=\left\{0;-\dfrac{3}{5}\right\}$. ■

Bài tập tương tự

a) Giải phương trình $2(3x+1)\sqrt{2x^2-1}=10x^2+3x-6$.
b) Giải phương trình $x+2\sqrt{7-x}=2\sqrt{x-1}+\sqrt{-x^2+8x-7}+1$.
c) Giải phương trình $\sqrt{x^2+9x-1}+x\sqrt{11-3x}=2x+3$.

Bình luận. Chúng ta sẽ gặp lại những dạng toán này ở các phương pháp giải toán khác, tuy nhiên ở mục này chúng ta đã trải nghiệm phương pháp sử dụng lượng liên hợp cho những dạng toán mà chúng ta ít ngờ tới có thể sử dụng được phương pháp này và cũng là giúp chúng ta nhận ra những ưu điểm và nhược điểm của từng phương pháp giải toán.

3.2 Phương trình có nghiệm vô tỷ dạng $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$.

Trong việc giải toán nói chung, và giải phương trình vô tỷ nói riêng. Câu hỏi ban đầu của chúng ta là "Liệu có thể đưa chúng về những dạng quen thuộc hay không?" – Đó là điều khá quan trọng trong việc tìm lời giải toán. Trong mục này chúng ta sẽ cùng trải nghiệm phương pháp sử dụng lượng liên hợp với những bài toán quen thuộc đã có ở phương pháp nâng lên lũy thừa, từ đó hãy tự đánh giá sự khác biệt cũng như những khó khăn và những lợi thế của các phương pháp giải toán khác nhau trên cùng một dạng toán.

Ví dụ 1. Giải phương trình $x^2-6x-2=\sqrt{x+8}$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích và bình luận.

Đây là phương trình vô tỷ dạng $ax^2+bx+c=\sqrt{cx+d}\,(a\neq 0)$ đã gặp ở phương pháp nâng lên lũy thừa. Bây giờ chúng ta cùng xem với phương pháp sử dụng lượng liên hợp cho dạng toán này.

-Cái khó của loại toán này ở chỗ nghiệm của phương trình không hữu tỷ. Vì vậy mục đích cuối cùng của các phương pháp giải toán là cố gắng đưa phương trình về đạng tích
$\left(m_1x+n_1+\sqrt{cx+d}\right)\left(m_2x+n_2+\sqrt{cx+d}\right)=0$ và phương pháp nhóm phân tử sẽ nêu sau đây cũng không ngoại lệ

-Ta tìm được nhân tử của phương trình trên là $(x^2-7x+1)=0$, từ đó ta sẽ nhóm các số hạng cùng phép biến đổi liên hợp để đưa phương trình về dạng: $(x^2-7x+1).A=0$. Và lời giải sau đây là một phương án lựa chọn để nhóm các biểu thức trong phương trình. Điều kiện $x\geq -8$.

Phương trình đã cho tương đương với: $(x^2-7x+1)+\left(x-3-\sqrt{x+8}\right)=0$
$\Leftrightarrow \left(x-3-\sqrt{x+8}\right)\left(x-3+\sqrt{x+8}\right)+\left(x-3-\sqrt{x+8}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left(x-3-\sqrt{x+8}\right)\left(x-2+\sqrt{x+8}\right)=0(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3-\sqrt{x+8}=0 \\ x-2+\sqrt{x+8}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{5-\sqrt{41}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $T = \left\{\frac{5-\sqrt{41}}{2}; \frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right\}$. ■

Ví dụ 2. Giải phương trình $2(x^2+2) = 5\sqrt{x^3+1}$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích và bình luận.

Sự hỗ trợ của máy tính bỏ túi, cho ta nhân tử (x^2-5x-3), do đó với một suy nghĩ đơn giản ta nhóm các biểu thức như sau:

$\left(5\sqrt{x^3+1}-10x-10\right) - 2(x^2-5x-3) = 0$, từ đó ta giải quyết được bài toán một cách khá đơn giản.

Điều kiện $x \geq -1$.

Ta có: $2(x^2+2) = 5\sqrt{x^3+1} \Leftrightarrow \left(5\sqrt{x^3+1}-10x-10\right) - 2(x^2-5x-3) = 0$

$\Leftrightarrow 5\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x^2-x+1}-2\sqrt{x+1}\right) - 2(x^2-5x-3) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2-5x-3)\left(\dfrac{5\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-x+1}+2\sqrt{x+1}} - 2\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x-3 = 0 (1) \\ 5\sqrt{x+1} = 2\left(\sqrt{x^2-x+1}+2\sqrt{x+1}\right) (*) \end{array}\right.$

Lại có: $(*) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 2\sqrt{x^2-x+1} \Leftrightarrow 4x^2-5x+3 = 0\,(\mathrm{VN})$

Giải phương trình (1) và đối chiếu điều kiện cho ta nghiệm của phương trình đã cho là $x = \dfrac{5\pm\sqrt{37}}{2}$.

■

Ví dụ 3. Giải phương trình $7x^2+6x+1+(2x+1)^2\sqrt{x+1} = 0$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích và bình luận.

Để giải bài toán này bằng phương pháp sử dụng lượng liên hợp , chúng ta cần biết nhân tử của phương trình.

Như đã nêu ở trên, chúng ta dễ dàng tìm ra nhân tử (x^2-x-1).

Khi đó ta sẽ biến đổi phương trình về dạng:$(2x+1)^2\left(x+\sqrt{x+1}\right) - (4x+1)(x^2-x-1) = 0$ Điều kiện $x \geq -1$. Phương trình đã cho tương đương với:

$7x^2+6x+1+(2x+1)^2\sqrt{x+1} = 0$

$\Leftrightarrow (2x+1)^2\left(x+\sqrt{x+1}\right) - (4x+1)(x^2-x-1) = 0$

$\Leftrightarrow (2x+1)^2\left(x+\sqrt{x+1}\right) - (4x+1)\left(x+\sqrt{x+1}\right)\left(x-\sqrt{x+1}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(x+\sqrt{x+1}\right)\left[(3x+1)+(4x+1)\sqrt{x+1}\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\sqrt{x+1} = 0 \\ (3x+1)+(4x+1)\sqrt{x+1} = 0 \end{array}\right.$

+Trường hợp 1. $x+\sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

+Trường hợp 2.$(3x+1)+(4x+1)\sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{33}-15}{32}$.

-Kết luận. Tập nghiệm của phương trình đã cho là $T = \left\{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}; \dfrac{\sqrt{33}-15}{32}\right\}$. ■

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

a) Giải phương trình $9x^2-28x+21 = \sqrt{x-1}$. Đáp số: $x = 2; x = \dfrac{25-\sqrt{13}}{18}$.

b) Giải phương trình $2\sqrt{2x+4}+4\sqrt{2-x}=\sqrt{9x^2+16}$. Đáp số: $x=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

c) Giải phương trình $x^2=\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}+12$. Đáp số: $x=\pm 4$.

d) Giải phương trình $8x^2-8x+3=8x\sqrt{2x^2-3x+1}$. Đáp số: $x=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{4}; x=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{4}$.

e) Giải phương trình $2\sqrt{1-x}-\sqrt{x+1}+3\sqrt{1-x^2}=3-x$. Đáp số: $x=\dfrac{3}{5}; \mathrm{x}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

f) Giải phương trình $(2x-6)\sqrt{x+4}-(x-5)\sqrt{2x+3}=3(x-1)$.
Đáp số: $x=1; \mathrm{x}=3; \mathrm{x}=5$

g) Giải phương trình $x+1=(2x+1)\sqrt{\sqrt{x+1}+2}$. Đáp số: $x=\dfrac{\sqrt{33}-15}{32}$.

h) Giải phương trình $2(1-x)\sqrt{x^2+2x-1}=x^2-2x-1$. Đáp số: $x=-1\pm\sqrt{6}$.

4 Xử lý phương trình sau khi nhân thêm lượng liên hợp

Ở mục 3. chúng ta đã sử dụng phương pháp truy ngược dấu biểu thức liên hợp để xử lý phương trình sau khi nhân thêm lượng liên hợp. tuy nhiên trong một số dạng toán phương pháp này chưa thể giải quyết được triệt để. Ở mục này chúng ta cùng tìm hiểu thêm một số hướng xử lý khác.

Ví dụ 1. Giải phương trình $x^3-3x+1=\sqrt{8-3x^2}$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích trong quy trình giải toán.
Bước 1. Điều kiện $-\sqrt{\dfrac{8}{3}}\le x\le\sqrt{\dfrac{8}{3}}$.
Bước 2. Ta tìm được nhân tử (x^2-x-1).
Phương trình đã cho tương đương với:

$$(x+1)(x^2-x-1)+\left(2-x-\sqrt{8-3x^2}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2-x-\sqrt{8-3x^2}=0\\(x+1)\left(2-x+\sqrt{8-3x^2}\right)+4=0\end{array}\right.$$

Bước 3. Trường hợp. $2-x-\sqrt{8-3x^2}=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.
Bước 4. Trường hợp. $(x+1)\left(2-x+\sqrt{8-3x^2}\right)+4=0(*)$.
Hướng xử lý 1. (Sử dụng phương trình hệ quả)
Thay $\sqrt{8-3x^2}=x^2-3x+1$ từ phương trình ban đầu vào phương trình (*) và đưa phương trình (*) về phương trình hệ quả:
$(x+1)(x^3-4x+3)+4=0\Leftrightarrow x^4+x^3-4x^2-x+7=0$(a)
Xử lý phương trình hệ quả.
PT $(a)\Leftrightarrow(x^2-2)^2+x^3-x+3=0$ mà $x^3-x+3>0, \forall x\in\left[-\sqrt{\dfrac{8}{3}};\sqrt{\dfrac{8}{3}}\right]$ nên phương trình hệ quả (a) vô nghiệm hay phương trình (*) vô nghiệm.
Hướng xử lý 2. (Sử dụng đánh giá trực tiếp trên phương trình)
+Nhận thấy $x=-1$ không là nghiệm của phương trình (*).
+Khi $x\ne-1$, phương trình (*) tương đương với:

$$x-\frac{4}{x+1}-2=\sqrt{8-3x^2}\Leftrightarrow\frac{(x-3)(x+2)}{x+1}=\sqrt{8-3x^2}(b)$$

Nếu $-1 \le x \le \sqrt{\frac{8}{3}}$, thì $\begin{cases} VT(b) < 0 \\ VP(b) > 0 \end{cases} \Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm.

Nếu $-\sqrt{\frac{8}{3}} \le x \le -1$. Xét hàm số:

-$f(x) = x - \dfrac{4}{x+1} - 2$, $x \in \left[-\sqrt{\frac{8}{3}}; \sqrt{\frac{8}{3}}\right] \setminus \{-1\}$ ta có

$f'(x) = 1 + \dfrac{4}{(x+1)^2} > 0, \forall x \ne 1 \Rightarrow f(x) \ge f\left(-\sqrt{\frac{8}{3}}\right) = \dfrac{6+14\sqrt{6}}{15}$

Lại có $0 \le \sqrt{8-3x^2} \le \sqrt{5}, \forall x \in \left[-\sqrt{\frac{8}{3}}; -1\right)$. Do đó $x - \dfrac{4}{x+1} - 2 \ge \dfrac{6+14\sqrt{6}}{15} > \sqrt{5} \ge \sqrt{8-3x^2}$.

Hay phương trình (b) vô nghiệm.

-Kết luận. Phương trình đã cho có nghiệm $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x - \dfrac{1}{x}} = 2$

✍ Lời giải.

-Phân tích trong quy trình giải toán.

Bước 1. Điều kiện $\left[\begin{array}{l} x \ge 1 \\ -1 \le x < 0 \end{array}\right.$.

Bước 2. Ta tìm được nhân tử $(x^2 - x - 1)$. Phương trình đã cho tương đương với:

$$\left(\sqrt{x^2-x} - 1\right) + \left(\sqrt{x - \frac{1}{x}} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-x-1}{\sqrt{x^2-x}+1} + \frac{x^2-x-1}{x\left(\sqrt{x-\frac{1}{x}}+1\right)} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-x-1)\left[\frac{1}{\sqrt{x^2-x}+1} + \frac{1}{x\left(\sqrt{x-\frac{1}{x}}+1\right)}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x-1=0 \\ x\left(\sqrt{x-\frac{1}{x}}+1\right) + \sqrt{x^2-x}+1 = 0(1) \end{array}\right.$$

Bước 3. Trường hợp. $x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Bước 4. Trường hợp. $x\left(\sqrt{x - \dfrac{1}{x}} + 1\right) + \sqrt{x^2-x} + 1 = 0(*)$.

Hướng xử lý 1. (Sử dụng phương trình hệ quả)

Thay $\sqrt{x - \dfrac{1}{x}} + 1 = \sqrt{x^2-x} - 1$ từ phương trình ban đầu vào phương trình (*) cho ta phương trình hệ quả.

$$x\left(\sqrt{x^2-x} - 1\right) + \left(\sqrt{x^2-x}+1\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x\left(x^2-x-1\right)}{\sqrt{x^2-x}+1} + \left(\sqrt{x^2-x}+1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(x^2-x-1\right) + \left(\sqrt{x^2-x}+1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x + 1 + 2\sqrt{x^2-x} = 0$$

Với điều kiện $\left[\begin{array}{l} x \geq 1 \\ -1 \leq x < 0 \end{array}\right.$ thì $x^3 - 2x + 1 > 0$ hay phương trình hệ quả $x^3 - 2x + 1 + 2\sqrt{x^2 - x} = 0$ vô nghiệm, suy ra phương trình (*) vô nghiệm.
Hướng xử lý 2. (Sử dụng đánh giá trực tiếp trên phương trình)
+Nếu $x \geq 1$, phương trình (*) tương đương với $\sqrt{x(x-1)} + x + 1 + \sqrt{x(x-1)} = 0(a)$.
Với $x \geq 1 \Rightarrow VT(a) > 0$, tức (a) vô nghiệm.
+Nếu $-1 \leq x < 0$, phương trình (*) tương đương với
$(x+1) + \left(\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^3 - x}\right) = 0 \Leftrightarrow (x+1) + \dfrac{x^2(1-x)}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^3 - x}} = 0(b)$
Với $-1 \leq x < 0 \Rightarrow VT(b) > 0$, tức phương trình (b) vô nghiệm.
Từ đó suy ra phương trình (*) vô nghiệm.
-Kết luận. Phương trình đã cho có nghiệm $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. ■

Bình luận. Rõ ràng trong quá trình xử lý một phương trình vô tỷ nào đó, có thể việc độc lập sử dụng một phương pháp sẽ rất khó khăn để dẫn đến thành công. Do vậy sự kết hợp khéo léo giữa các phương pháp giải toán là cần thiết trong quá trình tìm lời giải bài toán nào đó. Mời các bạn cùng theo dõi ở các chương sau để làm rõ hơn những vấn đề này.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

a) Giải phương trình $3x + 6 = \sqrt{3x^2 + 8x - 3} + \sqrt{2x^2 + 6x + 29}$. Đáp số: $T = \left\{2; \dfrac{1 + \sqrt{57}}{2}\right\}$.

b) Giải phương trình $2x - 5 + \sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x^2 - 6x + 9} = 0$. Đáp số: $x = 2$.

c) Giải phương trình $3 - x = \dfrac{2x^2 - 9x + 17}{\sqrt{2x^2 - 6x + 16} + \sqrt{3x - 1}}$. Đáp số: $x = \dfrac{9 - \sqrt{41}}{2}$.

d) Giải phương trình $2\sqrt{x - \dfrac{1}{x}} - x\sqrt{1 - \dfrac{1}{x}} = 3$. Đáp số: $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

e) Giải phương tình $x^2 - 3x + 3 = \left(4 + 3x - \dfrac{4}{x}\right)\sqrt{x - 1}$. Đáp số: $x = 8 \pm 4\sqrt{3}$.

f) Giải phương trình $\sqrt{x - \dfrac{1}{x}} - \sqrt{1 - \dfrac{1}{x}} = \dfrac{x-1}{x}$. (Chọn HSG Tỉnh Phú Yên 2012) Đáp số: $x = 1; \text{x} = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

g) Giải phương trình $\sqrt{x^2 - \dfrac{7}{x^2}} - \sqrt{x - \dfrac{7}{x^2}} = x$.

Ví dụ 3. Giải phương trình $2\sqrt{\dfrac{2x+1}{x+1}} = \dfrac{x+2}{x+1}$.

✍ Lời giải.
-Phân tích.
-Như đã nêu ở ví dụ 1, trước khi muốn sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ, chúng ta cần tự đặt ra câu hỏi: Các biểu thức trong phương trình có mối liên quan đặc biệt nào với nhau?
-Ở ví dụ này, ta nhận thấy: $\left(\sqrt{x+1}\right)^2 = x + 1$, câu hỏi đặt ra là: $(2x+1)$ và $(x+2)$ có mối liên hệ như thế nào?
-Chú ý rằng ta luôn tìm được sự liên hệ:
$\dfrac{ax+b}{mx+n} = \dfrac{\alpha(mx+n) + \beta(cx+d)}{mx+n} = \alpha + \beta\dfrac{cx+d}{mx+n}$,
Vì vậy ta sẽ tiến hành xác định α, β trong phân tích:

$\dfrac{x+2}{x+1} = \dfrac{\alpha(x+1)+\beta(2x+1)}{x+1} \Rightarrow \begin{cases} \alpha+2\beta=1 \\ \alpha+\beta=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=3 \\ \beta=-1. \end{cases}$ Từ đó ta có lời giải Điều kiện $\left[\begin{array}{l} x<-1 \\ x\geq -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$. Viết phương trình đã cho dưới dạng: $2\sqrt{\dfrac{2x+1}{x+1}} = 3-\dfrac{2x+1}{x+1}$.

Đặt $\sqrt{\dfrac{2x+1}{x+1}} = t\,(t\geq 0)$, phương trình đã cho trở thành:

$t^2+2t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-3\,(\text{loại}) \end{array}\right.$

Với $t=1$, thay trở lại cho ta nghiệm của phương trình đã cho là$x=0$.

Bài tập tương tự

a) Giải phương trình $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{3x}{\sqrt{1-x^2}} - 1$.

b) Giải phương trình $\dfrac{9}{x^2} + \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+9}} - 1 = 0$.

c) Giải phương trình $\dfrac{1}{x^2(4-x^2)} + \dfrac{5}{2x\sqrt{4-x^2}} + 1 = 0$.

Ví dụ 4. Giải phương trình $x^2+2x\sqrt{x-\dfrac{1}{x}} = 3x+1$.

✍ Lời giải.

-Phân tích. Thoạt nhìn, ta thấy rằng các biểu thức trong phương trình gần như là rời rạc và không tìm thấy sự gắn kết. Một cách suy nghĩ cổ điển là đưa x vào căn thức .

-Giả sử phép toán này thực hiện được: $x\sqrt{x-\dfrac{1}{x}} = \sqrt{x^2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)} = \sqrt{x^3-x}$, ta thấy rằng phương trình đã cho có thể chuyển về dạng: $(x^2-1)+2\sqrt{x(x^2-1)}-3x=0$ hay nói cách khác nó có mối liên hệ kiểu: $a^2+2ab-3b^2=0 \Rightarrow \left(\dfrac{a}{b}\right)^2+2\dfrac{a}{b}-3=0(*)$.

-Tuy nhiên với điều kiện bài toán, việc đưa x vào căn thức, sẽ phải chia ra các trường hợp riêng lẻ, đồng thời nếu thực hiện phép chia cho $b=x$, sẽ cho kết quả tương tự phương trình (*). Từ những nhận định trên, ta có: Điều kiện $\begin{cases} x\neq 0 \\ x-\dfrac{1}{x}>0 \end{cases}$ Chia cả hai vế cho $x\neq 0$, ta có phương trình:

$x+2\sqrt{x-\dfrac{1}{x}} = 3+\dfrac{1}{x} \Leftrightarrow \left(x-\dfrac{1}{x}\right)+2\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}-3=0$

Đặt $t=\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}\,(t\geq 0)$, phương trình đã cho trở thành:

$t^2+2t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-3\,(\text{không thỏa mãn}) \end{array}\right.$

-Với $t=1$: $\sqrt{x-\dfrac{1}{x}} = 1 \Leftrightarrow x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ (thỏa mãn điều kiện)

-Kết luận. Tập nghiệm của phương trình đã cho là $T = \left\{ \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}$.

C PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG ẨN PHỤ

1 Đưa phương trình vô tỷ về dạng phương trình một ẩn

1.1 Đưa phương trình vô tỷ về dạng phương trình $at^2 + bt + c = 0\,(a \neq 0)$

Phương pháp đặt ẩn phụ để đưa phương trình vô tỷ về phương trình bậc hai một ẩn số là một kỹ thuật căn bản trong phương pháp sử dụng ẩn phụ để giải phương trình vô tỷ. Ở mục này chúng ta cùng điểm lại một số dạng toán phương trình vô tỷ giải được bằng phương pháp vừa nêu.

Ví dụ 1. Giải phương trình $2x^2 + \sqrt{x^2 - x - 2} = 2x + 7$.

Lời giải.

-Phân tích.

-Với một suy nghĩ thông thường, trước phương trình vô tỷ chứa một căn thức chúng ta có thể nâng lên lũy thừa đưa về phương trình đa thức bậc cao. Tuy nhiên lại nảy sinh 2 vấn đề:

+Công việc nâng lên lũy thừa gây ra các phép tính toán phức tạp.

+Phương trình bậc cao khó giải quyết khi nghiệm của nó không hữu tỷ.

-Từ đó chúng ta nảy ra một ý nghĩ là sẽ dùng ẩn số phụ và đưa phương trình đã cho về phương trình đa thức bậc ≤ 3 nhờ mối liên hệ giữa các biểu thức còn lại với căn thức. Điều kiện $x^2 - x - 1 \geq 0$.

Viết lại phương trình đã cho dưới dạng: $2\left(x^2 - x - 2\right) + \sqrt{x^2 - x - 2} - 3 = 0$

Đặt $\sqrt{x^2 - x - 2} = t\,(t > 0)$, phương trình đã cho trở thành:

$$2t^2 + t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\dfrac{3}{2}\,(\text{loại}) \end{array}\right.$$

Với $t = 1$, thay trở lại cho ta nghiệm của phương trình đã cho là $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

Nhận xét. Ví dụ trên là dạng toán quen thuộc $a.f(x) + b\sqrt{f(x)} + c = 0\,(a \neq 0)$.

Quy trình giải toán.

Bước 1: Tìm điều kiện để phương trình có nghĩa: $f(x) \geq 0$.

Bước 2: Đặt $\sqrt{f(x)} = t\,(t \geq 0)$, đưa phương trình về dạng $at^2 + bt + c = 0\,(a \neq 0)$

Bước 3: Xử lý phương trình : $at^2 + bt + c = 0\,(a \neq 0)$, với điều kiện $t \geq 0$

Bước 4: Thay trở lại tìm nghiệm phương trình ban đầu và kết luận.

Bài tập tương tự

a) Giải phương trình $\sqrt{5^2 + 10x + 1} = 7 - x^2 - 2x$.

b) Giải phương trình $(x + 5)(2 - x) = 3\sqrt{x^2 + 3x}$.

c) Giải phương trình $x^2 - 2x + 13 = 4\sqrt{(4 - x)(x + 2)}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $2\sqrt{\dfrac{2x + 1}{x + 1}} = \dfrac{x + 2}{x + 1}$.

Lời giải.

-Phân tích.

-Như đã nêu ở ví dụ 1, trước khi muốn sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ, chúng ta cần tự đặt ra câu hỏi: Các biểu thức trong phương trình có mối liên quan đặc biệt nào với nhau?

-Ở ví dụ này, ta nhận thấy: $\left(\sqrt{x + 1}\right)^2 = x + 1$, câu hỏi đặt ra là: $(2x + 1)$ và $(x + 2)$ có mối liên hệ như thế nào?

-Chú ý rằng ta luôn tìm được sự liên hệ:

$$\frac{ax + b}{mx + n} = \frac{\alpha(mx + n) + \beta(cx + d)}{mx + n} = \alpha + \beta\frac{cx + d}{mx + n},$$

Vì vậy ta sẽ tiến hành xác định α, β trong phân tích:

$\dfrac{x+2}{x+1} = \dfrac{\alpha(x+1)+\beta(2x+1)}{x+1} \Rightarrow \begin{cases} \alpha+2\beta=1 \\ \alpha+\beta=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=3 \\ \beta=-1. \end{cases}$ Từ đó ta có lời giải Điều kiện $\left[\begin{array}{l} x<-1 \\ x \geq -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$. Viết phương trình đã cho dưới dạng: $2\sqrt{\dfrac{2x+1}{x+1}} = 3 - \dfrac{2x+1}{x+1}$.

Đặt $\sqrt{\dfrac{2x+1}{x+1}} = t\,(t \geq 0)$, phương trình đã cho trở thành:

$t^2+2t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-3\,(\text{loại}) \end{array}\right.$

Với $t=1$, thay trở lại cho ta nghiệm của phương trình đã cho là$x=0$. ■

Bài tập tương tự

a) Giải phương trình $2\sqrt{\dfrac{3x-1}{x}} = \dfrac{4x-1}{3x-1}$.

b) Giải phương trình $\dfrac{7x}{x-4} = 3\sqrt{\dfrac{3x+2}{x-4}}$.

c) Giải phương trình $5\sqrt{x} + \dfrac{5}{2\sqrt{x}} = 2x + \dfrac{1}{2x} + 4$.

Nhận xét.

Để giải quyết phương trình tổng quát $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\,(a, c \neq 0)$, ta đặt $t = \sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}} \Rightarrow x = \dfrac{b-t^2d}{ct^2-a}$ và đưa phương trình đã cho về phương trình hữu tỷ ẩn t.

Ví dụ 3. Giải phương trình $(x^2+1)^2 = 5 - x\sqrt{2x^2+4}$.

✍ Lời giải.

-Phân tích. Ta nhận thấy $\left(x\sqrt{2x^2+4}\right)^2 = 2x^4+4x^2 = 2x^2(x^2+2)$, vì vậy để xuất hiện rõ ràng đa thức bậc 4 ta tiến hành khai triển $(x^2+1)^2$, từ đó ta sẽ có lời giải. Phương trình đã cho tương đương với: $x^2(x^2+2) = 4 - x\sqrt{2x^2+4}$.

Đặt $t = x\sqrt{2x^2+4}$, phương trình đã cho trở thành: $\dfrac{t^2}{2} = 4 - t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-4 \end{array}\right.$

Thay trở lại ta có:

-Với $t=2: x\sqrt{2x^2+4} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x^4+2x^2-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{\sqrt{3}-1}$.

-Với $t=-4: x\sqrt{2x^2+4} = -4 \Leftrightarrow \begin{cases} x<0 \\ x^4+2x^2-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\sqrt{2}$

Kết luận. Phương trình đã cho có các nghiệm $x=-\sqrt{2}; x=\sqrt{\sqrt{3}-1}$. ■

Ví dụ 4. Giải phương trình $\dfrac{x^4-x^2+1}{x^2\left(1-x^2\right)}+\dfrac{5}{2x\sqrt{1-x^2}}+2=0$

✍ **Lời giải.**

-Phân tích. Với suy nghĩ như ví dụ 3, ta nhận ra rằng $\left(x\sqrt{1-x^2}\right)^2=x^2\left(1-x^2\right)$, tuy nhiên biểu thức x^4-x^2+1 có mối liên hệ nào? Và với cách làm như ví dụ 2, câu trả lời là $\dfrac{x^4-x^2+1}{x^2\left(1-x^2\right)}=\dfrac{1}{x^2\left(1-x^2\right)}-1$, từ đó ta có: Điều kiện $\begin{cases}-1<x<1\\ x\neq 0\end{cases}$. Đặt $x\sqrt{1-x^2}=t\Rightarrow x^2-x^4=t^2$, lúc đó phương trình đã trở thành: $\dfrac{1-t^2}{t^2}+\dfrac{5}{2t}+2=0\Leftrightarrow 2t^2+5t+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-\dfrac{1}{2}\\ t=-2\end{array}\right.$

Thay trở lại, chúng ta tìm được nghiệm của phương trình ban đầu là $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. ■

Nhận xét: Ở ví dụ 3 và 4, sai lầm thường gặp của học sinh là biến đổi:
$x\sqrt{2x^2+4}=\sqrt{2x^4+4x^2}$ và $x\sqrt{1-x^2}=\sqrt{x^2-x^4}$. Chú ý: $A\sqrt{B}=\sqrt{A^2B}$ khi $A\geq 0$.

Bài tập tương tự

a) Giải phương trình $\dfrac{1}{1-x^2}=\dfrac{3x}{\sqrt{1-x^2}}-1$.

b) Giải phương trình $\dfrac{9}{x^2}+\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+9}}-1=0$.

c) Giải phương trình $\dfrac{1}{x^2\left(4-x^2\right)}+\dfrac{5}{2x\sqrt{4-x^2}}+1=0$

Ví dụ 5. Giải phương trình $x^2+2x\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=3x+1$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích. Thoạt nhìn, ta thấy rằng các biểu thức trong phương trình gần như là rời rạc và không tìm thấy sự gắn kết. Một cách suy nghĩ cổ điển là đưa x vào căn thức .

-Giả sử phép toán này thực hiện được: $x\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=\sqrt{x^2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)}=\sqrt{x^3-x}$, ta thấy rằng phương trình đã cho có thể chuyển về dạng: $\left(x^2-1\right)+2\sqrt{x\left(x^2-1\right)}-3x=0$ hay nói cách khác nó có mối liên hệ kiểu: $a^2+2ab-3b^2=0\Rightarrow\left(\dfrac{a}{b}\right)^2+2\dfrac{a}{b}-3=0(*)$.

-Tuy nhiên với điều kiện bài toán, việc đưa x vào căn thức, sẽ phải chia ra các trường hợp riêng lẻ, đồng thời nếu thực hiện phép chia cho $b=x$, sẽ cho kết quả tương tự phương trình (*). Từ những nhận định trên, ta có: Điều kiện $\begin{cases}x\neq 0\\ x-\dfrac{1}{x}>0\end{cases}$. Chia cả hai vế cho $x\neq 0$, ta có phương trình:

$x+2\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=3+\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+2\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}-3=0$

Đặt $t=\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}\,(t\geq 0)$, phương trình đã cho trở thành:

$$t^2+2t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-3\,(\text{không thỏa mãn}) \end{array}\right.$$

-Với $t=1:\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=1 \Leftrightarrow x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ (thỏa mãn điều kiện)

-Kết luận. Tập nghiệm của phương trình đã cho là $T=\left\{\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$. ■

Nhận xét: Ở ví dụ này ta nhận thấy, ẩn phụ chỉ thực sự xuất hiện khi ta thực hiện phép chia.

Bài tập tương tự

a) Giải phương trình $x^2-2x+x\sqrt{\dfrac{x^2-2}{x}}-2=0$.

b) Giải phương trình $x^2-6x+x\sqrt{\dfrac{x^2-6}{x}}-6=0$.

c) Giải phương trình $x+1+\sqrt{x^2-4x+1}=3\sqrt{x}$.

Ví dụ 6. Giải phương trình $x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{35}{12}$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích. Nhận thấy $\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2=x^2-1$, tuy nhiên các đa thức ngoài dấu căn có bậc 1, suy nghĩ ban đầu là sẽ nâng lên lũy thừa để đưa các đa thức ngoài dấu căn về bậc 2: $x^2+\dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}}+\dfrac{x^2}{x^2-1}=\left(\dfrac{35}{12}\right)^2$, lại có: $\left(\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\right)^2=\dfrac{x^4}{x^2-1}=x^2-\dfrac{1}{x^2-1}+1$ và bây giờ ta chỉ quan tâm đến biểu thức chứa biến số còn lại là:

$x^2+\dfrac{x^2}{x^2-1}=x^2+1-\dfrac{1}{x^2-1}$. Hay ta có ẩn phụ: $t=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$. Điều kiện $\left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<-1 \end{array}\right.$. Phương tình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x>1 \\ \left(x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)^2=\left(\dfrac{35}{12}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ \dfrac{x^4}{x^2-1}+2\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\left(\dfrac{35}{12}\right)^2\ (*) \end{cases}$$

Đặt $t=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\ (t>0)$, phương trình (*) trở thành:

$t^2+2t=\left(\dfrac{35}{12}\right)^2 \Leftrightarrow t=\dfrac{25}{12}\ (do t>0)$

Thay trở lại ta tìm được: $x=\dfrac{5}{3};x=\dfrac{5}{4}$. ■

Nhận xét: Ở ví dụ này ta nhận thấy, ẩn phụ chỉ thực sự xuất hiện khi ta thực hiện phép nâng lên lũy thừa.

Bài tập tương tự

a) Giải phương trình $x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=2\sqrt{2}$.

b) Giải phương trình $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x}=\sqrt{x+9}$.

c) Giải phương trình $\sqrt{x}+\sqrt{9-x}=\sqrt{-x^2+9x+6}$.

Ví dụ 7. Giải phương trình $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3-x}}=x-\dfrac{1}{2}$.

✍ **Lời giải.**

Điều kiện $\begin{cases} -1\le x\le 3 \\ x\ne 1 \end{cases}$. Phương trình đã cho tương đương với:

$\dfrac{\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}\right)}{2x-2}=x-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x+1+\sqrt{2x-x^2+3}=2x^2-3x+1\Leftrightarrow\sqrt{2x^2-x^2+3}=2x^2-4x$

Đặt $\sqrt{2x^2-x^2+3}=a\,(a\ge 0)$, ta có phương trình:

$2a^2+a-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} a=\dfrac{3}{2} \\ a=-2\,(\text{loại}) \end{array}\right.$

Thay trở lại ta tìm được nghiệm của phương trình đã cho là $x=\dfrac{2\pm\sqrt{7}}{2}$. ■

Nhận xét: Ở ví dụ này ta nhận thấy, ẩn phụ chỉ thực sự xuất hiện khi ta thực hiện phép nhân thêm lượng liên hợp.

Ví dụ 8. Giải phương trình $\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}=3+\sqrt{-x^2+3x+18}$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích. Trước hết ta nhận thấy $\left(\sqrt{3+x}\right)^2+\left(\sqrt{6-x}\right)^2=9$ và $\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}\right)^2=9+2\sqrt{(3+x)(6-x)}=9+2\sqrt{-x^2+3x+18}$, điều này giúp chúng ta nhận ra rằng:

-Ta tìm được mối liên hệ giữa: Phương trình chỉ còn lại căn thức: $\sqrt{-x^2+3x+18}$ và ta có quyền hy vọng bài toán sẽ quy được về phương trình ở dạng 1. Điều kiện $-3\le x\le 6$.

Phương trình đã cho tương đương với: $\left(\sqrt{3+x}-\sqrt{6-x}\right)^2=\left(3+\sqrt{-x^2+3x+18}\right)^2$

$\Leftrightarrow 9+2\sqrt{-x^2+3x+18}=9+6\sqrt{-x^2+3x+18}+\left(-x^2+3x+18\right)$

$\Leftrightarrow\left(-x^2+3x+18\right)+4\sqrt{-x^2+3x+18}=0$. Đặt $\sqrt{-x^2+3x+18}=t\,(t\ge 0)$

Phương trình đã cho trở thành: $t^2+4t=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=-4\,(\text{loại}) \end{array}\right.$

Thay trở lại, giải và kiển tra điều kiện, ta được nghiệm của phương trình đã cho là: $x=-3;x=6$. ■

Bình luận.

-Đây là dạng toán: $m\left(\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}\right)+n\left[(a+c)\,x+2\sqrt{(ax+b)\,(cx+d)}\right]=k$, với quy trình giải toán như sau:

Bước 1: Xử lý hệ điều kiện $\begin{cases} ax+b\ge 0 \\ cx+d\ge 0 \end{cases}$

Bước 2: Đặt $\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}=t\,(t\ge 0)\Rightarrow(a+c)\,x+2\sqrt{(ax+c)\,(cx+d)}=t^2-(b+d)$

Bước 3: Đưa phương trình về dạng sau và xử lý:

$m.t+n\left(t^2-b-d\right)=k\Leftrightarrow nt^2+mt-(nb+nd+k)=0$

Bước 4: Thay trở lại cách đặt, giải phương trình dạng $\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}=t_0$ (xem PP nâng lên lũy thừa).

Bước 5: Kiểm tra điều kiện và kết luận.

-Ở ví dụ 8, tôi chọn lời giải nâng lên lũy thừa rồi mới đặt ẩn phụ, mục đích để chúng ta hiểu rằng bản chất thực sự của nó là dạng toán $a.f(x)+b\sqrt{f(x)}+c=0\,(a\neq 0)$ mà ta đã giải quyết ở ví dụ 1.

Ví dụ 9. Giải phương trình $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16$.

Lời giải.

Điều kiện $x\geq -1$.

Đặt $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=t\,(t\geq 0)\Rightarrow 3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}=t^2-4$. Thay vào phương trình đã cho ta có: $t=(t^2-4)-16\Leftrightarrow t^2-t-20=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=5 \\ t=-4\,(\text{loại})\end{array}\right.$

Với $t=5$, thay trở lại ta có phương trình:

$\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=5\Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2+5x+3}=21-3x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 21-3x\geq 0 \\ 4\left(2x^2+5x+3\right)=(21-3x)^2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\leq \dfrac{16}{3} \\ x^2-146x+429=0\end{cases}\Leftrightarrow x=3$

-Kết luận. Nghiệm của phương trình đã cho là $x=3$. ■

Ví dụ 10. Giải phương trình $51+6\sqrt{(x+1)(8-x)}=17\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{8-x}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $-1\leq x\leq 8$. Đặt $\sqrt{x+1}+\sqrt{8-x}=t\,(t\geq 0)\Rightarrow 2\sqrt{(x+1)(8-x)}=t^2-9$

Phương trình đã cho trở thành: $51+3\left(t^2-9\right)=17t\Leftrightarrow 3t^2-17t+24=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=\dfrac{8}{3}\end{array}\right.$

-Với $t=3$, thay trở lại ta có phương trình :

$\sqrt{x+1}+\sqrt{8-x}=3\Leftrightarrow 2\sqrt{(x+1)(8-x)}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=8\end{array}\right.$

-Với $t=\dfrac{8}{3}$, thay trở lại ta có phương trình:

$\sqrt{x+1}+\sqrt{8-x}=\dfrac{8}{3}\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(8-x)}=-\dfrac{17}{18}\,(VN)$

-Kết luận. Tập nghiệm của phương trình đã cho là $T=\{-1;8\}$. ■

Nhận xét: Chúng ta hoàn toàn có thể loại giá trị $t=\dfrac{8}{3}$, nếu nhận xét được rằng $3\leq t\leq 3\sqrt{2}$, từ đó có thể tránh được vấn đề giải quyết phương trình $\sqrt{x+1}+\sqrt{8-x}=\dfrac{8}{3}$. Vấn đề đặt ra ở đây là làm sao tìm được điều kiện: $3\leq t\leq 3\sqrt{2}$ và liệu vấn đề tìm điều kiện "chặt" của ẩn phụ có cần thiết?

-Để đi tìm điều kiện chặt của ẩn phụ chúng ta có thể xử lý theo các phương án sau:

+Sử dụng đánh giá:

$t^2=9+2\sqrt{(x+1)(8-x)}\geq 9\Rightarrow t\geq 3$.

$t=\sqrt{x+1}+\sqrt{8-x}\underset{B.C.S}{\leq}\sqrt{(1+1)\left[(x+1)+(8-x)\right]}=3\sqrt{2}$ hay: $3\leq t\leq 3\sqrt{2}$

+Sử dụng đạo hàm: Xét hàm số: $f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{8-x}$, $x\in[-1;8]$, ta có :

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{2\sqrt{8-x}}\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow \sqrt{8-x}=\sqrt{x+1}\Leftrightarrow x=\dfrac{7}{2}$

Lập bảng biến thiên cho ta $\underset{[-1;8]}{Min}\,f(x)=3$ $\underset{[-1;8]}{Max}\,f(x)=3\sqrt{2}$ hay : $3\leq t\leq 3\sqrt{2}$

-Đối với ví dụ 10, vấn đề dùng điều kiện chặt có thể không cần thiết, tuy nhiên khi giải những phương trình theo ẩn t có nghiệm số không hữu tỷ, bất phương trình, phương trình chứa tham số có dạng này việc tìm điều kiện chặt sẽ giúp chúng ta giải quyết bài toán một cách nhanh chóng và chính xác hơn. Chúng ta có thể xem các ví dụ sau đây để thấy sự hiểu quả và cần thiết khi tìm điều kiện chặt của ẩn phụ.

Ví dụ 11. Giải phương trình $7+2\sqrt{4-x^2}=5\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}\right)$.

✍ **Lời giải.**

Điều kiện $-2\le x\le 2$.

Đặt $t=\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}\left(2\le t\le 2\sqrt{2}\right)$. Phương trình đã cho trở thành:

$7+(t^2-4)=5t\Leftrightarrow t^2-5t+3=0\Leftrightarrow t=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{2}$ (loại)

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm. ■

Nhận xét: Với việc tìm điều kiện $2\le t\le 2\sqrt{2}$, đã giúp ta nhanh chóng loại bỏ 2 nghiệm $t=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{2}$, nếu không việc biến đổi khi thay ngược trở lại là tương đối phức tạp.

Ví dụ 12. Giải phương trình: $3\sqrt{2+x}-6\sqrt{2-x}+4\sqrt{4-x^2}=10-3x$ (Khối B năm 2011)

✍ **Lời giải.**

-Bình luận. Ví dụ này được trích từ đề thi ĐH khối B năm 2011. Để giải quyết phương trình này có khá nhiều cách (chúng ta sẽ gặp lại ví dụ này trong phương pháp đặt ẩn phụ chuyển về hệ phương trình hay phương pháp nhân liên hợp).

-Phân tích.

-Ta có: $\left(3\sqrt{2+x}-6\sqrt{2-x}\right)^2=90-27x-36\sqrt{4-x^2}=9\left(10-3x-4\sqrt{4-x^2}\right)$

Từ đó nếu đặt: $t=3\sqrt{2+x}-6\sqrt{2-x}$, ta sẽ có phương trình: $t=\dfrac{t^2}{9}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\ t=9\end{array}\right.$

-Bây giờ ta sẽ tìm điều kiện chặt của $t=3\sqrt{2+x}-6\sqrt{2-x}$, xét hàm số:

$f(x)=3\sqrt{2+x}-6\sqrt{2-x}$, $x\in[-2;2]$, ta có: $f'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{2+x}}+\dfrac{3}{\sqrt{2-x}}>0,\ \forall x\in(-2;2)$

Do f (x) liên tục trên $[-2;2]$, nên: $-12=f(-2)\le f(x)\le f(2)=6$ hay $t\in[-12;6]$

Từ đó suy ra giá trị: $t=9$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán. Điều kiện $-2\le x\le 2$. Đặt $t=3\sqrt{2+x}-6\sqrt{2-x}$.

Xét hàm số: $f(x)=3\sqrt{2+x}-6\sqrt{2-x}$, $x\in[-2;2]$, ta có:

$f'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{2+x}}+\dfrac{3}{\sqrt{2-x}}>0,\ \forall x\in(-2;2)$

Do f (x) liên tục trên $[-2;2]$, nên: $-12=f(-2)\le f(x)\le f(2)=6$ hay $t\in[-12;6]$

Phương trình đã cho trở thành: $t=\dfrac{t^2}{9}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\,(\text{không thỏa mãn})\\ t=9\,(\text{loại})\end{array}\right.$

Với $t=0$, thay trở lại ta có: $3\sqrt{2+x}-6\sqrt{2-x}=0\Leftrightarrow 2+x=4(2-x)\Leftrightarrow x=\dfrac{6}{5}$.

-Kết luận. Phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{6}{5}$. ■

Chú ý

! Khi xử lý dạng toán bằng phương pháp sử dụng ẩn phụ $t=\alpha\sqrt{ax+b}+\beta\sqrt{cx+d}$ nếu chúng ta tìm được nghiệm hữu tỷ, việc tìm điều kiện chặt của ẩn phụ có thể không cần thiết. Song khi ta tìm được nghiệm vô tỷ của ẩn phụ, ta nên sử dụng điều kiện chặt để kiểm tra và loại đi những giá

! trị đó nếu cần.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

a) Giải phương trình $2\sqrt{x-x^2} = 3\left(\sqrt{x}+\sqrt{1-x}-1\right)$. Đáp số: $T=\{0;1\}$.
b) Giải phương trình $(x+1)\sqrt{-x^2-4x+4} = x+2$. Đáp số: $x=0; x=-3-\sqrt{3}$.
c) Giải phương trình $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}} = 2$. Đáp số: $x=1$.
d) Giải phương trình $2\left(5x+3\sqrt{x^2+x-2}\right) = 3\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}+27$. Đáp số: $x=2$.

1.2 Đưa phương trình vô tỷ về dạng $F(t)=0$.

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sqrt{3x-2} = 2x^2+2x-3$.

Lời giải.
-Nhận xét. Phương trình có chứa 1 căn thức, ta có thể dùng ẩn phụ để thoát căn thức và đưa phương trình vô tỷ về phương trình hữu tỷ với ẩn t. Điều kiện $x \geq \frac{2}{3}$. Đặt $\sqrt{3x-2}=t\ (t\geq 0)$. Phương trình đã cho trở thành:
$t = 2\left(\frac{t^2+2}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{t^2+2}{3}\right) - 3 \Leftrightarrow 2t^4+14t^2-9t-7=0 \Leftrightarrow (t-1)\left(2t^3+2t^2+16t+7\right)=0(1)$
Xét hàm số: $f(t) = 2t^3+2t^2+16t+7=0,\ t\geq 0$.
Ta có: $f'(t) = 6t^2+4t+16>0,\ \forall t\geq 0$ suy ra hàm số đồng biến trên $[0;+\infty)$
Do đó $f(t)\geq f(0)=7>0,\ \forall t\geq 0$, nên $(1)\Leftrightarrow t=1$
Thay trở lại cho ta nghiệm của phương trình đã cho là $x=1$. ■

Ví dụ 2. Giải phương trình $(3x+2)\sqrt{2x-3} = 2x^2+3x-6$.

Lời giải.
Điều kiện $x\geq \frac{3}{2}$. Đặt $\sqrt{2x-3}=t\ (t\geq 0) \Rightarrow x=\frac{t^2+3}{2}$. Phương trình đã cho trở thành: $\left(\frac{3t^2+9}{2}+2\right)t = 2\left(\frac{t^2+3}{2}\right)^2+3\left(\frac{t^2+3}{2}\right)-6$
$\Leftrightarrow t^4-3t^3+9t^2-13t+6=0 \Leftrightarrow (t-1)^2\left(t^2-t+6\right)=0 \Leftrightarrow t=1$.
Thay trở lại cho ta nghiệm của phương trình cần tìm là $x=2$. ■

Ví dụ 3. Giải phương trình $2\sqrt[3]{3x-2}+3\sqrt{6-5x}-8=0$ (Khối A năm 2009)

Lời giải.
-Nhận xét: Phương trình có chứa 2 căn thức, việc sử dụng ẩn phụ sẽ làm triệt tiêu 1 căn thức và đưa phương trình về dạng: $\sqrt[n]{f(x)}=g(x)$ và dạng toán này có ở chương I và thông thường được giải quyết bằng phương pháp nâng lên lũy thừa. Điều kiện $x\leq\frac{5}{6}$. Đặt $\sqrt[3]{3x-2}=t \Rightarrow x=\frac{t^3+2}{3}$. Phương trình đã cho trở thành:

$$3\sqrt{\frac{8-5t^3}{3}} = 8-2t \Leftrightarrow \begin{cases} t\leq 4 \\ 3\left(8-5t^3\right)=(8-2t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\leq 4 \\ 15t^3+4t^2-32t+40=0 \end{cases} \Leftrightarrow t=-2.$$

Thay trở lại cho ta nghiệm của phương trình đã cho là $x=-2$. ■

Ví dụ 4. Giải phương trình $\sqrt[4]{x+8}+\sqrt[4]{x-7}=3$.

Lời giải.

Điều kiện $-8 \le x \le 7$.
Đặt $\sqrt[4]{x-7} = t \ (t \ge 0) \Rightarrow x = t^4 + 7$. Phương trình đã cho trở thành:

$$\sqrt[4]{t^4+15} = 3 - t \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - t \ge 0 \\ t^4 + 15 = (3-t)^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \le 3 \\ 2t^3 - 9t^2 + 18t - 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1.$$

Thay trở lại cho ta nghiệm của phương trình đã cho là $x = 8$. ■

Ví dụ 5. Giải phương trình $x\sqrt[3]{35-x^3}\left(x + \sqrt[3]{35-x^3}\right) = 30$.

✍ Lời giải.

Đặt $x + \sqrt[3]{35-x^3} = t \Rightarrow x\sqrt[3]{35-x^3}\left(x + \sqrt[3]{35-x^3}\right) = \dfrac{t^3-35}{3}$

Lúc đó phương trình đã cho trở thành: $\dfrac{t^3-35}{3} = 30 \Leftrightarrow t^3 = 125 \Leftrightarrow t = 5$.

Thay trở lại ta có: $\sqrt[3]{35-x^3} = 5 - x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 3 \end{array}\right.$. ■

Ví dụ 6. Giải phương trình $x = (2004 + \sqrt{x})\left(1 - \sqrt{1-\sqrt{x}}\right)^2$.

✍ Lời giải.

Điều kiện $0 \le x \le 1$. Đặt $y = \sqrt{1-\sqrt{x}} \Rightarrow \sqrt{x} = 1 - y^2$. Phương trình đã cho trở thành:
$2(1-y)^2(y^2 + y - 1002) = 0 \Leftrightarrow y = 1$.
Với $y = 1$, thay trở lại cho ta nghiệm của phương trình đã cho là $x = 0$. ■

Ví dụ 7. Giải phương trình $\dfrac{6-2x}{\sqrt{5-x}} + \dfrac{6+2x}{\sqrt{5+x}} = \dfrac{8}{3}$.

✍ Lời giải.

Điều kiện $-5 < x < 5$. Phương trình đã cho tương đương với:

$$\frac{2(5-x)-4}{\sqrt{5-x}} + \frac{2(5+x)-4}{\sqrt{5+x}} = \frac{8}{3} \Leftrightarrow 2\left(\sqrt{5-x} + \sqrt{5+x}\right) - 4\left(\frac{1}{\sqrt{5-x}} + \frac{1}{\sqrt{5+x}}\right) = \frac{8}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{5-x} + \sqrt{5+x}\right) - 2\frac{\left(\sqrt{5-x} + \sqrt{5+x}\right)}{\sqrt{25-x^2}} = \frac{4}{3} \ (*)$$

Đặt: $\sqrt{5-x} + \sqrt{5+x} = t \Rightarrow \sqrt{10} < t \le \sqrt{20}$ và $\sqrt{25-x^2} = \dfrac{t^2-10}{2}$. Thay vào (*) ta có: $t - \dfrac{4t}{t^2-10} = \dfrac{4}{3}$

$$\Leftrightarrow 3t^3 - 4t^2 - 42t + 40 = 0 \Leftrightarrow (t-4)(3t^2 + 8t - 10) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4 \ (\text{không thỏa mãn}) \\ t = \dfrac{-4 \pm \sqrt{46}}{3} \ (\text{loi}) \end{array}\right.$$

Với $t = 4$, thay trở lại ta có: $\sqrt{5-x} + \sqrt{5+x} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{25-x^2} = 3 \Leftrightarrow x = \pm 4$.
Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \pm 4$. ■

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

① Giải phương trình $x^4 - 11x^2 - 8 = 13\sqrt{x^2+1}$. Đáp số: $x = \pm\sqrt{15}$.

② Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{x-1} = 2$. Đáp số: $x = 1$.

③ Gải phương trình $\dfrac{4x^2 - 2x - 20}{2x - 11} = \sqrt{2x+3}$. Đáp số: $x = \dfrac{1}{2}$.

④ Giải phương trình $x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = (3x+2)\sqrt{3x+1}$ (HSG Quảng Bình 2010) Đáp số: $x = 0; x = 1$.

⑤ Giải phương trình $x+\sqrt{5+\sqrt{x-1}}=6$. Đáp số: $x=\dfrac{11-\sqrt{17}}{2}$.

⑥ Giải phương trình $\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{1+x}=2$. Đáp số: $x=0$.

⑦ Giải phương trình $\sqrt[4]{x+8}-\sqrt[4]{x-8}=2$. Đáp số: $x=8$.

⑧ Giải phương trình $\sqrt[3]{5+3x}+\sqrt{3-2x}=3$. Đáp số: $x=-23; x=-\dfrac{13}{8}; x=1$.

⑨ Giải phương trình $x^2+\sqrt[3]{x^4-x^2}=2x+1$. Đáp số: $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

⑩ Giải phương trình $2-2x^2+4\sqrt{1-x^2}=\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)\left(2+\sqrt{1-x^2}\right)$. Đáp số: $x=0$.

⑪ Giải phương trình $\dfrac{9-2x}{\sqrt{4-x}}+\dfrac{4x+3}{\sqrt{4x+1}}=\dfrac{15}{2}$. Đáp số: $x=0; x=\dfrac{15}{4}$.

⑫ Giải phương trình $\sqrt{\dfrac{x+2}{2}}-1=\sqrt[3]{3\left(x-3\right)^2}+\sqrt[3]{9\left(x-3\right)}$. Đáp số: $x=0; x=\dfrac{217}{72}$.

2 Đưa phương trình vô tỷ về phương trình nhiều ẩn phụ

2.1 Đưa về phương trình 2 ẩn đồng bâc

Kiểu 1. $\alpha u^2+\beta.u.v+\gamma.v^2=0\ (\alpha^2+\gamma^2\neq 0)$

Ví dụ 1. Giải phương trình $2x^2-6x+4+\sqrt{(x+1)(x^2+1)}=0$.

✍ **Lời giải.**

Điều kiện $x\geq -1$. Đặt $\sqrt{x^2+1}=a$; $\sqrt{x+1}=b\ (a,b\geq 0)$

Ta có: $2a^2+ab-6b^2=0\Leftrightarrow(2a-3b)(a+2b)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2a=3b\\ a=-2b\,(\text{loi})\end{array}\right.$

Với $2a=3b$, ta có: $2\sqrt{x^2+1}=3\sqrt{x+1}\Leftrightarrow 4x^2-9x-5=0\Leftrightarrow x=\dfrac{9\pm\sqrt{161}}{8}$ (không thỏa mãn)

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=\dfrac{9\pm\sqrt{161}}{8}$.

Bình luận. Câu hỏi đặt ra trong bài toán này là: Vì sao ta có phân tích: $2x^2-6x-4=2a^2-6b^2$ và có phải dạng toán này luông phân tích được về dạng $\alpha u^2+\beta.u.v+\gamma.v^2=0\ (\alpha^2+\gamma^2\neq 0)$ hay không?
-Trả lời: Nếu muốn đưa bài toán về dạng $\alpha u^2+\beta.u.v+\gamma.v^2=0\ (\alpha^2+\gamma^2\neq 0)$ thì chắc chắn chúng ta cần tìm m, n sao cho $2x^2-6x-4=m(x+1)+n(x^2+1)$, đồng nhất hai vế ta sẽ có $\begin{cases}n=2\\ m=-6\\ m+n=-4\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}n=2\\ m=-6\end{cases}$ hay $2x^2-6x-4=2a^2-6b^2$.

Và tất nhiên nếu m,n không thỏa mãn $m+n=-4$ thì ta không thể đưa bài toán về dạng $\alpha u^2+\beta.u.v+\gamma.v^2=0\ (\alpha^2+\gamma^2\neq 0)$.

Chú ý

! Khi gặp phương trình kiểu tương tự $2a^2+ab-6b^2=0$, ta sử dụng máy tính giải phương trình bậc 2 với các hệ số $a=2$; $b=1$; $c=-6$, máy tính cho chúng ta nghiệm:

! $X_1 = \dfrac{3}{2}$; $X_2 = -2$, điều đó có nghĩa là $\left[\begin{array}{l} a = \left(\dfrac{3}{2}\right) b \\ a = (-2)\, b \end{array}\right.$, tức $\left[\begin{array}{l} 2a - 3b = 0 \\ a + 2b = 0. \end{array}\right.$

Ví dụ 2. Giải phương trình $6x^2 + 9x + 3 - 11\sqrt{x^3 - 1} = 0$.

Lời giải.

-Phân tích. Ta nhận thấy $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$, vì vậy ta có thể nghĩ đến phân tích: $6x^2+9x+3 = m(x^2+x+1) + n(x-1) \Rightarrow \begin{cases} m = 6 \\ m + n = 9 \\ m - n = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 6 \\ n = 3 \end{cases}$ Điều kiện $x \geq 1$. Đặt $\begin{cases} \sqrt{x^2+x+1} = a \\ \sqrt{x-1} = b \end{cases}$ $(a, b \geq 0)$, ta có phương trình:

$$6a^2 - 11ab + 3b^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3a = b \\ 2a = 3b \end{array}\right.$$

+Với: $3a = b \Rightarrow 3\sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow 9x^2 + 8x + 10 = 0\, (VN)$
+Với: $2a = 3b \Rightarrow 2\sqrt{x^2+x+1} = 3\sqrt{x-1} \Leftrightarrow 4x^2 - 5x + 13 = 0\, (VN)$
Vậy phương trình đã cho vô nghiệm. ■

Ví dụ 3. Giải phương trình $6x^2 - 28x + 2 = 11\sqrt{(x-2)(x^2-1)}$.

Lời giải.

-Phân tích. Theo nhận định ban đầu ta sẽ phân tích:

$$6x^2 - 28x + 2 = m(x^2-1) + n(x-2) \Rightarrow \begin{cases} m = 6 \\ n = -28 \\ m + 2n = -2 \end{cases}$$

Rõ ràng không tồn tại m, n thỏa mãn yêu cầu. Vậy phải chăng bài toán không đưa được về dạng toán chúng ta mong muốn?

Ta hãy lưu ý một chút: $(x-2)(x^2-1) = (x-2)(x-1)(x+1) = \left[\begin{array}{l} (x-2)(x^2-1) \\ (x-1)(x^2-x-2) \\ (x+1)(x^2-3x+2) \end{array}\right.$

Vì vậy ta cần kiểm chứng xem nó có rơi vào trường hợp nào trong 3 trường hợp trên hay không? Từ việc kiểm chứng sẽ cho chúng ta kết quả: $6x^2 - 28x + 2 = 6(x^2 - 3x + 2) - 10(x+1)$. Vậy bài toán có thể đưa về dạng ta cần! Điều kiện $(x-2)(x^2-1) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 2 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{array}\right.$

Với $\left[\begin{array}{l} x \geq 2 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+1 \geq 0 \\ (x-1)(x-2) \geq 0 \end{array}\right. \Rightarrow \sqrt{(x-2)(x^2-1)} = \sqrt{x+1}.\sqrt{x^2-3x+2}$

Đặt $\sqrt{x^2-3x+2} = a$; $\sqrt{x+1} = b\ (a, b \geq 0)$

Phương trình đã cho trở thành:$6a^2 - 11ab - 10b^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2a = 5b \\ 3a = -3b\,(\text{loại}) \end{array}\right.$

+Với $2a = 5b \Rightarrow 2\sqrt{x^2-3x+2} = 5\sqrt{x+1} \Leftrightarrow 4(x^2-3x+2) = 25(x+1) \Leftrightarrow x = \dfrac{37 \pm \sqrt{1641}}{8}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \dfrac{37 \pm \sqrt{1641}}{8}$

Chú ý

! Chúng ta cần lưu ý biến đổi $\sqrt{(x-2)(x^2-1)} = \sqrt{x+1}.\sqrt{x^2-3x+2}$, vì $\sqrt{A.B} = \sqrt{A}.\sqrt{B}$ khi $A, B \geq 0$.

Ví dụ 4. Giải phương trình $6x^2 - 16x - 2 = 11\sqrt{(x-2)(x^2-1)}$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích. Ví dụ này có nét tương đồng với ví dụ 3, và với phân tích giống với ví dụ 3, ta sẽ tìm được: $6x^2 - 16x - 2 = 6(x^2-x-2) - 10(x-1)$. Tuy nhiên như đã nêu ở ví dụ 3, ta thấy rằng với điều kiện: $\left[\begin{array}{l} x \geq 2 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{array}\right.$ chưa thể đảm bảo được rằng: $\sqrt{(x-1)(x^2-x-2)} = \sqrt{x-1}.\sqrt{(x+1)(x-2)}$.

Và để khắc phục vấn đề này chúng ta có thể chia ra 2 trường hợp: $x \geq 2$ và $-1 \leq x \leq 1$. Hoặc sử dụng cách đặt như lời giải sau: Điều kiện $\left[\begin{array}{l} x \geq 2 \\ -1 \leq x \leq 1. \end{array}\right.$

Đặt $\left\{\begin{array}{l} x^2 - x - 2 = a \\ x - 1 = b \end{array}\right. \Rightarrow 6x^2 - 16x - 2 = 6(x^2-x-2) - 10(x-1) = 6a - 10b$

Phương trình đã cho trở thành: $6a - 10b = 11\sqrt{ab} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 6a - 10b \geq 0 \\ (6a-10b)^2 = 121ab \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3a - 5b \geq 0 \\ 36a^2 - 241ab + 100b^2 = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3a - 5b \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} 4a = 25b \\ 9a = 4b \end{array}\right. \end{array}\right.$

+Với: $\left\{\begin{array}{l} 3a - 5b \geq 0 \\ 4a - 25b = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x^2 - 8x - 1 \geq 0 \\ 4x^2 + 21x - 33 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \dfrac{29 + \sqrt{569}}{8}$

+Với: $\begin{cases} 3a-5b\geq 0 \\ 9a-4b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2-8x-1\geq 0 \\ 9x^2-13x-14=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{13-\sqrt{673}}{18}$

Vậy phương trình có các nghiệm $x=\dfrac{29+\sqrt{569}}{8}$; $x=\dfrac{13-\sqrt{673}}{18}$.

Kiểu 2. $\alpha u^3+\beta.u^2.v+\gamma u.v^2+\lambda.v^3=0\ (\alpha^2+\lambda^2\neq 0)$

Ví dụ 5. Giải phương trình $(x^2+4x+5)\sqrt{x+1}=(3x^2-8x-5)\sqrt{x^2+1}$

✍ **Lời giải.**

Điều kiện $x\geq -1$. Phương trình đã cho tương đương với: $4(x+1)\sqrt{x+1}+8(x+1)\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}(x^2+1)-3(x^2+1)\sqrt{x^2+1}=0(*)$

Đặt $\begin{cases} \sqrt{x+1}=u \\ \sqrt{x^2+1}=v \end{cases} (u,v\geq 0)$. Phương trình đã cho trở thành:

$$4u^3+8u^2v+uv^2-3v^3=0 \Leftrightarrow (2u-v)(2u+3v)(u+v) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2u=v \\ 2u+3v=0\,(\text{loại}) \\ u+v=0\,(\text{loại}) \end{array}\right.$$

Với: $2u=v \Rightarrow 2\sqrt{x+1}=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ x^2-4x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{7}$

Vậy các nghiệm của phương trình đã cho là $x=2\pm\sqrt{7}$.

Bình luận. Bài toán này có hai căn thức bậc 2, việc sử dụng cách đặt $\begin{cases} \sqrt{x+1}=u \\ \sqrt{x^2+1}=v \end{cases} (u,v\geq 0)$ có thể đưa được về dạng ta cần. Câu hỏi đặt ra là làm sao để nhận biết rằng đó là dạng toán này, và tại sao lại có khai triển (*).

-Trả lời: Bài toán này đưa được về dạng: $\alpha u^3+\beta.u^2.v+\gamma u.v^2+\lambda.v^3=0\ (\alpha^2+\lambda^2\neq 0)$ nếu chúng ta tìm được m1, m2, m3, m4 thỏa mãn:

$$\begin{cases} x^2+4x+5=m_1(x+1)+n_1(x^2+1) \\ 3x^2-8x-5=m_2(x+1)+n_2(x^2+1) \end{cases}$$

Sử dụng đồng nhất thức cho chúng ta: $\begin{cases} n_1=1 \\ m_1=4 \\ m_1+n_1=5 \end{cases}$; $\begin{cases} n_2=3 \\ m_2=-8 \\ m_2+n_2=-5 \end{cases}$

Ví dụ 6. Giải phương trình $2x^3+x^2+x=(x^2+6x+6)\sqrt{x+1}$.

✍ **Lời giải.**

Điều kiện $x\geq -3$. Phương trình đã cho tương đương với:

$2x^3 - x^2\sqrt{x+1} + x(x+1) - 6(x+1)\sqrt{x+1} = 0(*)$

Đặt $\begin{cases} x = u \\ \sqrt{x+1} = v\,(v \geq 0) \end{cases}$, phương trình đã cho trở thành:

$2u^3 - u^2v + uv^2 - 6v^3 = 0 \Leftrightarrow (2u - 3v)(u^2 + uv + 2v^2)$

$\Leftrightarrow 2u = 3v\ (dou \neq v \Rightarrow u^2 + uv + 2v^2 > 0)$

Với: $2u = 3v \Rightarrow 2x = 3\sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 - 9x - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 3$. ■

Bình luận. Bài toán này có một ẩn phụ rõ ràng là: $\sqrt{x+1} = v$, chúng ta chỉ cần biết ẩn phụ còn lại là gì thì chắc chắn chúng ta sẽ biết cách phân tích thành (*). Nếu chúng ta sử dụng đồng nhất thức bài toán sẽ rối rắm, ta hãy dung phán đoán để phân tích vậy!

Ta cần phải có phân tích: $\begin{cases} x^2 + 6x + 6 = m(ax+b)^2 + n(x+1) \\ 2x^3 + x^2 + x = p(ax+b)^3 + q(ax+b)(x+1) \end{cases}$

Tuy nhiên việc tìm ra các hệ số trong các đồng nhất thức trên là không dễ, vì vậy khi gặp những dạng toán sau này chúng ta cơ bản dựa vào khả năng dự đoán và trực quan!
Sau đây là một cách để các bạn nhận đoán ẩn phụ còn lại:

Ví dụ 7. Giải phương trình $6x^3 + 8x^2 + 5x + \dfrac{5}{4} = \left(13x^2 + 15x + \dfrac{5}{4}\right)\sqrt{1-x}$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích. Đưa phương trình về dạng: $24x^3 + 32x^2 + 20x + 5 = (52x^2 + 60x + 5)\sqrt{1-x}$
-Ta có: $24 = 3.2^3$; $52 = 13.2^2$
-Cho $x = 1$, vào phương trình ta được 81, mà: $81 = 3.3^3 = 3(2+1)^3$
-Dự đoán: $u = 2x + 1$; $v = \sqrt{1-x}$
-Thử:$+(24x^3 + 32x^2 + 20x + 5) - 3(2x+1)^3 = -4x^2 + 2x + 2 = 2(2x+1)(1-x)$
$+52x^2 + 60x + 5 - 13(2x+1)^2 = 8(x-1)$
đạt mục đích chúng ta yêu cầu. Điều kiện $x \leq 1$. Phương trình đã cho tương đương với:
$3(2x+1)^3 + 2(2x+1)(1-x) = \left[13(2x+1)^{22} - 8(1-x)\right]\sqrt{1-x}$

Đặt $\begin{cases} 2x + 1 = a \\ \sqrt{1-x} = b \end{cases}$, Phương trình đã cho trở thành:

$3x^3 + 2ab^2 = (13a^2 - 8b^2)b \Leftrightarrow 3a^3 - 13a^2b + 2ab^2 + 8b^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 4b \\ a = b \\ 2a + 3b = 0 \end{array}\right.$

Thay trở lại các trường hợp, ta tìm được các nghiệm của phương trình là
$x = 0; x = \dfrac{-5 + 2\sqrt{10}}{2}; x = \dfrac{-10 - \sqrt{55}}{18}$. ■

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

① Giải phương trình $5\sqrt{x^3+1}=2\left(x^2+2\right)$ Đáp số: $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

② Giải phương trình $2\sqrt[4]{(1+x)^2}+3\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt[4]{(1-x)^2}=0$. Đáp số: Vô nghiệm.

③ Giải phương trình $4\sqrt[3]{(x+2)^2}-7\sqrt[3]{(4-x)^2}+3\sqrt[3]{(2-x)^2}=0$. Đáp số: $x=0; x=-\dfrac{74}{91}$.

④ Giải phương trình $2x^2-5x+2=5\sqrt{(x+1)(x+4)(x-5)}$. Đáp số: $x=-\dfrac{7}{4}; x=8; x=\dfrac{5\pm\sqrt{61}}{2}$.

⑤ Giải phương trình $3x^2-2x-2=6\sqrt{\dfrac{x^3+3x^2+4x+2}{30}}$. Đáp sô: $x=2$.

⑥ Giải phương trình $\sqrt{3}\left(x^2-x+1\right)+\sqrt{x^4+x^2+1}=0$. Đáp số: $x=1$.

⑦ Giải phương trình $\left(x^2-6x+11\right)\sqrt{x^2-x+1}=2\left(x^2-4x+7\right)\sqrt{x-2}$. Đáp số: $x=5\pm\sqrt{6}$.

⑧ Giải phương trình $4x^3-6x^2+x+\dfrac{5}{27}=\left(12x^2-14x-\dfrac{5}{3}\right)\sqrt{2x+1}$.
Đáp số: $x=\dfrac{28+12\sqrt{6}}{3}; x=\dfrac{7\pm\sqrt{69}}{12}$.

⑨ Giải phương trình $x^3-3x^2+2\sqrt{(x+2)^3}=6x$. Đáp số: $x=2; x=2-2\sqrt{3}$.

2.2 Đưa về phương trình 2 ẩn đối xứng

Đưa phương trình về dạng: $\alpha a^2+\beta.a=\alpha.b^2+\beta.b$

Ví dụ 1. Giải phương trình $x^2-2x=\sqrt{2x+1}-\sqrt{x^2+1}$.

✍ Lời giải.

-Nhận xét. $x^2-2x=\left(x^2+1\right)-(2x+1)=\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-\left(\sqrt{2x+1}\right)^2$. Từ đó đặt: $a=\sqrt{x^2+1}$; $b=\sqrt{2x+1}$, ta sẽ có phương trình: $a^2-b^2=a-b$ Điều kiện $x\geq-\dfrac{1}{2}$.
Đặt $a=\sqrt{x^2+1}$; $b=\sqrt{2x+1}$, $(a,b\geq0)$, phương tình đã cho trở thành:
$a^2-b^2=a-b\Leftrightarrow(a-b)(a+b+1)=0\Leftrightarrow a=b$

Khi $a=b$, ta có: $\sqrt{x^2+1}=\sqrt{2x+1}\Leftrightarrow x^2=2x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Vậy các nghiệm của phương trình là $x=0; x=2$. ■

Ví dụ 2. Giải phương trình $8x^2+2x+5=6\sqrt{2x^2+x+1}+3\sqrt{2x-1}$.

✍ Lời giải.

-Nhận xét: Đặt $\sqrt{2x^2+x+1}=a$; $\sqrt{2x-1}=b$. Giả sử ta có phân tích:
$8x^2+2x+5=m\left(2x^2+x+1\right)+n(2x-1)=2m+(m+2n)x+m-n$

Đồng nhất hệ số 2 vế ta có: $\left\{\begin{array}{l}2m=8\\m+2n=2\\m-n=5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m=4\\n=-1\end{array}\right.$. Hay: $8x^2+2x+5=4a^2-b^2$. Điều kiện

$x \geq \dfrac{1}{2}$. Đặt $\sqrt{2x^2+x+1}=a$; $\sqrt{2x-1}=b$ $(a,b \geq 0)$

Phương trình đã cho trở thành: $4a^2-b^2=6a+3b \Leftrightarrow (2a)^2+3(2a)=b^2+3b \Leftrightarrow (2a+b)(2a-b-3)=0$
$\Leftrightarrow 2a-b-3=0$

Với: $2a-b-3=0$, ta có phương trình:

$2\sqrt{2x^2+x+1}=\sqrt{2x-1}+3 \Leftrightarrow 4x^2+x-2=3\sqrt{2x-1}(*)$

Đặt $t=\sqrt{2x-1}$ $(t \geq 0) \Rightarrow x=\dfrac{t^2+1}{2}$. Phương trình (*) trở thành:

$2t^4+5t^2-6t-1=0 \Leftrightarrow (t-1)(2t^3+2t^2+7t+1)=0 \Leftrightarrow t=1$ $(dot \geq 0)$

Thay trở lại ta tìm được $x=1$. ■

Ví dụ 3. Giải phương trình $3x^3+x^2-8x+4=2\sqrt{2x-1}-x\sqrt{3x+1}$.

✍ **Lời giải.**

-Nhận xét. Nếu không có cơ sở, chúng ta khó lòng nhận đoán rằng phương trình này quy được về dạng $\alpha.a^2+\beta.a=\alpha.b^2+\beta.b$, một câu hỏi mà đi qua 2 ví dụ chúng ta vẫn chưa trả lời!

Có thể suy luận một cách đơn giản như sau: Ta đoán được nghiệm $x=1$ của phương trình, và khi $x=1 \Rightarrow \begin{cases} a=x\sqrt{3x+1}=2 \\ b=2\sqrt{2x-1}=2 \end{cases} \Rightarrow a=b$. Nghĩa là ta có quyền hy vọng bài toán trên đưa được về phương trình đối xứng. Từ đó ta thử khai triển: $a^2-b^2=x^2(3x+1)-4(2x-1)$ Điều kiện $x \geq \dfrac{1}{2}$. Đặt $a=x\sqrt{3x+1}$; $b=2\sqrt{2x-1}$ $(a,b \geq 0)$. Phương trình đã cho trở thành: $a^2-b^2=b-a$
$\Leftrightarrow (a-b)(a+b+1)=0 \Leftrightarrow a=b$.

Thay $a=b$ vào phương trình đã cho ta: $x\sqrt{3x+1}=2\sqrt{2x-1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm $x=1; x=\dfrac{2}{3}$. ■

Ví dụ 4. Giải phương trình $2x^2-x-7+3\sqrt{x+3}=0$.

✍ **Lời giải.**

Bình luận. Đây là phương trình dạng: $ax^2+bx+c=\alpha\sqrt{ex+f}$ quen thuộc với khá nhiều cách giải. Chúng ta hãy thử phân tích và tìm lời giải bằng cách đưa về phương trình 2 ẩn (phụ) đối xứng.

-Phân tích. Do hệ số x^2 bằng 2, hệ số trước $\sqrt{x+3}$ bằng 3. Từ đó ta hy vọng có thể đưa phương trình về dạng:

$2(x+m)^2-3(x+m)=2(x+3)-3\sqrt{x+3}$

Suy ra: $2(x+m)^2-3(x+m)-2(x+3)=2x^2-x-7$

$\Rightarrow (4m-5)x+2m^2-3m-6=-x-7$

Đồng nhất hai vế ta có: $\begin{cases} 4m-5=-1 \\ 2m^2-3m=-1 \end{cases} \Rightarrow m=1.$

Từ đó đặt: $a=(x+1)$, $b=\sqrt{x+3}$. Điều kiện $x \geq -3$. Đặt $a=(x+1)$, $b=\sqrt{x+3}$, ta có phương trình:

$2a^2-3a=2b^2-3b \Leftrightarrow (a-b)(2a+2b-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ 2a+2b-3=0 \end{array}\right.$

Thay trở lại và giải ta được: $x = 1; x = \dfrac{2-\sqrt{15}}{2}$. ∎

Bình luận. Từ các ví dụ trên chúng ta có thể dễ dàng nhận ra việc chế tác một bài toán kiểu đối xứng đồng bậc khá đơn giản. Mức độ khó dễ của bài toán phụ thuộc vào việc lựa chọn và biến đổi của người ra đề. Mời các bạn xem ví dụ sau:

Bước 1: Ta chọng 2 ẩn phụ tùy ý, ví dụ: $a = \sqrt{\dfrac{3}{2x+1}}$; $b = \sqrt{3-2x}$

Bước 2: Chọn kiểu phương trình đối xứng hay nửa đối xứng theo ẩn a, b

-Nếu chọn: $2a^2 + 3a = 2b^2 + 3b$, ta sẽ có: $2\left(\dfrac{3}{2x+1}\right) + 3\sqrt{\dfrac{3}{2x+1}} = 2(3-2x) + 3\sqrt{3-2x}$.

Biến đổi phương trình này theo ý muốn, chẳng hạn: $\dfrac{8x^2-8x}{2x+1} = 3\left(\sqrt{3-2x} - \sqrt{\dfrac{3}{2x+1}}\right)(*)$

Như vậy thấy khó cho chúng ta để nhận ra rằng, phương trình (*) có dạng đối xứng. Và để khắc phục khó khăn trong việc tìm kiếm lời giải, mời các bạn tiếp tục theo dõi với phương pháp đưa phương trình vô tỷ và dạng tích của 2 ẩn phụ.

Đưa phương trình về dạng: $\alpha.a^3 + \beta.a^2 + \gamma.a = \alpha.b^3 + \beta.b^2 + \gamma.b$

Ví dụ 5. Giải phương tình $x^3 - 4x^2 - 5x + 6 = \sqrt[3]{7x^2+9x-4}$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích. Chúng ta nhìn thấy nét tương đồng với ví dụ 4, nghĩa là ta sẽ đặt câu hỏi: liệu có thể phân tích được nó dưới dạng: $(x+m)^3 + (x+m) = (7x^2+9x-4) + \sqrt[3]{7x^2+9x-4}$ không?

Đồng nhất thức ta tìm được $m = 1$. Bài toán lúc này được giải quyết như sau: Đặt: $x+1 = a$; $\sqrt[3]{7x^2+9x-4} = b$, phương trình đã cho trở thành:

$a^3 + a = b^3 + b \Leftrightarrow (a-b)(a^2 - ab + b^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow a = b$, do $a^2 - ab + b^2 + 1 > 0$

Với $a = b \Rightarrow \sqrt[3]{7x^2+9x-4} = x+1 \Leftrightarrow (x-5)(x^2+x-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$ ∎

Ví dụ 6. Giải phương trình $x^3 + 3x^2 + 5x + 3 = (x^2+3)\sqrt{x^2+1}$.

✍ **Lời giải.**

Phân tích. Nếu đặt $\sqrt{x^2+1} = a$, lúc đó có thể đưa phương trình về dạng: $x^3 + 3x^2 + 5x + 3 = a^3 + 2a$.

Ta hy vọng có: $x^3 + 3x^2 + 5x + 3 = (x+m)^3 + 2(x+m)(*)$, thay nghiệm $x = 0$ vào (*) tìm được $m = 1$.

Kiểm tra lại ta có: $x^3 + 3x^2 + 5x + 3 = (x+1)^3 + 2(x+1)$ Điều kiện $-1 \le x \le 1$. Phương trình đã cho tương đương với:

$(x+1)^3 + 2(x+1) = (x^2+1)\sqrt{x^2+1} + 2\sqrt{x^2+1}$

Đặt: $(x+1) = a$; $\sqrt{x^2+1} = b\ (b \ge 0)$. Phương trình đã cho trở thành:

$a^3 + 2a = b^3 + 2b \Leftrightarrow (a-b)(a^2 + ab + b^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow a = b$.

Với $a = b$, thay trở lại ta có: $\sqrt{x^2+1} = x+1 \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 0$. ∎

Ví dụ 7. Giải phương trình $7x^2 - 13x + 8 = 2x^2\sqrt[3]{x(1+3x-3x^2)}$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích. Nhận thấy bậc cao nhất của phương trình là bậc 3, phương trình chứa 1 căn thức bậc 3(2 phép toán ngược nhau). Vì vậy ta nhận định rằng phương trình có thể đưa về dạng đối xứng đồng bậc. Để vế trái xuất hiện bậc 3, ta nghĩ đến phương án chia cả 2 vế cho x^3, lúc này phương trình được đưa về dạng: $\dfrac{7}{x} - \dfrac{13}{x^2} + \dfrac{8}{x^3} = 2\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3}{x} - 3}$, lúc này nếu đặt $\dfrac{1}{x} = t$, sẽ cho ta phương trình: $8t^3 - 13t^2 + 7t =$

$2\sqrt[3]{t^2+3t-3}$. Lúc này với những phân tích như các ví dụ trên ta có: Do $x=0$ không là nghiệm của phương trình, chia cả hai vế cho x^3 , ta được:
$\frac{7}{x}-\frac{13}{x^2}+\frac{8}{x^3}=2\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}-3} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{x}-1\right)^3+2\left(\frac{2}{x}-1\right)=\left(\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}-3\right)+2\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}-3}$
Đặt: $a=\left(\frac{2}{x}-1\right)$; $b=\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}-3}$. Phương trình đã cho trở thành:
$a^3+2a=b^3+2b \Leftrightarrow (a-b)\left(a^2+ab+b^2+2\right)=0 \Leftrightarrow a=b$

Với $a=b \Rightarrow \left(\frac{2}{x}-1\right)=\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}-3} \Leftrightarrow 2x^3+3x^2-13x+8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{-5\pm\sqrt{89}}{4}\end{array}\right.$

Vậy các nghiệm của phương trình đã cho là: $x=1$; $x=\frac{-5\pm\sqrt{89}}{4}$.

Ví dụ 8. Giải phương trình $\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(x+5-2\sqrt{x+1}\right)=2(x+1)\sqrt{2x-1}$.

✍ **Lời giải.**

Phân tích. Đặt $\sqrt{2x-1}=a$, ở vế phải của phương trình đã cho ta: $\left(a^2+3\right)a=a^3+3a$. Ta sẽ suy luận rằng có thể tìm thấy điều gì đó ở vế trái xoay quanh ẩn $b=\sqrt{x+1}$, thay vào vế trái cho ta: $(b-1)\left(b^2-2b+4\right)=b^3-3b^2+6b-4=(b-1)^3+3(b-1)$. Từ đó ta tìm được lời giải Điều kiện $x\geq\frac{1}{2}$. Đặt $a=\sqrt{2x-1}$; $b=\left(\sqrt{x+1}-1\right)$. Phương trình đã cho trở thành: $b^3+3b=a^3+3a$
$\Leftrightarrow (a-b)\left(a^2+ab+b^2+3\right)=0 \Leftrightarrow a=b$
Thay trở lại cho ta phương trình: $\sqrt{2x-1}=\sqrt{x+1}-1 \Leftrightarrow x=5-2\sqrt{5}$.

Bình luận: -Như chúng ta nhận xét ở dạng toán trước, để chế tác một phương trình vô tỷ là muôn hình muôn vẻ, nó phụ thuộc vào chủ quan của người ra đề. Nhưng vấn đề lớn nhất là người giải toán làm sao nắm bắt được ý tưởng của họ? Câu trả lời đó chính là cần đặt tư duy lên hàng đầu khi giải toán, hay khi bắt gặp một lời giải. Để người giải toán có thể hóa giải ,một bài toán phương trình vô tỷ có thể có nhiều cách, tùy vào sự tinh tế của từng người giải. Tuy nhiên để học phương trình vô tỷ, chúng ta luông đặt câu hỏi: Vì sao bài toán lại có lời giải như thế này? Một hướng đi khác có giải quyết được không? Vấn đề nảy sinh của mỗi hướng đi đó? Tổng quát như thế nào?...
-Với hai dạng toán trên, chúng ta có thể đưa ra các bài toán tổng quát có dạng $F(a)=F(b)$.
Ví dụ:
+Ta chọn hàm đại diện: $f(u)=u^4+u$ với 2 ẩn phụ: $\sqrt{5x-1}=a$; $\sqrt{3x+1}=b$. Không cần nhiều phép biến đổi ta có phương trình: $16x^2-16x+\sqrt{5x-1}=\sqrt{3x+1}$
+Ta chọn hàm đại diện: $f(u)=2u^4+u\sqrt{u^2+3}$ với 2 ẩn phụ: $2x+1=a$; $-3x=b$
+Ta có phương trình: $(2x+1)\left(2+\sqrt{4x^2+4x+4}\right)+3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)=0$
-Vấn đề nảy sinh mà chúng ta cần giải quyết là: Đối xứng là vậy, còn bất đối xứng thì sao? Làm sao để có sự phân biệt, đâu là đối xứng đâu là bất đối xứng? Nhưng trước khi tiếp tục với câu hỏi, mời các bạn rèn luyện khả năng quan sát với một số bài tập rèn luyện sau.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

1. Giải phương trình $x^2-4x-3=\sqrt{x+5}$. Đáp số: $x=-1; x=\frac{5+\sqrt{29}}{2}$.
2. Giải phương tình $2x^2-3x-7=\sqrt{4x+5}$. Đáp số: $x=1+\sqrt{5}$.
3. Giải phương trình $8x^2-8x+\sqrt{1-3x}=\sqrt{1+x}$. Đáp số: $x=0$.
4. Giải phương trình $2x^3+x^2-3x+1=2(3x-1)\sqrt{3x-1}$. Đáp số: $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.
5. Giải phương trình $\sqrt[3]{(x-1)^2}-2\sqrt[3]{x-1}-(x-5)\sqrt{x-8}-3x+31=0$. Đáp số: $x=9$.
6. Giải phương trình $x^3+4x^2+x=2+\left(2-x^2\right)\sqrt{1-x^2}$. Đáp số: $x=-1; x=\frac{1}{\sqrt{2}}$.
7. Giải phương trình $2x^2+2x-4+5\sqrt{x^2+1}=5\sqrt{3-x}$. Đáp số: $x=-2; x=1$.

8. Giải phương trình $2\sqrt{1-x^2} - 3\left(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}\right) = x^2 + 7x + 8$. Đáp số: $x = 0$.
9. Giải phương trình $\left(\dfrac{x-3}{x-1}\right)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = (2x+3)\sqrt{2x+1}$. Đáp số: $x = 0$.
10. Giải phương trình $x + 5\sqrt{1-\sqrt{1-x}} = 6\sqrt{1-x}$. Đáp số: $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.
11. Giải phương trình $(x+5)\sqrt{x+1} + 1 = \sqrt[3]{3x+4}$. Đáp số: $x = -1$.

2.3 Kỹ thuật: "Delta chính phương"

Ví dụ 1. Giải phương trình $4\sqrt{1-x} = x + 6 - 3\sqrt{1-x^2} + 5\sqrt{1+x}$.

✍ **Lời giải.**

Điều kiện $-1 \le x \le 1$. Đặt $a = \sqrt{1-x}$; $b = \sqrt{1+x}$ $(a, b \ge 0) \Rightarrow x + 6 = (1-x) + 2(x+1) + 3$
Phương trình đã cho trở thành:
$4a = a^2 + 2b^2 + 3 - 3ab + 5b \Leftrightarrow a^2 - a(3b+4) + 2b^2 + 5b + 3 = 0(*)$
Xem a là ẩn số, b là tham số ta có:
$\Delta_a = (3b+4)^2 - 4(2b^2 + 5b + 3) = b^2 + 4b + 4 = (b+2)^2$
Từ đó suy ra phương trình (*) có nghiệm: $\left[\begin{array}{l} a = \dfrac{(3b+4)-(b+2)-(b+2)}{2} = b+1 \\ a = \dfrac{(3b+4)+(b+2)}{2} = 2b+3 \end{array}\right.$
+Với $a = b + 1$, ta có: $\sqrt{1-x} = \sqrt{1+x} + 1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
+Với $a = 2b + 3$, ta có: $\sqrt{1-x} = 2\sqrt{1+x} + 3\,(VN)$
Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ■

Bình luận. Điều chúng ta quan tâm trong cách giải phương trình trên chính là việc làm sao để tách: $x + 6 = (1-x) + 2(x+1) + 3 = a^2 + 2b^2 + 3$.
Trước hết ta khẳng định rằng chỉ có thể tách $x - 6$ dưới dạng: $ma^2 + nb^2 + p$ (Vì $x - 6$ không chứa căn thức nên các hệ số α, β, γ trong phân tích này đều bằng 0: $x - 6 = ma^2 + nb^2 + p + \alpha.a + \beta.ab + \gamma.b$)
Để tìm các hệ số m, n, p ta sẽ làm như sau:
-Bước 1: Đặt $a = \sqrt{1-x}$; $b = \sqrt{1+x}$, ta có: $4a = x + 6 - 3ab + 5b(*)$
Giả sử cần phân tích: $x + 6 = m.a^2 + nb^2 + p \Rightarrow x + 6 = m(1-x) + n(1+x) + p \Rightarrow \begin{cases} -m + n = 1 \\ m + n + p = 6 \end{cases}$
$\Rightarrow \begin{cases} m = n - 1 \\ p = 7 - 2n \end{cases} \quad (1)$
-Bước 2: Kết hợp với (*) ta có: $4a = ma^2 + nb^2 + p - 3ab + 5b \Rightarrow ma^2 - a(3b+4) + nb^2 + 5b + p = 0\,(m \ne 0)$
Xem a là ẩn số, b là tham số ta cần: $\Delta_a = (3b-4)^2 - 4m(nb^2 + 5b + p)$ là một số chính phương
-Bước 3: Chọn $b = 0$ thay vào Δ_a, ta có:
$\Delta_a = 16 - 4mp = 4(4 - mp) \underset{(1)}{=} 4[4 - (n-1)(7-2n)] = 4[2n^2 - 9n + 11]$
Ta cần chọn n sao cho $4(2n^2 - 9n + 11)$ chính phương. Dò trên bảng TABLE của máy tính CaSiO hàm số $F(x) = 2x^2 - 9X + 11$. (Xem bài sự hỗ trợ của máy tính CaSiO – các bạn cũng có thể dò trực tiếp các giá trị nguyên nhỏ mà không cần dụng máy tính) ta thấy $X = 2 \leftrightarrow F(x) = 1$ hay ta sẽ chọn $n = 2$

$\Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ p=3 \end{cases}$. (Chú ý giá trị $n=1$ làm cho $m=0$ nên ta không chọn)

-Bước 4: Thử các giá trị tìm được vào $\Delta_a = (3b+4) - 4m(3b+4)^2 - 4m\left(nb^2+5b+p\right)$ ta có: $\Delta_a = (3b+4)^2 - 4\left(2b^2+5b+3\right) = (b+2)^2$, hay việc lựa chọn các giá trị trên thực hiện được.

Ví dụ 2. Giải phương trình $2\sqrt{1-x} - \sqrt{x+1} + 3\sqrt{1-x^2} = 3-x$.

Lời giải.

-Phân tích. Đặt $a=\sqrt{1-x}$; $b=\sqrt{1+x} \Rightarrow 2a-b+3ab = 3-x$, ta cần tìm m, n, p sao cho: $3-x = ma^2+nb^2+p = m(1-x)+n(1+x)+p \Rightarrow \begin{cases} -m+n=-1 \\ m+n+p=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=n+1 \\ p=2-2n \end{cases}$ $(m\neq 0)$ (1)

Thay trở lại phương trình cho ta:
$2a-b+3ab = ma^2+nb^2+p \Rightarrow ma^2 - a(2+3b) + nb^2+b+p = 0$
Khi đó: $\Delta_a = (2+3b)^2 - 4m\left(nb^2+b+p\right)$, chọn $b=0$ và kết hợp với (1) suy ra:
$\Delta_a = 4-4mp = 4\left[1-(n+1)(2-2n)\right] = 4\left(2n^2-1\right)$ chính phương.

Ta chọn được ngay $n=1$ suy ra: $\begin{cases} m=2 \\ p=0 \end{cases}$

Thử lại ta thấy: $\Delta_a = (2+3b)^2 - 8\left(b^2+b\right) = b^2+4b+4 = (b+2)^2$ Điều kiện $-1\le x\le 1$. Đặt $a=\sqrt{1-x}$; $b=\sqrt{1+x}$ $(a,b\ge 0) \Rightarrow 3-x = 2a^2+b^2$
Phương trình đã cho trở thành: $2a-b+3ab = 2a^2+b^2 \Leftrightarrow 2a^2 - a(2+3b)+b^2+b = 0(*)$
Xem a là ẩn số, b là tham số, ta có: $\Delta_a = (2+3b)^2 - 8\left(b^2+b\right) = b^2+4b+4 = (b+2)^2$

Khi đó phương trình (*) có nghiệm $\left[\begin{array}{l} a = \dfrac{2+3b-(b+2)}{4} = \dfrac{b}{2} \\ a = \dfrac{2+3b+(b+2)}{4} = b+1 \end{array}\right.$

+Với $a=\dfrac{b}{2} \Rightarrow 2\sqrt{1-x} = \sqrt{1+x} \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{5}$.

+Với $a=b+1 \Rightarrow \sqrt{1-x} = \sqrt{1+x}+1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm $x=\dfrac{3}{5}$; $x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Chú ý

Về nguyên tắc giải toán ta cần tìm m, n, p sao cho phương trình: $\Delta_a = (3b+4)^2 - 4m\left(nb^2+5b+p\right) = 0$ có $\Delta_b = 0$, tuy nhiên công việc này sẽ khiến chúng ta mất thêm thời gian khá nhiều. Nếu chúng ta "đi tắt-đón đầu" bằng cách gán giá trị đặc biệt cho b.

Ví dụ 3. Giải phương trình $2x^2+3x-6 = (3x+2)\sqrt{2x-3}$.

Lời giải.

Bình luận. Phương trình này dễ dàng giải quyết bằng cách bình phương và đưa về phương trình bậc 4, sau đó sử dụng máy tính CaSiO để tìm nhân tử, hoặc sử dụng nhân tử trong phép nhân liên hợp. Tuy nhiên trong rất nhiều tài liệu loại phương trình này được giải bằng kỹ thuật. Đeta chính phương, và để lại cho người đọc rất nhiều câu hỏi: Vì sao?

-Phân tích. Ta đặt $\sqrt{2x-3} = b$, và để cố định hệ số trước ẩn a^2, ta đặt $a=x$. Lúc đó ta có:

$2a^2 + 3x - 6 = (3a+2)\,b$
Suy ra ta chỉ cần tìm m, n, p trong phân tích: $3x - 6 = mb^2 + na + p$
Tương tự các ví dụ trên ta có:

$$3x - 6 = mb^2 + na + p = m\,(2x-3) + n.x + p \Rightarrow \begin{cases} 2m + n = 3 \\ -3m + p = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 3 - 2m \\ p = -6 + 3m \end{cases} \quad (1)$$

Phương trình trở thành: $2a^2 + mb^2 + na + p = (3a+2)\,b \Leftrightarrow mb^2 - (3a+2)\,b + 2a^2 + na + p = 0$
Lúc đó: $\Delta_b = (3a+2)^2 - 4m\,(2a^2 + na + p)$
Chọn $a = 0 \Rightarrow \Delta_b = 4 - 4mp = 4\,[1 - m\,(3m-6)] = 4\,(-3m^2 + 6m + 1)\,.$
Dò trên TABLE của CaSiO (các bạn có thể dò trực tiếp các giá trị nguyên nhỏ mà không cần sử dụng máy tính) để tìm m cho $(-3m^2 + 6m + 1)$ chính phương, ta có ngay $m = 1$.
Thử trở lại ta có: $\Delta_b = (3a+2)^2 - 4\,(2a^2 + a - 3) = (a+4)^2$ Đặt $a = x$; $b = \sqrt{2x-3}$. Phương trình đã cho trở thành: $2a^2 + b^2 + a - 3 = (3a+2)\,b \Leftrightarrow b^2 - (3a+2)\,b + 2a^2 + a - 3 = 0(1)$
Xem b là ẩn số, a là tham số ta có: $\Delta_b = (3a+2)^2 - 4\,(2a^2 + a - 3) = (a+4)^2$

Khi đó phương trình (1) có nghiệm: $\left[\begin{array}{l} b = \dfrac{3a + 2 - (a+4)}{2} = a - 1 \\ b = \dfrac{3a + 2 + (a+4)}{2} = 2a + 3 \end{array}\right.$

+Với $b = a - 1 \Rightarrow \sqrt{2x-3} = x - 1 \Leftrightarrow x = 2$
+Với $b = 2a + 3 \Rightarrow \sqrt{2x-3} = 2x + 3\,(VN)$
Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Ví dụ 4. Giải phương trình $3\left(\sqrt{2x^2+1} - 1\right) = x\left(1 + 3x + 8\sqrt{2x^2+1}\right).$

✍ **Lời giải.**
Phân tích. Trước hết ta đưa bài toán về dạng quen thuộc:
$3x^2 + x + 3 + (8x-3)\sqrt{2x^2+1} = 0$
Đặt $a = x$; $b = \sqrt{2x^2+1}$, chúng ta không cố định được hệ số trước a^2 hoặc b^2 bởi cả a^2 hay b^2 đều làm xuất hiện đại lượng x^2.
Từ đó ta cần tìm các hệ số m, n, p trong phân tích: $3x^2 + x + 3 = ma^2 + nb^2 + pa + q$

$$\text{Hay: } 3x^2 + x + 3 = mx^2 + n\,(2x^2+1) + px + q \Rightarrow \begin{cases} 2n + m = 3 \\ p = 1 \\ n + q = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 3 - 2n \\ p = 1 \\ q = 3 - n \end{cases} \quad (1)$$

Phương trình lúc này có dạng: $ma^2 + nb^2 + pa + q + (8a-3)\,b = 0 \Leftrightarrow nb^2 + (8a-3)\,b + ma^2 + pa + q = 0$
Suy ra: $\Delta_b = (8a-3)^2 - 4n\,(ma^2 + pa + q)$
-Cho $a = 0$, và kết hợp với (1) ta được: $\Delta_b = 9 - 4nq = 9 - 4n\,(3-n) = (2n-3)^2$, ta loại trường hợp này vì ta không thể thử hết tất cả các giá trị.
-Cho $a = 1$, ta có: $\Delta_b = 25 - 4n\,(m + p + q) = 12n^2 - 28n + 25$, thử trên TABLE ta tìm được 2 giá trị $n \neq 0$ làm cho Δ_b chính phương là: $n = 1; n = 3$.

Thử lại ta thấy với $\begin{cases} n = 3 \\ m = -3; p = 1; q = 0 \end{cases}$ có: $\Delta_b = (8a-3)^2 - 12\,(-3a^2 + a) = (10a-3)^2$ Phương trình đã cho tương đương với: $3x^2 + x + 3 + (8x-3)\sqrt{2x^2+1} = 0$
Đặt $a = x$; $b = \sqrt{2x^2+1} \Rightarrow 3x^2 + x + 3 = -3a^2 + 3b^2 + a$. Phương trình đã cho trở thành: $-3a^2 + 3b^2 + a + (8a-3)\,b = 0 \Leftrightarrow 3b^2 + (8a-3)\,b - 3a^2 + a = 0(*)$
Xem b là ẩn số, a là tham số ta có: $\Delta_b = (8a-3)^2 - 12\,(-3a^2 + a) = (10a-3)^2$

Khi đó phương trình (*) có nghiệm $\left[\begin{array}{l} b = \dfrac{3-8a-(10a-3)}{6} = 1-3a \\ b = \dfrac{3-8a+(10a-3)}{6} = \dfrac{a}{3} \end{array}\right.$

+Với $b = 1-3a \Rightarrow \sqrt{2x^2+1} = 1-3x \Leftrightarrow x = 0$

+Với $b = \dfrac{a}{3} \Rightarrow \sqrt{2x^2+1} = \dfrac{x}{3}\,(VN)$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 0$.

Ví dụ 5. Giải phương trình $(x+1)\sqrt{x^2-2x+3} = x^2+1$.

Lời giải.

Phân tích: Đặt $a = x;\ b = \sqrt{x^2-2x+3}$.

Ta cần có phân tích: $x^2+1 = ma^2+nb^2+pa+q$

Hay: $x^2+1 = mx^2+n\left(x^2-2x+3\right)+px+q \Rightarrow \begin{cases} m+n=1 \\ -2n+p=0 \\ 3n+q=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=1-n \\ p=2n \\ q=1-3n \end{cases}$

Lúc đó phương trình trở thành:

$ma^2+nb^2+pa+q = (a+1)\,b \Leftrightarrow nb^2-(a+1)\,b+ma^2+pa+q = 0$

Suy ra: $\Delta_b = (a+1)^2 - 4n\left(ma^2+pa+q\right)$

-Cho $a = 0$, ta có: $\Delta_b = 1-4nq = 1-4n\,(1-3n) = 12n^2-4n+1$. Thử các giá trị trên TABLE của CaSiO ta thấy $n = 1;\ n = -3$ làm cho Δ_b chính phương.

Thử kiểm tra lại ta có: $\begin{cases} n=1 \\ m=0; p=2; q=-2 \end{cases} \Rightarrow \Delta_b = (a+1)^2 - 4\,(2a-2) = a^2-6a+9 = (a-3)^2$

Đặt $a = x;\ b = \sqrt{x^2-2x+3} \Rightarrow x^2+1 = b^2+2a-2$. Lúc đó ta có phương trình:

$b^2+2a-2 = (a+1)\,b \Leftrightarrow b^2-(a+1)\,b+2a-2 = 0$. Xem b là ẩn số, a là tham số, ta có: $\Delta_b = (a+1)^2 - 4\,(2a-2) = a^2-6a+9 = (a-3)^2$. Suy ra: $\left[\begin{array}{l} b = \dfrac{a+1-(a-3)}{2} = 2 \\ b = \dfrac{a+1+(a-3)}{2} = a-1 \end{array}\right.$

+Với $b = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2-x+3} = 2 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$.

+Với $b = a-1 \Rightarrow \sqrt{x^2-2x+3} = x-1$ (vô nghiệm).

Vậy phương trình có các nghiệm $x = 1 \pm \sqrt{2}$.

Ví dụ 6. Giải phương trình $2\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)+\sqrt{1-x^2} = \dfrac{x^4}{32} - x^2 + 5$.

Lời giải.

Điều kiện $-1 \le x \le 1$.

Đặt $\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x} = a,\ \left(\sqrt{2} \le a \le 2\right) \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = \dfrac{a^2-2}{2};\ b = x^2\ (0 \le b \le 1)$. Ta có phương trình: $2a + \dfrac{a^2-2}{2} = \dfrac{b^2}{32} - b + 5 \Leftrightarrow b^2 - 32b - 16a^2 - 64a + 192 = 0(*)$

Xem b là ẩn số, a là tham số ta có: $\Delta'_b = 16a^2+64a+64 = (4a+8)^2$

Từ đó suy ra: $\left[\begin{array}{l} b = 16+(4a+8) = 4a+24 \\ b = 16-(4a+8) = 8-4a \end{array}\right.$

+Với $b = 4a + 24$ (loại do $b \in [0;1]$, $a \in \left[\sqrt{2};2\right]$)

+Với $b = 4(2-a)$, để ý là: $\sqrt{1-x^2} = \dfrac{a^2-2}{2} \Rightarrow b = x^2 = 1 - \left(\dfrac{a^2}{2} - 1\right)^2$.

Do đó: $b = 4(2-a) \Leftrightarrow a^4 - 4a^2 - 4a + 8 = 0 \Leftrightarrow (a-2)(a^3 + 2a^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow a = 2$ (do $a \in \left[\sqrt{2};2\right]$)

Từ đó thay trở lại cho ta $x = 0$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

① Giải phương trình $x^2 + \left(3 - \sqrt{x^2+2}\right)x = 1 + 2\sqrt{x^2+2}$. Đáp số: $x = \pm\sqrt{14}$.

② Giải phương trình $2(1-x)\sqrt{x^2+2x-1} = x^2 - 2x - 1$. Đáp số: $x = -1 \pm \sqrt{6}$.

③ Giải phương trình $(3x+1)\sqrt{2x^2-1} = 5x^2 + \dfrac{3}{2}x - 3$. Đáp số: $x = \pm 1; \mathrm{x} = 5$.

④ Giải phương trình $x^2 - 4x + (x-3)\sqrt{x^2-x-1} - 1 = 0$. Đáp số: $x = -1; x = \dfrac{1\pm\sqrt{41}}{2}$.

⑤ Giải phương trình $2\left(2\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}\right) - \sqrt{1-x^4} = 3x^2 + 1$. Đáp số: $x = 0$.

⑥ Giải phương trình $(4x-1)\sqrt{x^3+1} = 2x^3 + 2x + 1$. Đáp số: $x = 2; x = -\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}$.

⑦ Giải phương trình $\dfrac{8-3x}{3+\sqrt{3x+1}} + \sqrt{4+x} = 2\left(\sqrt{3x^2+13x+4} - 2x\right)$. Đáp số: $x = 0; \mathrm{x} = \dfrac{11+\sqrt{34}}{2}$.

⑧ Giải phương trình $3\left(\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x}\right) + 2\sqrt{1-4x^2} = x^4 + 7x^2 + 8$. Đáp số: $x = 0$.

⑨ Giải phương trình $9x + 8\sqrt{1-x} = \sqrt{3x+1} + \sqrt{-3x^2+2x+1} + 7$. Đáp số: $x = 1; x = \dfrac{5-\sqrt{5}}{8}$

⑩ Giải phương trình $5\left(\sqrt{2-x} + \sqrt{x-1}\right) - 3\sqrt{-x^2+3x-2} + 4x - 9 = 0$. Đáp số: $x = 1$.

3 Đưa về phương trình 2 ẩn có dạng tích

Ví dụ 1. Giải phương trình $\dfrac{6}{x+3} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}} + \dfrac{1}{\sqrt{-2+3\sqrt{1+x}}}$

✍ Lời giải.

Phân tích. Suy nghĩ ban đầu, khi chúng ta gặp phương trình chứa nhiều căn thức chúng ta sẽ đặt chúng bằng một ẩn phụ nào đó, sau đó chúng ta sẽ phân tích các đại lượng không có căn thức theo các ẩn phụ đó:

Ví dụ này cũng vậy, ta sẽ đặt: $a = \sqrt{1+x}$; $b = \sqrt{-2+3\sqrt{1+x}}$. Bây giờ ta quan tâm đến đại lượng $(x+3)$, ta có: $a^2 - b^2 = x + 3 - 3\sqrt{1+x} \Rightarrow a^2 - b^2 + 3\sqrt{1+x} = x + 3$ mà $a = \sqrt{1+x}$ vì vậy ta sẽ có: $x + 3 = a^2 - b^2 + 3a$. Thay vào phương trình ta sẽ có: $\dfrac{6}{a^2-b^2+3a} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}(*)$

Chúng ta chưa vội vàng biến đổi phương trình (*) vì cách đặt của chúng ta có thể không tìm thấy mối liên hệ giữa a, b nếu chỉ nhờ vào phương trình (*). Bây giờ nhiệm vụ là chúng ta cần tìm trước một nghiệm của phương trình (Các bạn có thể sử dụng máy tính CaSiO để trợ giúp – Xem bài: Sự hỗ trợ của máy tính CaSiO trong giải phương trình vô tỷ)

Ta tìm được nghiệm: $x = 0$ và khi $x = 0$ thì $\left[\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 1 \\ a = b \end{array}\right.$. Như vậy phương trình (*) có thể phân tích về các dạng sau: $\left[\begin{array}{l}(a-1)\,f\,(a,b)=0\\ (b-1)\,f\,(a,b)=0\\ (a-b)\,f\,(a,b)=0\end{array}\right.$. Bây giờ ta sẽ kiểm tra xem phương trình (*) có thể đưa về dạng toán nào trong 3 dạng toán trên không?

-Thay $a=1$ vào (*), ta có: $\dfrac{6}{4-b^2}=1+\dfrac{1}{b}$ (không thỏa mãn với mọi b)

-Thay $b=1$ vào (*), ta có: $\dfrac{6}{a^2+3a-1}=\dfrac{1}{a}+1$ (không thoả mãn với mọi a)

-Thay $a=b$ vào (*), ta có: $\dfrac{2}{a}=\dfrac{2}{a}$ (thỏa mãn với mọi a). Vậy chúng ta khẳng định rằng (*) đưa được về dạng $(a-b)\,f\,(a,b)=0$. Từ đó ta có lời giải. Điều kiện $\left\{\begin{array}{l}x>-1\\ 3\sqrt{x+1}>2\end{array}\right.\Leftrightarrow x>-\dfrac{5}{9}$.

Đặt $a=\sqrt{1+x}$; $b=\sqrt{-2+3\sqrt{1+x}}$ $(a,b>0)$, ta có phương trình:

$\dfrac{6}{a^2-b^2+3a}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\Leftrightarrow a^3-b^3+3a^2-3ab+a^2b-ab^2=0\Leftrightarrow(a-b)\left(a^2+b^2+3a\right)=0\Leftrightarrow a=b$

Với $a=b$, thay trở lại ta có: $\sqrt{1+x}=\sqrt{-2+3\sqrt{1+x}}\Leftrightarrow 3\sqrt{1+x}=x+3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=3\end{array}\right.$

-Kết luận. Các nghiệm của phương trình đã cho là $x=0$; $x=3$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $x-2\sqrt{x-1}-(x-1)\sqrt{x}+\sqrt{x^2-x}=0$.

✍ Lời giải.

-Phân tích. Quan sát bài toán ta nhận thấy, phương trình trên xoay quanh các căn thức $\sqrt{x}$ và $\sqrt{x-1}$. Vì vậy ta sẽ đặt: $a=\sqrt{x}$; $b=\sqrt{x-1}$, $(a,b\geq 0)$. Theo một suy nghĩ rất tự nhiên phương trình đã cho trở thành $a^2-2a-b^2a+ab=0(*)$, như đã phân tích ở ví dụ trên trước khi xử lý phương trình ta sẽ tìm xem nghiệm của phương trình. Ta thấy nghiệm của phương trình là $x=2$, và khi $x=2$, ta lại có: $\left[\begin{array}{l}a=\sqrt{2}\\ b=1\\ a=\sqrt{2}b\end{array}\right.$, thử vào phương trình (*) ta thấy không có trường hợp nào để chúng ta có thể đưa (*) về dạng tích quen thuộc?

Vậy nguyên nhân nào đã dẫn đến phương trình (*) không thể đưa về phương trình tích? Câu trả lời đơn giản ở chỗ, chúng ta đã cho $x=a^2$. Bây giờ ta sẽ thay $b=1$ vào phương trình đã cho trước khi tìm hiểu xem biến đổi x theo a hay theo b?

Thay $b=1$ vào phương trình ta thấy: $x-2-a+a=0\Rightarrow x-2=0\,(**)$. Để ý rằng nếu biến đổi $x=a^2$ thì (**) không đúng với mọi a, b (nghĩa là không thể đưa về tích). Nhưng nếu biến đổi $x=b^2+1$, ta lại có $b^2-1=0$ và rõ ràng khi thay $b=1$, phương trình (**) sẽ đúng với mọi a, b. Hay nói cách khác sẽ đưa được phương trình về dạng $(b-1)\,f\,(a,b)=0$. Điều kiện $x\geq 1$.

Đặt $a=\sqrt{x}$; $b=\sqrt{x-1}$, $(a\geq 1,b\geq 0)$. Phương trình đã cho trở thành:

$$(b^2+1)-2b-b^2a+ab=0\Leftrightarrow(b-1)^2-ab\,(b-1)=0\Leftrightarrow(b-1)\,(b-1-ab)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=1\\ b-1-ab=0\end{array}\right.\quad(1)$$

+Với: $b=1$ ta có: $\sqrt{x-1}=1 \Leftrightarrow x=2$
+Với: $b-1-ab=0 \Leftrightarrow b(1-a)-1=0$, do $a \geq 1 \Rightarrow 1-a \leq 0 \Rightarrow b(1-a)-1<0$. Nên không tồn tại x thỏa mãn phương trình này.
-Kết luận. Nghiệm của phương trình đã cho là $x=2$.

Ví dụ 3. Giải phương trình $\left(x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{1+x}+\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{1-x}=x$.

Lời giải.

-Phân tích. Quan sát phương trình ta thấy rằng:
-Phương trình có nghiệm là: $x=0$.
-Đặt $a=\sqrt{1+x}$; $b=\sqrt{1-x}$, phương trình trở thành: $2x(a+b-1)-(a-b)=0(*)$
Nhận thấy khi $x=0 \Rightarrow a=b$ và sẽ làm cho (*) luôn đúng. Từ đó ta phân tích: $2x=a^2-b^2$ và phương trình sẽ đưa được về dạng: $(a-b)f(a,b)=0$ Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$. Phương trình đã cho tương đương với:
$2x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-1\right)-\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)=0$
Đặt $a=\sqrt{1+x}$; $b=\sqrt{1-x}$, $(a,b \geq 0) \Rightarrow 2x=a^2-b^2$.
Phương trình đã cho trở thành:
$(a^2-b^2)(a+b+1)-(a-b)=0 \Leftrightarrow (a-b)[(a+b)(a+b+1)-1]=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ (a+b)^2+(a+b)-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a+b=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Thay trở lại ta có:
+Với: $a=b \Rightarrow \sqrt{1-x}=\sqrt{1+x} \Leftrightarrow x=0$
+Với: $a+b=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}$
-Kết luận. Phương trình có các nghiệm $x=0$; $x=\pm\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}$.

Ví dụ 4. Giải phương trình $\sqrt[3]{7x+1}+\sqrt[3]{x^2-8x-1}=2+\sqrt[3]{x^2-x-8}$.

Lời giải.

-Phân tích. Quan sát thấy:
-Phương trình có nghiệm $x=1$
-Đặt $a=\sqrt[3]{7x+1}$; $b=\sqrt[3]{x^2-8x-1}$, khi đó : $\sqrt[3]{x^2-x-8}=\sqrt[3]{b^3+a^3-8}$, phương trình trở thành $a+b=2+\sqrt[3]{b^3+a^3-8}(*)$

Khi $x=1$, ta có: $\left|\begin{array}{l} a=2 \\ b=-2 \\ a+b=0 \end{array}\right.$. Thay vào (*) ta thấy trường hợp $a=2$; $a+b=0$ thỏa mãn với mọi a, b. Vậy nên phương trình (*) luôn đưa được về dạng: $(a-2)(a+b)f(a,b)=0$. Đặt $a=\sqrt[3]{7x+1}$; $b=\sqrt[3]{x^2-8x-1} \Rightarrow \sqrt[3]{x^2-x-8}=\sqrt[3]{b^3+a^3-8}$, từ đó ta có phương trình: $a+b=2+\sqrt[3]{b^3+a^3-8}$
$\Leftrightarrow (a+b-2)^3=a^3+b^3-8 \Leftrightarrow (a+b)^3+6(a+b)(2-a-b)-8=(a+b)^3-3ab(a+b)-8$

$$\Leftrightarrow (a+b)(4-2a-2b+ab)=0 \Leftrightarrow (a+b)(a-2)(b-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b \\ a=2 \\ b=2 \end{array}\right.$$

+Với: $a=-b \Rightarrow \sqrt[3]{7x+1}=-\sqrt[3]{x^2-8x-1} \Leftrightarrow 7x+1=-x^2+8x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$

+Với: $a=2 \Rightarrow \sqrt[3]{7x+1}=2 \Leftrightarrow x=1$

+Với: $b=2 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2-8x-1}=2 \Leftrightarrow x^2-8x-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=9 \end{array}\right.$

Vậy các nghiệm của phương trình đã cho là $x=-1$; $x=0$; $x=1$; $x=9$.

Ví dụ 5. Giải phương trình $(x+2)\sqrt{x^2-2x+4}=(x-1)\sqrt{x^2+4x+7}$.

Lời giải.

Đặt $a=\sqrt{x^2-2x+4}$; $b=\sqrt{x^2+4x+7}$ $(a,b\geq 3)$. Suy ra $\begin{cases} x+2=\dfrac{b^2-a^2+9}{6} \\ x-1=\dfrac{b^2-a^2-9}{6} \end{cases}$

Khi đó phương trình đã cho trở thành: $\left(\dfrac{b^2-a^2+9}{6}\right)a=\left(\dfrac{b^2-a^2-9}{6}\right)b$

$\Leftrightarrow (b^2-a^2+9)a=(b^2-a^2-9)b \Leftrightarrow (a+b)(a-3-b)(a+3-b)=0$

Lúc đó: $a-3=b \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x+4}=\sqrt{x^2+4x+7}+3$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+4x+7}=-x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 2 \\ x^2+4x+7=x^2-4x+4 \end{cases} \quad (VN)$

$a+3=b \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x+4}+3=\sqrt{x^2+4x+7}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x+4}=x-1 \Rightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ 4=1\,(VL) \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Chú ý

Phương pháp đưa phương trình vô tỷ về phương trình tích của các ẩn phụ đặc biệt hiệu quả khi ta phán đoán được phương trình có thể đưa được về các dạng $(a-b)f(a,b)=0$ hay $(a-x0)f(a,b)=0$ bằng cách nhận đoán và thử các nghiệm hữu tỷ của phương trình đã cho.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

1. Giải phương trình $4\sqrt{x+1}-1=3x+2\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x^2}$. Đáp số: $x=-\dfrac{3}{5}$; $x=0$
2. Giải phương trình $x+2\sqrt{7-x}=2\sqrt{x-1}+\sqrt{-x^2+8x-7}+1$. Đáp số: $x=4; x=5$.
3. Giải phương trình $\sqrt{x^2-\dfrac{7}{x^2}}+\sqrt{x-\dfrac{7}{x^2}}=x$. Đáp số: $x=2$.
4. Giải phương trình $2x+(4x^2-1)\sqrt{1-x^2}=4x^3+\sqrt{1-x^2}$. Đáp số: $x=\pm\dfrac{1}{2}$; x $=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(5) Giải phương trình $2x - 3\sqrt[3]{4x^2+4x+1} = x^3 - 3\sqrt[3]{2x+1}$. Đáp số: $x=0; x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

(6) Giải phương trình $\dfrac{4}{x} + \sqrt{x-\dfrac{1}{x}} = x + \sqrt{2x-\dfrac{5}{x}}$. Đáp số: $x=\pm 2$.

(7) Giải phương trình $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2} = 1+\sqrt[3]{x^2+3x+2}$. Đáp số: $x=-1; x=0$.

(8) Giải phương trình $\sqrt[3]{x^2+3x+2}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x+2}\right)=1$. Đáp số: $x=-\dfrac{3}{2}$.

(9) Giải phương trình $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2+x}$. Đáp số: $x=1$.

(10) Giải phương trình $\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x+2}\right)\left(1+\sqrt{x^2+7x+10}\right)=3$. Đáp số: $x=-1$.

(11) Giải phương trình $\sqrt{1-2x}+\sqrt{1+2x} = \sqrt{\dfrac{1-2x}{1+2x}}+\sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$. Đáp số: $x=0$.

(12) Giải phương trình $(x^2-6x+11)\sqrt{x^2-x+1} = 2(x^2-4x+7)\sqrt{x-2}$. Đáp số: $x=5\pm\sqrt{6}$.

4 Đưa phương trình vô tỷ về hệ phương trình hữu tỷ

4.1 Đưa phương trình vô tỷ về hệ phương trình giải được bằng phép thế

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{2x^2+2x-3}=3$.

Lời giải.

Điều kiện $2x^2+2x-3\geq 0$. Đặt $\sqrt{x^2+x+2}=a$; $\sqrt{2x^2+2x-3}=b$ $(a,b\geq 0)$

Ta có hệ phương tình: $\begin{cases} a+b=3 \\ 2a^2-b^2=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3-b \\ 2(3-b)^2-b^2=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3-b \\ \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=11 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=-8 \\ b=11 \end{cases} \text{(loại)} \end{array}\right.$

Với $a=2$, ta có: $\sqrt{x^2+x+2}=2 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Vậy các nghiệm của phương trình đã cho là $x=-2$; $x=1$. ∎

Ví dụ 2. Giải phương trình $2\sqrt[3]{3x-2}+3\sqrt{6-5x}-8=0$ (Khối A – 2009)

Lời giải.

Điều kiện $x\leq\dfrac{6}{5}$. Đặt $\sqrt[3]{3x-2}=a$; $\sqrt{6-5x}=b$ $(b\geq 0)$, ta có hệ:

$\begin{cases} 2a+3b=8 \\ 5a^3+3b^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{8-2a}{3} \\ 15a^3+4a^2-32a+40=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=4 \end{cases}$

Thay trở lại ta tìm được $x=-2$. ∎

Ví dụ 3. Giải phương trình $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1}$.

Lời giải.

+Nhận thấy $x=1$ không là nghiệm của phương trình đã cho.

+Với $x\neq 1$, phương trình tương đương với: $\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}+\sqrt[3]{\dfrac{3x+1}{x-1}}=1$

Đặt $\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}=a$; $\sqrt[3]{\dfrac{3x+1}{x-1}}=b \Rightarrow -2a^3+b^3=\dfrac{(-2x-2)+(3x+1)}{x-1}=1$

Từ đó ta có hệ: $\begin{cases} a+b=1 \\ -2a^3+b^3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1-b \\ 3a^3-6b^2+6b-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}$

Thay trở lại ta có: $\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}=0 \Leftrightarrow x=-1$. Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=-1$.

Chú ý

Ta luôn có mối liên hệ giữa 3 nhị thức bậc nhất nhờ đồng nhất hệ số: $m\left(x+1\right)+n\left(3x+1\right)=x-1$
$\Rightarrow \begin{cases} m+3n=1 \\ m+n=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=-2 \\ n=1. \end{cases}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

1. Giải phương trình $\sqrt{x^3+x^2+2}+\sqrt{x^3+x^2-1}=3$. Đáp số:$x=1$.
2. Giải phương trình $\sqrt{3-x+x^2}-\sqrt{2+x-x^2}=1$. Đáp số: $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.
3. Giải phương trình $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$. Đáp số: $x=1;\mathrm{x}=2;x=10$.
4. Giải phương trình $\sqrt{3-2x}+\sqrt[3]{5+3x}=3$. Đáp số:$x=-23;x=1;x=-\dfrac{13}{8}$.
5. Giải phương trình $\sqrt[3]{3+x}+\sqrt[3]{11-x}=2$. Đáp số: $x=4\pm5\sqrt{2}$.
6. Gải phương trình $\sqrt[4]{18+5x}+\sqrt[4]{64-5x}=4$. Đáp số: $x=-\dfrac{17}{5};x=\dfrac{63}{5}$.
7. Giải phương trình $\sqrt[4]{5-x}+\sqrt[4]{12+x}=3$. Đáp số: $x=-11;x=4$.
8. Giải phương trình $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=2$. Đáp số: $x=1$.
9. Giải phương trình $\sqrt{2x^2+12x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=8\sqrt{x}$. Đáp số: $x=\dfrac{6\pm\sqrt{26}}{2}$.
10. Gải phương trình $\sqrt[3]{2x-5}+\sqrt[3]{3x+7}=\sqrt[3]{5x+2}$. Đáp số: $x=-\dfrac{7}{3};x=\pm\dfrac{5}{2}$.
11. Giải phương trình $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[2]{x+2}+\sqrt[3]{x+3}=0$. Đáp số: $x=2$.

4.2 Đưa phương trình vô tỷ về hệ phương trình đối xứng

Kiểu 1. Đưa phương trình vô tỷ về hệ đối xứng kiểu I.

Ví dụ 1. Giải phương trình $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}=2$ (TH&TT)

✍ **Lời giải.**

Điều kiện $\begin{cases} -2<x<2 \\ x\neq 0 \end{cases}$. Đặt $\begin{cases} x=a \\ \sqrt{2-x^2}=b \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2=2\ (b>0)$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a^2+b^2=2 \\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(a+b\right)^2-2ab=2 \\ a+b=2ab \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(ab)^2 - ab - 1 = 0 \\ a+b = 2ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} ab = 1 \\ ab = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ a+b = 2ab \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} ab = 1 \\ a+b = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} ab = -\dfrac{1}{2} \\ a+b = -1 \end{cases} \end{array}\right.$$

+Với $\begin{cases} ab = 1 \\ a+b = 2 \end{cases}$ (1) $\Rightarrow a, b$ là nghiệm của phương trình: $X^2 - 2X + 1 = 0 \Leftrightarrow X = 1$.

Từ đó cho ta $a = 1$ hay $x = 1$.

+Với $\begin{cases} ab = -\dfrac{1}{2} \\ a+b = -1 \end{cases}$ (2) $\Rightarrow a, b$ là nghiệm của phương trình $X^2 + X - \dfrac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow X = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$

Từ đó cho ta: $a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$ hay $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $T = \left\{1; \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}\right\}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\sqrt[3]{(2-x)^2} + \sqrt[3]{(7+x)^2} = 3 + \sqrt[3]{(7+x)(2-x)}$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} \sqrt[3]{2-x} = a \\ \sqrt[3]{7+x} = b \end{cases} \Rightarrow a^3 + b^3 = 9$

Từ đó ta có hệ: $\begin{cases} a^3 + b^3 = 9 \\ a^2 + b^2 = 3 + ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 9 \\ (a+b)^2 = 3 + 3ab \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^3 - (a+b)\left[(a+b)^2 - 3\right] = 9 \\ 3ab = (a+b)^2 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 3 \\ ab = 2 \end{cases}$$

Suy ra a, b là nghiệm của phương trình: $X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = 1 \\ X = 2 \end{array}\right.$

+Khi $X = 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \sqrt[3]{2-x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$.
+Khi $X = 2 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow \sqrt[3]{2-x} = 2 \Leftrightarrow x = -6$.
Vậy các nghiệm của phương trình đã cho là $x = -6$, $x = 1$.
Ví dụ 3. Giải phương trình $\sqrt{(1+x)^3} - \sqrt{(1-x)^3} = 2 + \sqrt{1-x^2}$. Điều kiện $-1 \le x \le 1$. Đặt $\begin{cases} \sqrt{1+x} = a \\ \sqrt{1-x} = b \end{cases} (a, b \ge 0) \Rightarrow a^2 + b^2 = 2$

Từ đó ta có hệ: $\begin{cases} a^2+b^2=2 \\ a^3-b^3=2+ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)^2+2ab=2 \\ (a-b)^3+3ab(a-b)=2+ab \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} ab=\dfrac{2-(a-b)^2}{2}(1) \\ (a-b)^3+ab\left[3(a-b)-1\right]=2(2) \end{cases}$

Thế phương trình (1) vào phương trình (2) ta có:

$(a-b)^3+\left[\dfrac{2-(a-b)^2}{2}\right]\left[3(a-b)-1\right]=2$

$\Leftrightarrow (a-b)^3-(a-b)^2-6(a-b)+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-b=1 \\ a-b=\sqrt{6} \\ a-b=-\sqrt{6} \end{array}\right.$

+Với $a-b=1 \Rightarrow ab=\dfrac{1}{2}$ suy ra a và $(-b)$ là nghiệm của phương trình: $X^2-X-\dfrac{1}{2}=0 \Leftrightarrow X=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

Do $a\geq 0 \Rightarrow a=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$, hay: $\sqrt{1+x}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

+Với $a-b=\pm\sqrt{6} \Rightarrow (a-b)^2=6 \Rightarrow ab=-2$ (loại do $a,b\geq 0$)

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ví dụ 3. Giải phương trình $\sqrt[4]{2x-1}-\sqrt[4]{x-1}=\sqrt[4]{4x-3}$.

Lời giải.

-Phân tích. Đặt $\begin{cases} \sqrt[4]{2x-1}=a \\ \sqrt[4]{x-1}=b \quad (a,b,c\geq 0) \\ \sqrt[4]{4x-3}=c \end{cases}$

Ta tìm mối liên hệ giữa các ẩn phụ:

$2x-1=m(x-1)+n(4x-3) \Rightarrow \begin{cases} m+4n=2 \\ m+3n=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=-2 \\ n=1 \end{cases}$, hay: $a^4=-2b^4+c^4$

Từ đó ta cần giải quyết hệ phương trình:

$\begin{cases} a-b=c \\ a^4=-2b^4+c^4 \end{cases} \Rightarrow (b+c)^4=-2b^4+c^4 \Rightarrow b^4+2b^3c+3b^2c^2+2bc^3=0$

$\Leftrightarrow b\left(b^3+2b^2c+3bc^2+2bc^2\right)=0 \Leftrightarrow b=0$ (do $a,b,c\geq 0$)

Ở phương trình này chúng ta cần chú ý đến lợi thế $(a,b,c\geq 0)$ Điều kiện $x\geq 1$. Đặt $\begin{cases} \sqrt[4]{2x-1}=a \\ \sqrt[4]{x-1}=b \\ \sqrt[4]{4x-3}=c \end{cases}$

$(a, b, c \geq 0) \Rightarrow a^4 = -2b^4 + c^4$

Từ đó ta có hệ:

$$\begin{cases} a - b = c \\ a^4 = -2b^4 + c^4 \end{cases} \Rightarrow (b+c)^4 = -2b^4 + c^4 \Rightarrow b^4 + 2b^3c + 3b^2c^2 + 2bc^3 = 0$$

$\Leftrightarrow b\left(b^3 + 2b^2c + 3bc^2 + 2bc^2\right) = 0 \Leftrightarrow b = 0$ (do $a, b, c \geq 0$)

Với $b = 0$, cho ta $x = 1$. Thử lại ta thấy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 1$. ■

Bình luận.

-Phương pháp dùng nhiều ẩn phụ đặc biệt hiệu quả với những phương trình chứa nhiều căn thức mà biểu thức dưới dấu căn thức là bậc nhất, đơn giản vì một nhị thức bậc nhất bất kỳ luôn biểu diễn được qua hai nhị thức bậc nhất khác.

-Chúng ta cũng cần lưu ý với những phương tình như trên được cho dưới dạng bậc nhất trá hình, ví dụ:

1) Giải phương trình: $\sqrt[3]{x^2+1} + \sqrt[3]{3x^2+1} = \sqrt[3]{(x-1)(x+1)}$

Thực ra phương trình này cũng giống ví dụ 1, nhưng đã được thay x bởi x^2

2) Giải phương trình: $\sqrt[4]{2x^2-2x-1} - \sqrt[4]{x^2-x-1} = \sqrt[4]{4x^2-4x-3}$

Thực ra phương trình này cũng giống với với dụ 2, nhưng đã được thay x bởi $x^2 - x$

-Tóm lại: Khi chúng ta quyết định sử dụng nhiều ẩn phụ cho việc giải phương trình vô tỷ, chúng ta cần đảm bảo rằng sẽ tìm được một biểu thức liên hệ giữa các ẩn phụ đó. Việc giải quyết phương trình nhiều ẩn phụ tùy thuộc vào mức độ khó dễ của bài toán được cho.

Ví dụ 4. Giải phương trình $\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{3x-1}}$.

✍ **Lời giải.**

Điều kiện $x > \dfrac{1}{2}$. Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{2x-1} \\ b = \sqrt{2x+1} \\ c = \sqrt{x+1} \\ d = \sqrt{3x-1} \end{cases}$ $(a, b, c, d > 0) \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$

Từ đó ta có hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d} \\ a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} cd(a+b) = ab(c+d) \\ a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c^2d^2(a+b)^2 = a^2b^2(c+d)^2 \\ a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \end{cases}$$

Suy ra: $c^2d^2\left(a^2 + b^2 + 2ab\right) = a^2b^2\left(c^2 + d^2 + 2cd\right)$

$\Leftrightarrow \left(a^2+b^2\right)\left(a^2b^2 - c^2d^2\right) + 2abcd(ab - cd) = 0$

$\Leftrightarrow (ab - cd)\left[\left(a^2+b^2\right)(ab+cd) + 2abcd\right] = 0$

$\Leftrightarrow ab = cd$ (do $a, b, c, d > 0$)

Với $ab = cd$, ta có: $\sqrt{2x-1}.\sqrt{2x+1} = \sqrt{x+1}.\sqrt{3x-1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{1}{2} \\ 4x^2 - 1 = (x+1)(3x-1) \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Thử lại ta thấy, nghiệm của phương trình đã cho là $x = 2$. ■

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

① Giải phương trình $\sqrt{x^2-3x+2} + \sqrt{x^2-4x+3} = 2\sqrt{x^2-5x+4}$. Đáp số: $x = 1$.

② Giải phương trình $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2x+4}=\sqrt{9+6x}$. Đáp số: $x=0$; $x=\frac{2}{3}$.

③ Giải phương trình $2\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{3x-2}=\sqrt[3]{5x-4}$. Đáp số: $x=1$.

④ Giải phương trình $\sqrt[3]{7x+1}-\sqrt[3]{x^2-x-8}+\sqrt[3]{x^2-8x-1}=2$. Đáp số: $x=0$; $x=\pm 1$, $x=9$.

⑤ Giải phương trình $\frac{4}{x}+\sqrt{x-\frac{1}{x}}=x+\sqrt{2x-\frac{5}{x}}$. Đáp số: $x=2$.

⑥ Giải phương trình $\sqrt[4]{3(x+5)}+\sqrt[4]{3(3-x)}=\sqrt[4]{11-x}+\sqrt[4]{x+13}$. Đáp số: $x=-1$.

⑦ Giải phương trình $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{2x-1}}=\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{4x-1}}+\frac{1}{\sqrt{5x-2}}\right)$. Đáp số: $x=1$.

⑧ Giải phương trình $4x=\sqrt{30+\frac{1}{4}\sqrt{30+\frac{1}{4}\sqrt{30+\frac{1}{4}\sqrt{x+30}}}}$. Đáp số: $x=\frac{1+\sqrt{1921}}{32}$.

⑨ Giải phương trình $x=\sqrt{2-x}.\sqrt{3-x}+\sqrt{3-x}.\sqrt{5-x}+\sqrt{5-x}.\sqrt{2-x}$. Đáp số: $x=\frac{239}{120}$.

4.3 Vận dụng các hằng đẳng thức trong giải phương trình vô tỷ

Nhắc đến đại số người ta thường nghĩ ngay tới những hằng đẳng thức đáng nhớ, hằng đẳng thức theo suốt chiều dài toán học từ bậc THCS. Với phương trình vô tỷ, dáng dấp của hằng đẳng thức đáng nhớ trải đều khắp nơi, tuy nhiên trong mục này ta nhắc đến sự vận dụng linh hoạt các hằng đẳng thức để mang đến một cách nhìn tuy không mới nhưng chưa hẳn đã quen!

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sqrt{x+8}+\frac{9x}{\sqrt{x+8}}-6\sqrt{x}=0$.

✍ **Lời giải.**

Điều kiện $x\ge 0$. Phương tình đã cho tương đương với:

$\left(\sqrt{x+8}\right)^2-2.\left(3\sqrt{x}\right)\sqrt{x+8}+\left(3\sqrt{x}\right)^2=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+8}-3\sqrt{x}\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+8}=3\sqrt{x} \Leftrightarrow x=1$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$. ■

Nhận xét.

-Với cách làm này, bài toán được giải quyết một cách ngắn gọn, đẹp mắt và tự nhiên.

-Nếu đặt $\sqrt{x+8}=a$, $3\sqrt{x}=b$, ta nhận thấy rằng thực ra phương trình trên được khai triển từ hằng đẳng thức $(a-b)^2=0$.

Bài tập tương tự

① Giải phương trình $\sqrt{5x-1}+\frac{4x}{\sqrt{5x-1}}=4\sqrt{x}$.

② Giải phương trình $\sqrt{x^2+1}+\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}=2\sqrt{2x+1}$.

③ Giải phương trình $x+2+\sqrt{1-x}=2\sqrt{x+1+\sqrt{(x+1)(1-x)^2}}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $x^2-6x+29+2\sqrt{3x^2+10x+3}=(10-2x)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}\right)$.

✍ **Lời giải.**

Điều kiện $x\ge -\frac{1}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với:

$(x-5)^2+(x+3)+(3x+1)+2\sqrt{(x+3)(3x+1)}+2(x-5)\sqrt{x+3}+2(x-5)\sqrt{3x+1}=0$

Đặt $\begin{cases}\sqrt{x+3}=a\\ \sqrt{3x+1}=b\\ x-5=c\end{cases}$ $(a,b\ge 0)$. Phương trình đã cho trở thành

$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=0 \Leftrightarrow (a+b+c)^2=0 \Leftrightarrow a+b+c=0$.
Thay trở lại ta có phương trình $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}+x-5=0$
$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+3}-2\right)+\left(\sqrt{3x+1}-2\right)+(x-1)=0$
$\Leftrightarrow \dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}+2}+\dfrac{3(x-1)}{\sqrt{3x+1}+2}+(x-1)=0$
$\Leftrightarrow (x-1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2}+\dfrac{3}{\sqrt{3x+1}+2}+1\right)=0 \Leftrightarrow x=1.$
Do $\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2}+\dfrac{3}{\sqrt{3x+1}+2}+1>0, \forall x\geq \dfrac{-1}{3}$.
-Kết luận. Nghiệm của phương trình đã cho là $x=1$.

Nhận xét. Thực ra bài toán được khai triển từ hằng đẳng thức
$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$. với $a=\sqrt{x+3}$, $b=\sqrt{3x+1}$; $c=x-5$.

Bài tập tương tự

① Giải phương trình $x^2-3x+14+2\sqrt{2x^2+9x+4}=(6-2x)\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+1}\right)$. KQ. $x=0$.

② Giải phương trình $16x^2+19x+7+4\sqrt{-3x^2+5x+2}=(8x+2)\left(\sqrt{2-x}+2\sqrt{3x+1}\right)$. KQ. $x=1$.

Ví dụ 3. Giải phương trình $(26-x)\sqrt{5x-1}-(13x+14)\sqrt{5-2x}+12\sqrt{(5x-1)(5-2x)}=18x+32$
(Chọn ĐT dự thi VMO 2013 – Lương Thế Vinh, Đồng Nai).

✍ Lời giải.

Điều kiện $x\geq 0$. Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{5x-1} \\ b=\sqrt{5-2x} \end{cases}$ $(a,b\geq 0)$. Phương trình đã cho trở thành
$(a^2+3b^2+12)a-(3a^2+b^2+12)b+12ab=6(a^2+b^2)+8$
$\Leftrightarrow (a-b)^3-6(a-b)^2+12(a-b)-8=0 \Leftrightarrow (a-b-2)^2=0 \Leftrightarrow a-b-2=0$
Thay trở lại ta có $\sqrt{5x-1}-\sqrt{5-2x}=2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{5x-1}-1\right)+\left(1-\sqrt{5-2x}\right)=0$
$\dfrac{5(x-2)}{\sqrt{5x-1}+3}+\dfrac{2(x-2)}{1+\sqrt{5-2x}}=0 \Leftrightarrow (x-2)\left(\dfrac{5}{\sqrt{5x-1}+3}+\dfrac{2}{1+\sqrt{5-2x}}\right)=0$
$\Leftrightarrow x=2$. Do $\dfrac{5}{\sqrt{5x-1}+3}+\dfrac{2}{1+\sqrt{5-2x}}>0, \forall x\in\left[\dfrac{1}{5};\dfrac{5}{2}\right]$
Kết luận. Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$.

Nhận xét. Ta nhận thấy rằng, bản chất thực sự của bài toán là quá trình khai triển hằng đẳng thức $(a-b-2)^3=0$ với $a=\sqrt{5x-1}$; $b=\sqrt{5-2x}$.

Bài tập tương tự

① Giải phương tình $(x+17)\sqrt{4-x}+(20-x)\sqrt{x+1}-9\sqrt{(4-x)(x+1)}=36$. KQ.$T=\{0;3\}$

② Giải phương trình $(x+16)\sqrt{1-2x}+(16-5x)\sqrt{1+x}+6x=12\sqrt{(1-2x)(1+x)}+20$. KQ. $T=\left\{-\dfrac{8}{9};0\right\}$.

Ví dụ 4. Giải phương trình $4x^2+(8x-4)\sqrt{x}-1=3x+2\sqrt{2x^2+5x-3}$.

✍ Lời giải.

Điều kiện $x\geq \dfrac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với:
$(2x-1)^2+2(2x-1)(2\sqrt{x})+4x=(2x-1)+2\sqrt{(2x-1)(x+3)}+(x+3)$

$$\Leftrightarrow \left(2x-1+2\sqrt{x}\right)^2=\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1+2\sqrt{x}=\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3} \\ 2x-1+2\sqrt{x}=-\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3}\right) \end{array}\right.$$

+Với $2x-1+2\sqrt{x}=\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3}(1)$, ta có:
$(1) \Leftrightarrow \sqrt{2x-1}\left(\sqrt{2x-1}-1\right)+\left(2\sqrt{x}-\sqrt{x+3}\right)=0$
$\Leftrightarrow \dfrac{2\left(x-1\right)\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x-1}+1}+\dfrac{3\left(x-1\right)}{2\sqrt{x}+\sqrt{x+3}}=0 \Leftrightarrow \left(x-1\right)\left(\dfrac{2\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x-1}+1}+\dfrac{3}{2\sqrt{x}+\sqrt{x+3}}\right)=0$
$\Leftrightarrow x=1$. Do $\dfrac{2\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x-1}+1}+\dfrac{3}{2\sqrt{x}+\sqrt{x+3}}>0$, $\forall x\geq \dfrac{1}{2}$.
+Với $2x-1+2\sqrt{x}=-\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3}\right)$ (2) , ta có:
$2x-1+2\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3}=0$ vô nghiệm, do
$2x-1+2\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3}=(2x-1)+2\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3}>0$, $\forall x\geq \dfrac{1}{2}$.
Kết luận. Phương trình có nghiệm duy nhất là $x=1$.

Nhận xét. Ta nhận thấy rằng, bản chất thực sự của bài toán là quá trình khai triển hằng đẳng thức $A^2-B^2=0$ với $A=\left(2x-1+2\sqrt{x}\right)$; $B=\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+3}\right)$.

Bài tập tương tự

① Giải phương trình $x^2+2x+2x\sqrt{x+3}=6\sqrt{1-x}+7$. Đáp số: $x=1$.

② Giải phương trình $x^2+5x+4+(2x+4)\sqrt{x+5}=2\sqrt{(3-x)(x+2)}$. Đáp số: $x=-1$.

Ví dụ 5. Giải phương trình $(5x+8)\sqrt{2x-1}+7x\sqrt{x+3}=9x+18-(x+26)\sqrt{x-1}$

✍ Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} \sqrt{2x-1}=a \\ \sqrt{x+3}=b \\ \sqrt{x-1}=c \end{cases}$ $(a,b,c\geq 0)$. Phương trình đã cho trở thành:
$\left(a^2+3b\right)a+\left(b^2+3a\right)b=27-27c+9c^2-c^3 \Leftrightarrow (a+b)^3=(3-c)^3$
$\Leftrightarrow a+b=3-c \Leftrightarrow a+b+c-3=0$
Thay trở lại ta có: $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}-3=0$
$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x-1}-1\right)+\left(\sqrt{x+3}-2\right)+\sqrt{x-1}=0$
$\Leftrightarrow \dfrac{2\left(x-1\right)}{\sqrt{2x-1}+1}+\dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}+\sqrt{x-1}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}\left(\dfrac{2\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x-1}+1}+\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}-2}+1\right)=0$
$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}=0 \Leftrightarrow x=1$. Do $\dfrac{2\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x-1}+1}+\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}-2}+1>0, \forall x\geq 1$.
Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=1$.

Nhận xét. Ta nhận thấy rằng, bản chất thực sự của bài toán là quá trình khai triển hằng đẳng thức $A^3-B^3=0$ với $A=\left(\sqrt{2x-1}+2\sqrt{x+3}\right)$; $B=\left(3-\sqrt{x-1}\right)$.

Bài tập tương tự

① Giải phương trình $(7x+19)\sqrt{x+1}+(9+5x)\sqrt{2x+6}=27x+63-(3x+31)\sqrt{3x+4}$. KQ. $x=-1$.

② Giải phương trình $64x^3+36x^2+33x+7=\left(48x^2+23x+5\right)\sqrt{2-x}+(24x+8)\sqrt{3x+1}$. KQ.$x=1$.

Bình luận. Qua các ví dụ trên, ta có thể nhận thấy rằng một bài toán với lời giải sử dụng hằng đẳng thức luôn cho những điều bất ngờ và thú vị.
-Một bài toán tưởng chừng rất khó, lại được giải quyết một cách đơn giản và tự nhiên từ việc đoán

nhận rằng phương trình đó được triển khai từ hằng đẳng thức. Nhưng cũng có những bài toán nhìn rất khó với cách làm này lại được giải một cách đơn giản bằng một phương pháp khác.
-Tuy nhiên khi sử dụng khai triển hằng đẳng thức để "chế đề" ta có thể gửi gắm được nhiều ý đồ giải toán trong đó. Và chung quy lại, một bài toán nói riêng và một phương trình vô tỷ nói chung thường có nhiều cách giải quyết (Chúng ta sẽ tìm hiểu thêm ở chương 2) và để giải quyết nó chúng ta cần có những cái nhìn bao quát nhất về các phương pháp giải toán.

D PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ

Khi đoán biết được một số nghiệm của một phương trình vô tỷ, cũng như so sánh được các đại lượng ở hai vế của phương trình đó. Ta thường lựa chọn phương pháp đánh giá để giải quyết phương trình. Một bài toán phương trình vô tỷ được giải bằng phương pháp đánh giá thường cho ta một lời giải bất ngờ, đẹp mắt và thể hiện được tư duy linh hoạt của người giải toán. Sau đây là một số kỹ năng cần thiết giúp chúng ta cùng nhìn nhận phương pháp đánh giá một cách gần gũi hơn.

1 Làm chặt miền nghiệm để đánh giá

Ví dụ 1. Giải phương trình $3+\sqrt[4]{7x+15}=x+\sqrt{2x}$.

✍ **Lời giải.**
-Phân tích.

-Do $x=3$, là một nghiệm của phương trình. Nên khi đó: $\begin{cases} 3=x \\ \sqrt[4]{7x+15}=\sqrt{2x} \end{cases}$

-Ta viết lại phương trình thành $(x-3)+\left(\sqrt[4]{7x+15}-\sqrt{2x}\right)=0(*)$
-Ta tìm nghiệm chung của các hệ bất phương trình:

$$+\begin{cases} 3-x>0 \\ \sqrt[4]{7x+15}-\sqrt{2x}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<0 \\ (x-3)(4x+5)<0 \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0\leq x<3$$

$$+\begin{cases} 3-x<0 \\ \sqrt[4]{7x+15}-\sqrt{2x}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ (x-3)(4x+5)>0 \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x>3$$

-Như vậy:
+Nếu $0\leq x<3$ thì $(3-x)+\left(\sqrt[4]{7x+15}-\sqrt{2x}\right)>0$ hay (*) vô nghiệm.
+Nếu $x>3$ thì $(3-x)+\left(\sqrt[4]{7x+15}-\sqrt{2x}\right)<0$ hay (*) vô nghiệm.
Hay phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x=3$. Điều kiện $x\geq 0$.
Phương trình đã cho tương đương với: $(x-3)+\left(\sqrt[4]{7x+15}-\sqrt{2x}\right)=0(*)$
+Nhận thấy $x=3$ là nghiệm của phương trình (*).
+Xét các hệ bất phương trình:

$$-\begin{cases} 3-x>0 \\ \sqrt[4]{7x+15}-\sqrt{2x}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<0 \\ (x-3)(4x+5)<0 \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0\leq x<3$$

$$-\begin{cases} 3-x<0 \\ \sqrt[4]{7x+15}-\sqrt{2x}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ (x-3)(4x+5)>0 \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x>3$$

Suy ra:

+Nếu $0\leq x<3$ thì $(3-x)+\left(\sqrt[4]{7x+15}-\sqrt{2x}\right)>0$ hay (*) không có nghiệm $x\in[0;3)$.

+Nếu $x>3$ thì $(3-x)+\left(\sqrt[4]{7x+15}-\sqrt{2x}\right)<0$ hay (*) không có nghiệm $x\in(3;+\infty)$

Vậy PT có nghiệm duy nhất là $x=3$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\sqrt[4]{7x^2+11x+6}-\sqrt{3x}=x-6$.

✍ Lời giải.

Điều kiện $x\geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với: $\left(\sqrt[4]{7x^2+11x+6}-\sqrt{3x}\right)+(6-x)=0$

+Nhận thấy $x=6$ là nghiệm của phương trình (*).

+Xét các hệ bất phương trình:

$$-\begin{cases} 6-x>0 \\ \sqrt[4]{7x^2+11x+6}-\sqrt{3x}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<6 \\ (x-6)(2x+1)<0 \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0\leq x<6$$

$$-\begin{cases} 6-x<0 \\ \sqrt[4]{7x^2+11x+6}-\sqrt{3x}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>6 \\ (x-6)(2x+1)>0 \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x>6$$

Suy ra:

+Nếu $0\leq x<6$ thì $\left(\sqrt[4]{7x^2+11x+6}-\sqrt{3x}\right)+(6-x)>0$ hay (*) không có nghiệm $x\in[0;6)$

+Nếu $x>6$ thì $\left(\sqrt[4]{7x^2+11x+6}-\sqrt{3x}\right)+(6-x)<0$ hay (*) không có nghiệm $x\in(6;+\infty)$

Vậy PT có nghiệm duy nhất $x=6$.

Ví dụ 3. Giải phương trình $(x-1)^2+\sqrt{(x+1)^3}+\sqrt{(2x+1)^3}=3(*)$

✍ Lời giải.

Điều kiện $x\geq -\frac{1}{2}$.

+Nhận thấy $x=0$ là nghiệm của phương trình (*).

+Xét các hệ bất phương trình:

$$-\begin{cases} \sqrt{(x+1)^3}>(x+1) \\ \sqrt{(2x+1)^3}>(2x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)\left(\sqrt{x+1}-1\right)>0 \\ (2x+1)\left(\sqrt{2x+1}-1\right)>0 \\ x\geq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+1)x}{\sqrt{x+1}+1}>0 \\ \dfrac{(2x+1)x}{\sqrt{2x+1}+1}>0 \\ x\geq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x>0$$

-$\begin{cases} \sqrt{(x+1)^3} < (x+1) \\ \sqrt{(2x+1)^3} < (2x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)\left(\sqrt{x+1}-1\right) < 0 \\ (2x+1)\left(\sqrt{2x+1}-1\right) < 0 \\ x \geq -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+1)x}{\sqrt{x+1}+1} < 0 \\ \dfrac{(2x+1)x}{\sqrt{2x+1}+1} < 0 \\ x \geq -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} \leq x <$
0
Suy ra:
+Nếu $x > 0$, ta có:
$VT\ (*) = (x-1)^2 + \sqrt{(x+1)^3} + \sqrt{(2x+1)^3} > (x-1)^2 + (x+1) + (2x+1)$
$= x^2 + x + 3 > 3 = VP$ (*) hay (*) không có nghiệm $x \in (0; +\infty)$
+Nếu $-\dfrac{1}{2} \leq x < 0$, ta có:
$VT\ (*) = (x-1)^2 + \sqrt{(x+1)^3} + \sqrt{(2x+1)^3} < (x-1)^2 + (x+1) + (2x+1)$
$= 3 + x(x+1) < 3 = VP$ (*) hay (*) không có nghiệm $x \in (0; +\infty)$
Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$. ■

Ví dụ 4. Giải phương trình $\sqrt[4]{2x-1} - \sqrt[4]{x-1} = \sqrt[4]{4x-3}$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích. Đặt $\begin{cases} \sqrt[4]{2x-1} = a \\ \sqrt[4]{x-1} = b \\ \sqrt[4]{4x-3} = c \end{cases} \quad (a,b,c \geq 0)$
Ta tìm mối liên hệ giữa các ẩn phụ:
$2x-1 = m(x-1) + n(4x-3) \Rightarrow \begin{cases} m+4n = 2 \\ m+3n = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -2 \\ n = 1 \end{cases}$, hay: $a^4 = -2b^4 + c^4$
Từ đó ta cần giải quyết hệ phương trình:
$\begin{cases} a - b = c \\ a^4 = -2b^4 + c^4 \end{cases} \Rightarrow (b+c)^4 = -2b^4 + c^4 \Rightarrow b^4 + 2b^3c + 3b^2c^2 + 2bc^3 = 0$
$\Leftrightarrow b\left(b^3 + 2b^2c + 3bc^2 + 2bc^2\right) = 0 \Leftrightarrow b = 0$ (do $a,b,c \geq 0$)

Ở phương trình này chúng ta cần chú ý đến lợi thế $(a,b,c \geq 0)$ Điều kiện $x \geq 1$. Đặt $\begin{cases} \sqrt[4]{2x-1} = a \\ \sqrt[4]{x-1} = b \\ \sqrt[4]{4x-3} = c \end{cases}$
$(a,b,c \geq 0) \Rightarrow a^4 = -2b^4 + c^4$
Từ đó ta có hệ:
$\begin{cases} a - b = c \\ a^4 = -2b^4 + c^4 \end{cases} \Rightarrow (b+c)^4 = -2b^4 + c^4 \Rightarrow b^4 + 2b^3c + 3b^2c^2 + 2bc^3 = 0$
$\Leftrightarrow b\left(b^3 + 2b^2c + 3bc^2 + 2bc^2\right) = 0 \Leftrightarrow b = 0$ (do $a,b,c \geq 0$)
Với $b = 0$, cho ta $x = 1$. Thử lại ta thấy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 1$. ■

Bình luận.
-Phương pháp dùng nhiều ẩn phụ đặc biệt hiệu quả với những phương trình chứa nhiều căn thức mà biểu thức dưới dấu căn thức là bậc nhất, đơn giản vì một nhị thức bậc nhất bất kỳ luôn biểu diễn được qua hai nhị thức bậc nhất khác.
-Chúng ta cũng cần lưu ý với những phương tình như trên được cho dưới dạng bậc nhất trá hình, ví dụ:
1) Giải phương trình: $\sqrt[3]{x^2+1}+\sqrt[3]{3x^2+1}=\sqrt[3]{(x-1)(x+1)}$
Thực ra phương trình này cũng giống ví dụ 1, nhưng đã được thay x bởi x^2
2) Giải phương trình: $\sqrt[4]{2x^2-2x-1}-\sqrt[4]{x^2-x-1}=\sqrt[4]{4x^2-4x-3}$
Thực ra phương trình này cũng giống với với dụ 2, nhưng đã được thay x bởi x^2-x
Tóm lại: Khi chúng ta quyết định sử dụng nhiều ẩn phụ cho việc giải phương trình vô tỷ, chúng ta cần đảm bảo rằng sẽ tìm được một biểu thức liên hệ giữa các ẩn phụ đó. Việc giải quyết phương trình nhiều ẩn phụ tùy thuộc vào mức độ khó dễ của bài toán được cho.

Ví dụ 5. Giải phương trình $\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{3x-1}}$.

✍ **Lời giải.**

Điều kiện $x>\dfrac{1}{2}$. Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{2x-1} \\ b=\sqrt{2x+1} \\ c=\sqrt{x+1} \\ d=\sqrt{3x-1} \end{cases}$ $(a,b,c,d>0)\Rightarrow a^2+b^2=c^2+d^2$

Từ đó ta có hệ:
$\begin{cases} \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d} \\ a^2+b^2=c^2+d^2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} cd\,(a+b)=ab\,(c+d) \\ a^2+b^2=c^2+d^2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} c^2d^2(a+b)^2=a^2b^2\,(c+d)^2 \\ a^2+b^2=c^2+d^2 \end{cases}$
Suy ra: $c^2d^2\,(a^2+b^2+2ab)=a^2b^2\,(c^2+d^2+2cd)$
$\Leftrightarrow (a^2+b^2)\,(a^2b^2-c^2d^2)+2abcd\,(ab-cd)=0$
$\Leftrightarrow (ab-cd)\,[(a^2+b^2)\,(ab+cd)+2abcd]=0$
$\Leftrightarrow ab=cd$ (do $a,b,c,d>0$)
Với $ab=cd$, ta có: $\sqrt{2x-1}.\sqrt{2x+1}=\sqrt{x+1}.\sqrt{3x-1}$
$\Leftrightarrow\begin{cases} x>\dfrac{1}{2} \\ 4x^2-1=(x+1)\,(3x-1) \end{cases}\Leftrightarrow x=2.$
Thử lại ta thấy, nghiệm của phương trình đã cho là $x=2$. ■

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

① Giải phương trình $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-4x+3}=2\sqrt{x^2-5x+4}$. Đáp số: $x=1$.
② Giải phương trình $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2x+4}=\sqrt{9+6x}$. Đáp số: $x=0$; $x=\dfrac{2}{3}$.
③ Giải phương trình $2\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{3x-2}=\sqrt[3]{5x-4}$. Đáp số: $x=1$.
④ Giải phương trình $\sqrt[3]{7x+1}-\sqrt[3]{x^2-x-8}+\sqrt[3]{x^2-8x-1}=2$. Đáp số: $x=0$; $x=\pm1$, $x=9$.
⑤ Giải phương trình $\dfrac{4}{x}+\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=x+\sqrt{2x-\dfrac{5}{x}}$. Đáp số: $x=2$.
⑥ Giải phương trình $\sqrt[4]{3\,(x+5)}+\sqrt[4]{3\,(3-x)}=\sqrt[4]{11-x}+\sqrt[4]{x+13}$. Đáp số: $x=-1$.
⑦ Giải phương trình $\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}=\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{\sqrt{4x-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{5x-2}}\right)$. Đáp số: $x=1$.

⑧ Giải phương trình $4x=\sqrt{30+\frac{1}{4}\sqrt{30+\frac{1}{4}\sqrt{30+\frac{1}{4}\sqrt{x+30}}}}$. Đáp số: $x=\frac{1+\sqrt{1921}}{32}$.

⑨ Giải phương trình $x=\sqrt{2-x}.\sqrt{3-x}+\sqrt{3-x}.\sqrt{5-x}+\sqrt{5-x}.\sqrt{2-x}$. Đáp số: $x=\frac{239}{120}$.

2 Vận dụng các hằng đẳng thức trong giải phương trình vô tỷ

Nhắc đến đại số người ta thường nghĩ ngay tới những hằng đẳng thức đáng nhớ, hằng đẳng thức theo suốt chiều dài toán học từ bậc THCS. Với phương trình vô tỷ, dáng dấp của hằng đẳng thức đáng nhớ trải đều khắp nơi, tuy nhiên trong mục này ta nhắc đến sự vận dụng linh hoạt các hằng đẳng thức để mang đến một cách nhìn tuy không mới nhưng chưa hẳn đã quen!

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sqrt{x+8}+\frac{9x}{\sqrt{x+8}}-6\sqrt{x}=0$.

✍ **Lời giải.**

Điều kiện $x\geq 0$. Phương tình đã cho tương đương với:

$\left(\sqrt{x+8}\right)^2-2.\left(3\sqrt{x}\right)\sqrt{x+8}+\left(3\sqrt{x}\right)^2=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+8}-3\sqrt{x}\right)^2=0$

$\Leftrightarrow\sqrt{x+8}=3\sqrt{x}\Leftrightarrow x=1$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$. ■

Nhận xét.

-Với cách làm này, bài toán được giải quyết một cách ngắn gọn, đẹp mắt và tự nhiên.

-Nếu đặt $\sqrt{x+8}=a$, $3\sqrt{x}=b$, ta nhận thấy rằng thực ra phương trình trên được khai triển từ hằng đẳng thức $(a-b)^2=0$.

Bài tập tương tự

① Giải phương trình $\sqrt{5x-1}+\frac{4x}{\sqrt{5x-1}}=4\sqrt{x}$.

② Giải phương trình $\sqrt{x^2+1}+\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}=2\sqrt{2x+1}$.

③ Giải phương trình $x+2+\sqrt{1-x}=2\sqrt{x+1+\sqrt{(x+1)(1-x)^2}}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $x^2-6x+29+2\sqrt{3x^2+10x+3}=(10-2x)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}\right)$.

✍ **Lời giải.**

Điều kiện $x\geq-\frac{1}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với:

$(x-5)^2+(x+3)+(3x+1)+2\sqrt{(x+3)(3x+1)}+2(x-5)\sqrt{x+3}+2(x-5)\sqrt{3x+1}=0$

Đặt $\begin{cases}\sqrt{x+3}=a\\ \sqrt{3x+1}=b\\ x-5=c\end{cases}$ $(a,b\geq 0)$. Phương trình đã cho trở thành

$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=0\Leftrightarrow(a+b+c)^2=0\Leftrightarrow a+b+c=0$.

Thay trở lại ta có phương trình $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}+x-5=0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+3}-2\right)+\left(\sqrt{3x+1}-2\right)+(x-1)=0$

$\Leftrightarrow\frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2}+\frac{3(x-1)}{\sqrt{3x+1}+2}+(x-1)=0$

$\Leftrightarrow(x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}+\frac{3}{\sqrt{3x+1}+2}+1\right)=0\Leftrightarrow x=1$.

Do $\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}+\frac{3}{\sqrt{3x+1}+2}+1>0,\ \forall x\geq\frac{-1}{3}$.

-Kết luận. Nghiệm của phương trình đã cho là $x=1$. ■

Nhận xét. Thực ra bài toán được khai triển từ hằng đẳng thức
$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$. với $a=\sqrt{x+3}$, $b=\sqrt{3x+1}$; $c=x-5$.

Bài tập tương tự

① Giải phương trình $x^2-3x+14+2\sqrt{2x^2+9x+4} = (6-2x)\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+1}\right)$. KQ. $x=0$.

② Giải phương trình $16x^2+19x+7+4\sqrt{-3x^2+5x+2} = (8x+2)\left(\sqrt{2-x}+2\sqrt{3x+1}\right)$. KQ. $x=1$.

> **Ví dụ 3.** Giải phương trình $(26-x)\sqrt{5x-1}-(13x+14)\sqrt{5-2x}+12\sqrt{(5x-1)(5-2x)} = 18x+32$
> (Chọn ĐT dự thi VMO 2013 – Lương Thế Vinh, Đồng Nai).

✍ **Lời giải.**

Điều kiện $x \geq 0$. Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{5x-1} \\ b=\sqrt{5-2x} \end{cases}$ $(a,b\geq 0)$. Phương trình đã cho trở thành
$(a^2+3b^2+12)\,a-(3a^2+b^2+12)\,b+12ab = 6\,(a^2+b^2)+8$
$\Leftrightarrow (a-b)^3-6\,(a-b)^2+12\,(a-b)-8=0 \Leftrightarrow (a-b-2)^2=0 \Leftrightarrow a-b-2=0$
Thay trở lại ta có $\sqrt{5x-1}-\sqrt{5-2x}=2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{5x-1}-1\right)+\left(1-\sqrt{5-2x}\right)=0$
$\dfrac{5\,(x-2)}{\sqrt{5x-1}+3}+\dfrac{2\,(x-2)}{1+\sqrt{5-2x}}=0 \Leftrightarrow (x-2)\left(\dfrac{5}{\sqrt{5x-1}+3}+\dfrac{2}{1+\sqrt{5-2x}}\right)=0$
$\Leftrightarrow x=2$. Do $\dfrac{5}{\sqrt{5x-1}+3}+\dfrac{2}{1+\sqrt{5-2x}}>0,\ \forall x\in\left[\dfrac{1}{5};\dfrac{5}{2}\right]$
Kết luận. Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$. ■

Nhận xét. Ta nhận thấy rằng, bản chất thực sự của bài toán là quá trình khai triển hằng đẳng thức $(a-b-2)^3=0$ với $a=\sqrt{5x-1}$; $b=\sqrt{5-2x}$.

Bài tập tương tự

1) Giải phương tình $(x+17)\sqrt{4-x}+(20-x)\sqrt{x+1}-9\sqrt{(4-x)(x+1)}=36$. KQ.$T=\{0;3\}$
2) Giải phương trình $(x+16)\sqrt{1-2x}+(16-5x)\sqrt{1+x}+6x=12\sqrt{(1-2x)(1+x)}+20$. KQ. $T=\left\{-\dfrac{8}{9};0\right\}$.

> **Ví dụ 4.** Giải phương trình $4x^2+(8x-4)\sqrt{x}-1=3x+2\sqrt{2x^2+5x-3}$.

✍ **Lời giải.**

Điều kiện $x\geq\dfrac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với:
$(2x-1)^2+2\,(2x-1)\,(2\sqrt{x})+4x=(2x-1)+2\sqrt{(2x-1)(x+3)}+(x+3)$
$\Leftrightarrow (2x-1+2\sqrt{x})^2=\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1+2\sqrt{x}=\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3} \\ 2x-1+2\sqrt{x}=-\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3}\right) \end{array}\right.$
+Với $2x-1+2\sqrt{x}=\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3}(1)$, ta có:
(1) $\Leftrightarrow \sqrt{2x-1}\left(\sqrt{2x-1}-1\right)+\left(2\sqrt{x}-\sqrt{x+3}\right)=0$
$\Leftrightarrow \dfrac{2\,(x-1)\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x-1}+1}+\dfrac{3\,(x-1)}{2\sqrt{x}+\sqrt{x+3}}=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(\dfrac{2\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x-1}+1}+\dfrac{3}{2\sqrt{x}+\sqrt{x+3}}\right)=0$
$\Leftrightarrow x=1$. Do $\dfrac{2\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x-1}+1}+\dfrac{3}{2\sqrt{x}+\sqrt{x+3}}>0$, $\forall x\geq\dfrac{1}{2}$.
+Với $2x-1+2\sqrt{x}=-\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3}\right)$ (2) , ta có:
$2x-1+2\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3}=0$ vô nghiệm, do

$2x-1+2\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3}=(2x-1)+2\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3}>0$, $\forall x\geq \frac{1}{2}$.

Kết luận. Phương trình có nghiệm duy nhất là $x=1$. ■

Nhận xét. Ta nhận thấy rằng, bản chất thực sự của bài toán là quá trình khai triển hằng đẳng thức $A^2-B^2=0$ với $A=(2x-1+2\sqrt{x})$; $B=\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+3}\right)$.

Bài tập tương tự

1) Giải phương trình $x^2+2x+2x\sqrt{x+3}=6\sqrt{1-x}+7$. Đáp số: $x=1$.

2) Giải phương trình $x^2+5x+4+(2x+4)\sqrt{x+5}=2\sqrt{(3-x)(x+2)}$. Đáp số: $x=-1$.

Ví dụ 5. Giải phương trình $(5x+8)\sqrt{2x-1}+7x\sqrt{x+3}=9x+18-(x+26)\sqrt{x-1}$.

✍ **Lời giải.**

Điều kiện $\begin{cases}\sqrt{2x-1}=a\\ \sqrt{x+3}=b\\ \sqrt{x-1}=c\end{cases}$ $(a,b,c\geq 0)$. Phương trình đã cho trở thành:

$(a^2+3b)\,a+(b^2+3a)\,b=27-27c+9c^2-c^3\Leftrightarrow (a+b)^3=(3-c)^3$

$\Leftrightarrow a+b=3-c\Leftrightarrow a+b+c-3=0$

Thay trở lại ta có: $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}-3=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x-1}-1\right)+\left(\sqrt{x+3}-2\right)+\sqrt{x-1}=0$

$\Leftrightarrow \frac{2(x-1)}{\sqrt{2x-1}+1}+\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}+\sqrt{x-1}=0\Leftrightarrow \sqrt{x-1}\left(\frac{2\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x-1}+1}+\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}-2}+1\right)=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}=0\Leftrightarrow x=1$. Do $\frac{2\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x-1}+1}+\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}-2}+1>0,\ \forall x\geq 1$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=1$. ■

Nhận xét. Ta nhận thấy rằng, bản chất thực sự của bài toán là quá trình khai triển hằng đẳng thức $A^3-B^3=0$ với $A=\left(\sqrt{2x-1}+2\sqrt{x+3}\right)$; $B=\left(3-\sqrt{x-1}\right)$.

Bài tập tương tự

1) Giải phương trình $(7x+19)\sqrt{x+1}+(9+5x)\sqrt{2x+6}=27x+63-(3x+31)\sqrt{3x+4}$. KQ. $x=-1$.

2) Giải phương trình $64x^3+36x^2+33x+7=(48x^2+23x+5)\sqrt{2-x}+(24x+8)\sqrt{3x+1}$. KQ.$x=1$.

Bình luận. Qua các ví dụ trên, ta có thể nhận thấy rằng một bài toán với lời giải sử dụng hằng đẳng thức luôn cho những điều bất ngờ và thú vị.

-Một bài toán tưởng chừng rất khó, lại được giải quyết một cách đơn giản và tự nhiên từ việc đoán nhận rằng phương trình đó được triển khai từ hằng đẳng thức. Nhưng cũng có những bài toán nhìn rất khó với cách làm này lại được giải một cách đơn giản bằng một phương pháp khác.

-Tuy nhiên khi sử dụng khai triển hằng đẳng thức để "chế đề" ta có thể gửi gắm được nhiều ý đồ giải toán trong đó. Và chung quy lại, một bài toán nói riêng và một phương trình vô tỷ nói chung thường có nhiều cách giải quyết (Chúng ta sẽ tìm hiểu thêm ở chương 2) và để giải quyết nó chúng ta cần có những cái nhìn bao quát nhất về các phương pháp giải toán.

Ví dụ 6. Giải phương trình $2x^2-11x+21-3\sqrt[3]{4x-4}=0$ (VMO – 1995. Bảng B)

✍ **Lời giải.**

-Phân tích.

-Ta nhận định phương trình đã có nghiệm duy nhất $x=3$ (có thể sử dụng sự hỗ trợ từ máy tính bỏ túi), từ đó chúng ta nảy sinh ý tưởng đánh giá xoay quanh giá trị $x=3$.

-Lại có: $2x^2-11x+21-3\sqrt[3]{4x-4}=2(x-3)^2+\left(x+3-3\sqrt[3]{4x-4}\right)$ và nếu chúng ta chứng minh được rằng: $\left(x+3-3\sqrt[3]{4x-4}\right)\geq 0$ bài toán sẽ được giải quyết, mà: $\left(x+3-3\sqrt[3]{4x-4}\right)\geq 0\Leftrightarrow x+3\geq 3\sqrt[3]{4x-4}\Leftrightarrow (x-3)^2(x+15)\geq 0(*)$, lúc này (*) chỉ đúng với $x\geq -15$.

-Từ đó ý tưởng xử lý vấn đề này là sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình để làm 'hẹp' khoảng có nghiệm.
Thật vậy: PT $\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{4x-4}=2x^2-11x+21>0 \Rightarrow 3\sqrt[3]{4x-4}>0 \Rightarrow x>1$.
Và $\forall x>1$ thì (*) hiển nhiên đúng. Phương trình đã cho tương đương với: $2\left(x-3\right)^2+\left(x+3-3\sqrt[3]{4x-4}\right)=0$
Từ phương trình ban đầu ta có:
$3\sqrt[3]{4x-4}=2x^2-11x+21>0 \Rightarrow 3\sqrt[3]{4x-4}>0 \Rightarrow x>1$.
Mà: $\left(x+3-3\sqrt[3]{4x-4}\right)\geq 0 \Leftrightarrow x+3\geq 3\sqrt[3]{4x-4} \Leftrightarrow \left(x-3\right)^2\left(x+15\right)\geq 0$ luông đúng $\forall x>1$
Từ đó: $2\left(x-3\right)^2+\left(x+3-3\sqrt[3]{4x-4}\right)\geq 0$, dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $x=3$.
Hay phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=3$.
Chú ý: Trong một số bài toán việc sử dụng điều kiện có nghĩa là chưa đủ để chúng ta sử dụng đánh giá trong phương trình, từ đó ta nghĩ đến phương án tìm điều kiện có nghiệm của phương trình đó.
Bổ đề: Xét phương trình: $f(x)=g(x)$, $x\in D(*)$.
-Nếu $f(x)\geq m$, $\forall x\in D$, thì để phương trình (*) có nghiệm ta cần phải có $g(x)\geq m$.
-Nếu $f(x)\leq M$, $\forall x\in D$, thì để phương trình (*) có nghiệm ta cần phải có $g(x)\leq M$.

Ví dụ 7. Giải phương trình $\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}=\sqrt[3]{1+3x}+\sqrt[3]{1-3x}$.

Lời giải.
-Phân tích. Bài toán nhìn có dáng dấp của hàm số, tuy nhiên phương pháp sử dụng hàm số với bài toán này là không đơn giản. Ta có thể liên tưởng đến việc sử dụng đánh giá để thay thế.
Xét các bất phương trình:
$\sqrt{1+2x}\geq\sqrt[3]{1+3x}\Leftrightarrow\left(1+2x\right)^3\geq\left(1+3x\right)^2\Leftrightarrow x^2\left(3+8x\right)\geq 0$
$\sqrt{1-2x}\geq\sqrt[3]{1-3x}\Leftrightarrow\left(1-2x\right)^3\geq\left(1-3x\right)^2\Leftrightarrow x^2\left(3-8x\right)\geq 0$
Với điều kiện xác định $x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ không làm các bất phương trình trên nghiệm đúng, từ đó ta nảy sinh ý tưởng làm hẹp khoảng đánh giá này bằng cách sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình.
Thật vậy:
Đặt $\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}=\sqrt[3]{1+3x}+\sqrt[3]{1-3x}=u$, ta có:
$u^2=2+2\sqrt{1-4x^2}\geq 2\Rightarrow u\geq\sqrt{2}$
$u=\sqrt[3]{1+3x}+\sqrt[3]{1-3x}\ \left(u\geq\sqrt{2}\right)\Rightarrow u^3=2+3.u\sqrt[3]{1-9x^2}$
$\Rightarrow\sqrt[3]{1-9x^2}=\dfrac{u^3-2}{3u}>0\Rightarrow -\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{1}{3}$
Rõ ràng $\forall x\in\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ các bất phương trình trên nghiệm đúng. Đặt $\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}=\sqrt[3]{1+3x}+\sqrt[3]{1-3x}=u$, ta có:
$u^2=2+2\sqrt{1-4x^2}\geq 2\Rightarrow u\geq\sqrt{2}$
$u=\sqrt[3]{1+3x}+\sqrt[3]{1-3x}\ \left(u\geq\sqrt{2}\right)\Rightarrow u^3=2+3.u\sqrt[3]{1-9x^2}$
$\Rightarrow\sqrt[3]{1-9x^2}=\dfrac{u^3-2}{3u}>0\Rightarrow -\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{1}{3}$
Suy ra các bất phương trình sau đây nghiệm đúng $\forall x\in\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$
$\sqrt{1+2x}\geq\sqrt[3]{1+3x}\Leftrightarrow\left(1+2x\right)^3\geq\left(1+3x\right)^2\Leftrightarrow x^2\left(3+8x\right)\geq 0$
$\sqrt{1-2x}\geq\sqrt[3]{1-3x}\Leftrightarrow\left(1-2x\right)^3\geq\left(1-3x\right)^2\Leftrightarrow x^2\left(3-8x\right)\geq 0$
Hay: $\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}\geq\sqrt[3]{1+3x}+\sqrt[3]{1-3x}$, $\forall x\in\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$. Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $x=0$.
-Kết luận. Phương trình có nghiệm duy nhất $x=0$.
Bình luận. Phương pháp đánh giá này, chúng ta vẫn thường gọi là đánh giá "nhỏ" nó được thể hiện rõ nét nhất trong sự kết hợp với phương pháp nhân liên hợp (xem chương sau). Cái khó khăn trong phương pháp chính là sự tinh tế và kinh nghiệm "đọc bài toán" của những người giải toán. Và để rèn luyện khả năng đánh giá "nhỏ" mời các bạn cúng làm một số bài tập.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

1. Giải phương trình $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+8}=-x^3+1$. Đáp số: $x=0$.
2. Giải phương trình $\sqrt{\dfrac{6}{3-x}}+\sqrt{\dfrac{8}{2-x}}=6$ (TH&TT) Đáp số: $x=\dfrac{3}{2}$.
3. Giải phương trình $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+\sqrt{7x+2}}=4$. Đáp số: $x=1$.
4. Giải phương trình $\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+1}=\sqrt[3]{2x^2+1}+\sqrt[3]{2x^2}$. KQ: $x=-\dfrac{1}{2}$; $x=1$.
5. Giải phương trình $2x-3+\dfrac{3x-1}{\sqrt{3-2x^2}+2-x}=0$. Đáp số: $x=1$.
6. Giải phương trình $\sqrt{5-x^6}-\sqrt[3]{3x^4-2}=1$. Đáp số: $x=\pm1$.
7. Giải phương trình $2(x+2)=\sqrt{x-1}+2\sqrt{4-x^2}$. Đáp số: Vô nghiệm.
8. Giải phương trình $(1+x)^2\sqrt[4]{x^2+x+14}+(1-x)^2\sqrt[4]{x^2-x+14}=8$. Đáp số: $x=\pm1$.
9. Giải phương trình $\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x-x^2+1}=x^2-x+2$. Đáp số: $x=1$.
10. Giải phương trình $\sqrt{x^4-5x^2+4}+2x=\sqrt{4x^4-16x^2}+\sqrt{x^2-1}$. Đáp số: $x=\sqrt{5}$.
11. Giải phương trình $x+\sqrt{x}+2\left(\dfrac{1}{x}-1\right)\left(1+\sqrt{2x-1}\right)=2$. Đáp số: $x=1$.

3 Sử dụng các bất đẳng thức kinh điển

Các bất đẳng thức thường dùng.

+Bất đẳng thức AM – GM (bất dẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân).

-Cho 2 số không âm a, b: $\sqrt{ab}\le\dfrac{a+b}{2}\ (a,b\ge0)$

Dấu '=' xảy ra $\Leftrightarrow a=b$.

-Cho 3 số không âm a, b, c: $\sqrt[3]{abc}\le\dfrac{a+b+c}{3}\ (a,b,c\ge0)$

Dấu '=' xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

-Cho n số không âm: $\sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}\le\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$

Dấu '=' xảy ra $\Leftrightarrow a_1=a_2=...=a_n$.

+Bất đẳng thức Cauchy – Bunhiakowski – Schwarz (CBS)

-Với bộ 4 số thực a,b,x,y ta có:

$|ax+by|\le\sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}$. Dấu '=' xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}$.

$ax+by\le|ax+by|\le\sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}$. Dấu '=' xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}\ge0$.

-Với bộ 2n số $a_1,a_2,...,a_n;\ b_1,b_2,...,b_n$

$|a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n|\le\sqrt{(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2)}$.

Dấu '=' xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=...=\dfrac{a_n}{b_n}$

$a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\le|a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n|\le\sqrt{(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2)}$.

Dấu '=' xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=...=\dfrac{a_n}{b_n}\ge0$.

+Thông thường việc giải phương trình bằng sử dụng bất đẳng thức chỉ dành riêng cho học sinh giỏi toán, nó dựa trên cơ sở vốn có về Bất Đẳng Thức của họ cũng như dựa trên những kinh nghiệm giải toán riêng của từng người làm cơ sở lý luận.

+Bài viết này tôi không thiên nhiều về đối tượng học sinh giỏi, mà muốn sử dụng cơ sở là việc kiểm tra phương trình trên máy tính CaSiO để phán đoán một bài toán nên hay không nên sử dụng bất đẳng thức.

-Yêu cầu. Đọc bài 'Sự hỗ trợ của máy tính CaSiO trong giải phương trình vô tỷ'.

Kiểu 1. ĐÁNH GIÁ GIÁN TIẾP

Ví dụ 1. Giải phương trình $x^3-3x^2-8x+40-8\sqrt[4]{4x+4}=0$ (VMO – 1995 – bảng A)

✍ **Lời giải.**

-Phân tích.
-Sử dụng máy tính CaSiO ta kiểm tra các giá trị của hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 8x + 40 - 8\sqrt[4]{4x+4}$, ta nhận thấy: $f(x) \geq 0$, $f(3) = 0$ đồng thời các giá trị này khá lớn, điều đó chứng tỏ bất đẳng thức $x^3 - 3x^2 - 8x + 40 \geq 8\sqrt[4]{4x+4}$ là không chặt. Từ đó ta có thể sử dụng đánh giá qua một đại lượng trung gian.
-Nhận thấy $x = 3$ là nghiệm, đồng thời sự xuất hiện của đại lượng $8\sqrt[4]{4x+4}$ giúp chúng ta nhận ra sự xuất hiện của bất đẳng thức AM – GM trong trường hợp này là khả thi.
-Ta có: $8\sqrt[4]{4x+4} = 2.2.2\sqrt[4]{4x+4} \underset{AM-GM}{\leq} \dfrac{2^4 + 2^4 + 2^4 + 4x + 4}{4} = x + 13$, từ đó nếu chúng ta chứng minh được $x^3 - 3x^2 - 8x + 40 \geq x + 13$, $\forall x \geq -1$ bài toán sẽ được giải quyết.
Thật vậy: $x^3 - 3x^2 - 9x + 27 \geq 0 \Leftrightarrow (x-3)^2(x+3) \geq 0$ luôn đúng $\forall x \geq -1$. Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:
$8\sqrt[4]{4x+4} = 2.2.2\sqrt[4]{4x+4} \underset{AM-GM}{\leq} \dfrac{2^4 + 2^4 + 2^4 + 4x + 4}{4} = x + 13$.
Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $x = 3$.
Ta sẽ chứng minh: $x^3 - 3x^2 - 8x + 40 \geq x + 13$,$\forall x \geq -1$ (*)
Thật vậy: $(*) \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 9x + 27 \geq 0 \Leftrightarrow (x-3)^2(x+3) \geq 0$ luông đúng với mọi $x \geq -1$. Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $x = 3$.

Từ đó ta có: $\begin{cases} 8\sqrt[4]{4x+4} \leq x + 13 \\ x^3 - 3x^2 - 8x + 40 \geq x + 13 \end{cases}$

$$\Rightarrow x^3 - 3x^2 - 8x + 40 = 8\sqrt[4]{4x+4} \Leftrightarrow \begin{cases} 8\sqrt[4]{4x+4} = x + 13 \\ x^3 - 3x^2 - 8x + 40 = x + 13 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Hay phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 3$. ■

Ví dụ 2. Giải phương trình $\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x} = x^2 - 10x + 27$ (TH&TT)

Lời giải.
-Bình luận. Đây là một bài toán quen thuộc với rất nhiều bạn, nó xuất hiện ở hầu hết các tài liệu bạn đọc được. Nếu hỏi làm thế nào? Nhiều người sẽ nói bạn nghe! Nhưng chúng ta lại hỏi vì sao lại làm vậy?
-Trước hết ta kiểm tra được rằng $f(x) = \sqrt{x-4} + \sqrt{6-x} - (x^2 - 10x + 27) < 0$ trong bảng TABLE của máy tính CaSiO, nhận thấy các giá trị này không quá gần với 0 (nghĩa là không có dạng 0.0000000000001 chẳng hạn) hay nói cách khác bất đẳng thức này $\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x} \leq (x^2 - 10x + 27)$ không chặt. Từ đó ta phán đoán có thể sử dụng đánh giá nó qua đại lượng trung gian.
-Thứ hai: tất nhiên là sự xuất hiện của căn thức $\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}$ làm chúng ta nhắc nhớ đến bất đẳng thức quen thuộc CBS và lưu ý rằng phương trình có nghiệm $x = 5$. Điều kiện $4 \leq x \leq 6$.
Áp dụng bất đẳng thức CBS ta có: $\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x} \leq \sqrt{(1+1)(x-4+6-x)} = 2$
Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $x = 5$.
Ta sẽ chứng minh: $x^2 - 10x + 27 \geq 2$, thật vậy: $x^2 - 10x + 27 \geq 2$ $(x-5)^2 \geq 0$, đúng với mọi $x \in [4; 6]$
Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $x = 5$.
Hay nói cách khác phương trình có nghiệm duy nhất $x = 5$. ■

Ví dụ 3. Giải phương trình $\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{-x^2 + x + 1} = x^2 - x + 2$

Lời giải.
-Phân tích. Ta nhận thấy được các vấn đề:
-Bất đẳng thức $\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{-x^2 + x + 1} \leq x^2 - x + 2$ không chặt.

-Nghiệm của phương trình $x = 1$.

-$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ có thể dùng CBS (tất nhiên dùng AM – GM cũng chẳng sao) Điều kiện $\begin{cases} x^2+x-1 \geq 0 \\ -x^2+x+1 \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \leq x \leq \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

Áp dụng bất đẳng thức CBS ta có:

$\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{-x^2+x+1} \leq \sqrt{(1+1)\left[(x^2+x-1)+(-x^2+x+1)\right]} = 2\sqrt{x}$

Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Ta sẽ chứng minh: $x^2-x+2 \geq 2\sqrt{x}$, thật vậy:

$x^2-x+2 \geq 2\sqrt{x} \Leftrightarrow (x-1)^2+\left(\sqrt{x}-1\right)^2 \geq 0$ luôn đúng với mọi x. Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Hay phương trình đã cho có nghiệm $x = 1$. ■

Ví dụ 4. Giải phương trình $2x^3+2x^2+1 = \sqrt{1+2x}.\sqrt[3]{1-3x}$.

✍ Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\dfrac{1}{2}$. Với điều kiện đó ta có $2x^3+2x^2+1 = 2x^2(x+1)+1 > 0$,

Suy ra $\sqrt{1+2x}.\sqrt[3]{1-3x} > 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{1-3x} > 0$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\begin{cases} 1.\sqrt{1+2x} \leq \dfrac{1+(1+2x)}{2} \\ 1.1.\sqrt[3]{1-3x} \leq \dfrac{1+1+(1-3x)}{3} \end{cases} \Rightarrow 0 < \sqrt{1+2x}.\sqrt[3]{1-3x} \leq (1+x)(1-x)$$

Ta sẽ chứng minh: $2x^3+2x^2+1 \geq (1+x)(1-x)$ (*). Thật vậy:

$(*) \Leftrightarrow 2x^3+3x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2(2x+3) \geq 0$ đúng với mọi $x \geq -\dfrac{1}{2}$ hay (*) được chứng minh. Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

-Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$. ■

Ví dụ 5. Giải phương trình $\dfrac{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}}{x+5+\sqrt{2(x^2+1)}} = \sqrt{(1-x)^3}+\dfrac{3-2\sqrt{x}}{2}$.

✍ Lời giải.

Điều kiện $0 \leq x \leq 1$. Áp dụng bất đẳng thức CBS ta có:

$x+5+\sqrt{2(x^2+1)} \geq (x+5)+\sqrt{(x+1)^2} = 2x+6$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta lại có:

$$\begin{cases} 2.\sqrt{3x+1} \leq \dfrac{4+3x+1}{2} \\ 2\sqrt{x+3} \leq \dfrac{4+x+3}{2} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3} \leq \dfrac{5+3x+7+x}{4} = x+3$$

Do đó: $\dfrac{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}}{x+5+\sqrt{2(x^2+1)}} \leq \dfrac{x+3}{2x+6} = \dfrac{1}{2}$

Ta sẽ chứng minh: $\sqrt{(1-x)^3}+\dfrac{3-2\sqrt{x}}{2} \geq \dfrac{1}{2}, \forall x \in [0;1]$, thật vậy:

$\sqrt{(1-x)^3}+\dfrac{3-2\sqrt{x}}{2} \geq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{(1-x)^3}+(1-\sqrt{x}) \geq 0$, luôn đúng với mọi $x \in [0;1]$. Dấu '=' xảy ra tại các bất đẳng thức là $x = 2$. Do đó phương trình có nghiệm $x = 2$. ■

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

① Giải phương trình $\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x} = 3x^2-12x+14$. Đáp số: $x = 2$.

② Giải phương trình $3x+\sqrt[4]{2-x^4}=3+x^2$. Đáp số: $x=1$.
③ Giải phương trình $\sqrt{4x-x^3}+\sqrt{x+x^3}=3\sqrt[4]{3}$. Đáp số: $x=\sqrt{3}$.
④ Giải phương trình $13\sqrt{x^2-x^4}+9\sqrt{x^2+x^4}=16$. Đáp số: $x=\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.
⑤ Giải phương trình $2.\sqrt[4]{27x^2+24x+\dfrac{28}{3}}=1+\sqrt{\dfrac{27}{2}x+6}$. Đáp số: $x=\dfrac{2}{9}$.
⑥ Giải phương trình $3\left(x^3+\dfrac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\right)+2=\sqrt{(1+x)^3}+\sqrt{(1-x)^3}$.
⑦ Giải phương trình $\dfrac{1}{1+\sqrt{1+x}}+\dfrac{x}{1+\sqrt{1+2x}}+\dfrac{1}{1+\sqrt{1+3x}}=1$. Đáp số: $x=0$.
⑧ Giải phương trình $\sqrt{3x^3+2x^2+2}+\sqrt{-3x^3+x^2+2x-1}=2x^2+2x+2$. Đáp số: $x=-1$. (Chọn ĐT dự thi VMO 2013 – ĐHSP Hà Nội).
⑨ Giải phương trình $\dfrac{1}{1+\sqrt{1+x}}+\dfrac{x}{1+\sqrt{1+2x}}+\dfrac{1}{1+\sqrt{1+3x}}=1$. Đáp số: $x=0$.
⑩ Giải phương trình $(26-x)\sqrt{5x-1}-(13x+14)\sqrt{5-2x}+12\sqrt{(5x-1)(5-2x)}=18x+32$. (Chọn ĐT dự thi VMO 2013 – Lương Thế Vinh, Đồng Nai). Đáp số: $x=-1$.

Kiểu 2. ĐÁNH GIÁ TRỰC TIẾP

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}=x$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích. Kiểm tra hàm số $f(x)=\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}-x$, $x\ge 1$ bằng bảng TABLE của máy tính CaSiO – Xem bài sự hỗ trợ của máy tính CaSiO. Ta nhận thấy $f(x)=\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}-x<0$, đồng thời các giá trị này của $f(x)$ rất gần với 0, điều này chứng tỏ bất đẳng thức sử dụng trong bài là khá chặt. Việc sử dụng đánh giá gián tiếp là không nên sử dụng.
-Nhân tử của bài toán là (x^2-x-1), khi đó: $\dfrac{1}{x}=x-1$-(Xem bài sự hỗ trợ của máy tính CaSiO), nên sử dụng bất đẳng thức trung bình cộng và trung bình nhân ta có:

$$1.\sqrt{x-\frac{1}{x}}\underset{AM-GM}{\le}\frac{1+x-\frac{1}{x}}{2}(1);\ \sqrt{1-\frac{1}{x}}=\sqrt{\frac{1}{x}(x-1)}\underset{AM-GM}{\le}\frac{\frac{1}{x}+x-1}{2}(2)$$

Cộng (1) và (2) ta được điều mình cần. Điều kiện $x\ge 1$. $\begin{cases}\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}\underset{AM-GM}{\le}\dfrac{1+x-\frac{1}{x}}{2}\\ \sqrt{1-\dfrac{1}{x}}=\sqrt{\dfrac{1}{x}(x-1)}\underset{AM-GM}{\le}\dfrac{\frac{1}{x}+x-1}{2}\end{cases}$

$$\Rightarrow VT=\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\le\frac{1+x-\frac{1}{x}}{2}+\frac{\frac{1}{x}+x-1}{2}=x=VP$$

Dấu '=' xảy ra kh và chỉ khi $\begin{cases}x^2-x-1=0\\ x\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

Vậy nghiệm của phương tình đã cho là $x=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$. ■

Ví dụ 2. Giải phương trình $\sqrt[4]{\frac{1}{2}+x}+\sqrt[4]{\frac{3}{2}-x}+\sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}+x\right)\left(\frac{3}{2}-x\right)}=3.$

Lời giải.

-Phân tích.

-Chúng ta dễ dàng kiểm chứng được $\sqrt[4]{\frac{1}{2}+x}+\sqrt[4]{\frac{3}{2}-x}+\sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}+x\right)\left(\frac{3}{2}-x\right)}\leq 3$, đồng thời đây là một bất đẳng thức chặt. Nghiệm của phương trình là $x=\frac{1}{2}$.

-Đồng thời sự xuất hiện của các đại lượng $\sqrt{a}+\sqrt{b}$; $\sqrt{ab}$ làm ta liên tưởng ngay đến hai bất đẳng thức quen thuộc AM – GM và CBS. Điều kiện $-\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{3}{2}$. Theo bất đẳng thức AM – GM:

$\left(\frac{1}{2}+x\right)\left(\frac{3}{2}-x\right)\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+x+\frac{3}{2}-x\right)^2\leq 1\Rightarrow\sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}+x\right)\left(\frac{3}{2}-x\right)}\leq 1$

Theo bất đẳng thức CBS

$\sqrt[4]{\frac{1}{2}+x}+\sqrt[4]{\frac{3}{2}-x}\leq\sqrt{2\left(\sqrt{\frac{1}{2}+x}+\sqrt{\frac{3}{2}-x}\right)}\leq 2$

Suy ra $VT=\sqrt[4]{\frac{1}{2}+x}+\sqrt[4]{\frac{3}{2}-x}+\sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}+x\right)\left(\frac{3}{2}-x\right)}\leq 3$

Nên VT=VP $\Leftrightarrow\frac{1}{2}+x=\frac{3}{2}-x=1\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$. Hay phương trình có nghiệm duy nhất $x=\frac{1}{2}$. ■

Ví dụ 3. Giải phương trình $x\sqrt{x^2+x-2}+3x\sqrt{x^5-1}=\sqrt{(x^2+3)(3x^7-2x^2+x-2)}$.

Lời giải.

Điều kiện $x\geq 1$. Áp dụng bất đẳng thức CBS, ta có:

$x\sqrt{x^2+x-2}+3x\sqrt{x^5-1}\leq\sqrt{\left[(x^2+x-2)+\left(\sqrt{3}x\right)^2(x^5-1)\right]\left[x^2+\left(\sqrt{3}\right)^2\right]}$

$\Rightarrow x\sqrt{x^2+x-2}+3x\sqrt{x^5-1}\leq\sqrt{(x^2+3)(3x^7-2x^2+x-2)}$

Dấu '=' xảy ra $\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x^2+x-2}}{x}=\frac{\sqrt{3}x.\sqrt{x^5-1}}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\sqrt{x^2+x-2}=x^2\sqrt{x^5-1}$

$\Leftrightarrow x^9-x^4-x^2-x+2=0(*)$

Xét hàm số $f(x)=x^9-x^4-x^2-x+2$, $\forall x\geq 1$. Ta có:

$f'(x)=9x^8-4x^3-2x-1=2x^8+4x^3(x^5-1)+2x(x^7-1)+(x^8-1)>0$, $\forall x\geq 1$.

Suy ra phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x=1$.

-Kết luận. Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$. ■

Ví dụ 4. Giải phương trình $\sqrt{x+1}+\frac{4\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}\right)}{3\left(\sqrt{x-2}+1\right)^2}=3$

Lời giải.

Điều kiện $x\geq 2$. Ta có $\sqrt{x+1}>\sqrt{x-2}$, $\forall x\geq 2$, từ đó phương trình tương đương với $\sqrt{x+1}+\frac{4}{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}\right)\left(\sqrt{x-2}+1\right)^2}=3$.

Đặt $\sqrt{x+1}=a$; $\sqrt{x-2}=b$ $(a>b\geq 0)$. Ta có phương trình $a+\frac{4}{(a-b)(b+1)^2}=3$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho ta $a+\frac{4}{(a-b)(b+1)^2}+1=(a-b)+\left(\frac{b+1}{2}\right)+\left(\frac{b+1}{2}\right)+$

$\dfrac{4}{(a-b)(b+1)^2} \geq 4\sqrt[4]{(a-b)\left(\dfrac{b+1}{2}\right)^2 \cdot \dfrac{4}{(a-b)(b+1)^2}} = 4$ hay: $a + \dfrac{4}{(a-b)(b+1)^2} \geq 3$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$.

Thay trở lại ta tìm được $x = 3$. Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 3$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

① Giải phương trình $\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2 - \dfrac{1}{x^2}} = 4 - \left(x + \dfrac{1}{x}\right)$. Đáp số: $x = 1$.

② Giải phương trình $\sqrt[4]{1-x^2} + \sqrt[4]{1+x} + \sqrt[4]{1-x} = 3$. Đáp số: $x = 0$.

③ Giải phương trình $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x} = \sqrt{x+9}$. Đáp số: $x = \dfrac{1}{7}$.

④ Giải phương trình $\sqrt{8-x^2} + \sqrt{\dfrac{x^2-2}{2x^2}} = 5 - \dfrac{1+x^2}{x}$. Đáp số: $x = 2$.

⑤ Giải phương trình $\sqrt{4-x} + \sqrt{10-3x} = \left(\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x}\right)\sqrt{7-2x}$. Đáp số: $x = 3$.

⑥ Giải phương trình $x^3 + 2\sqrt{(2x+1)^3} = 3x^2 + 6x + 2$. Đáp số: $x = 0$.

⑦ Giải phương trình $\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+3x}\right)\sqrt{1+2x} = 2\sqrt{1+4x}$. Đáp số: $x = 0$.

⑧ Giải phương trình $\sqrt[4]{(x-2)(4-x)} + \sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x} = x^3 - 6x\sqrt{3x} + 30$. Đáp số: $x = 3$.

4 Sử dụng tính đơn điệu của hàm số

paragraph Đánh giá dựa vào miền giá trị của hàm số

Tính chất. Nếu hàm số $y = f(x)$, $x \in D$ đơn điệu trên khoảng $(a,b) \in D$ và $f(x_0) = 0$, $x_0 \in (a,b)$ thì $x = x_0$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x) = 0$.

Chú ý. $y = \sqrt[n]{u(x)} \Rightarrow y' = \dfrac{u'(x)}{n\sqrt[n]{u^{n-1}(x)}}$.

Ví dụ 5. Giải phương trình $3x^7 - \sqrt{5-4x} = 3 - x^3$.

✍ **Lời giải.**

Điều kiện $x \leq \dfrac{5}{4}$.

Phương trình đã cho tương đương với: $3x^7 + x^3 - \sqrt{5-4x} - 3 = 0$

Xét hàm số: $f(x) = 3x^7 + x^3 - \sqrt{5-4x} - 3 = 0$, $x \in \left(-\infty; \dfrac{5}{4}\right]$, ta có:

$f'(x) = 21x^6 + 3x^2 + \dfrac{2}{\sqrt{5-4x}} > 0, \forall x < \dfrac{5}{4}$ đồng thời $f(x)$ liên tục trên $\left(-\infty; \dfrac{5}{4}\right]$ và $f(1) = 0$

Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bình luận. Khi chúng ta thông thạo các phép tính đạo hàm, ta có thể sử dụng phương pháp này để giải một phương trình vô tỷ. Tuy nhiên câu hỏi thường được đặt ra là: Khi nào chúng ta nên sử dụng phương pháp này? Làm sao để biết phương pháp này là sử dụng được?

-Thông thường khi chúng ta gặp những phương trình vô tỷ chứa $u^n(x)$, hay $\sqrt[n]{u(x)}$ mà $n \geq 4$, ta thường nghĩ đến vấn đề sử dụng hàm số để giải toán. Bởi đó là cách nhanh gọn nhất để tiếp cận với nghiệm của phương trình vô tỷ.

-Để biết được bài toán nào hiệu quả với phương pháp hàm số, chúng ta cần đoán biết được nghiệm của phương trình, đồng thời kiểm tra một số khoảng trong miền nghiệm khi cần thiết để xem sự tăng hay giảm của miền giá trị. Các bạn có thể đọc bài “Sự hỗ trợ của máy tính CaSiO trong giải phương trình vô tỷ” để tìm hiểu thêm về vấn đề này.

Ví dụ 6. Giải phương trình $3\sqrt[4]{3-2x}+\dfrac{5}{\sqrt{2x-1}}-2x^3=6$.

Lời giải.
Điều kiện $\dfrac{1}{2}<x\le\dfrac{3}{2}$.
Xét hàm số $f(x)=3\sqrt[4]{3-2x}+\dfrac{5}{\sqrt{2x-1}}-2x^3-6,\ x\in\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right]$
Ta có: $f'(x)=\dfrac{-6}{\sqrt[4]{(3-2x)^3}}-\dfrac{5}{\left(\sqrt{2x-1}\right)^3}-6x^2<0,\ \forall x\in\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$. Lại có $f(1)=0$
Suy ra phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$. ■

Ví dụ 7. Giải phương trình $x^2=\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}+12$.

Lời giải.
Điều kiện $-5\le x\le 5$.
Xét hàm số $f(x)=x^2-\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}-12,\ x\in[-5;5]$, ta có:
$f'(x)=2x-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{5+x}}-\dfrac{1}{\sqrt{5-x}}\right)=2x+\dfrac{x}{\sqrt{25-x^2}\left(\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}\right)}$
$\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$. Từ đó ta có bảng biến thiên:
Nhìn vào bảng biến thiên, suy ra phương trình $f(x)=0$ chỉ có 2 nghiệm. Mà $f(-4)=f(4)=0$. Nên 2 nghiệm đó là: $x=-4;\ x=4$. ■

Bình luận. Chúng ta hoàn toàn có thể sử dụng phương pháp hàm số trong trường hợp giải được phương trình $f'(x)=0$ hoặc nhận định được dấu của $f''(x)$.

Ví dụ 8. Giải phương trình $2x^2-11x+21-3\sqrt[3]{4x-4}=0$ (VMO – 1995. Bảng B)

Lời giải.
Xét hàm số $f(x)=2x^2-11x+21-3\sqrt[3]{4x-4}$, ta có:
$f'(x)=4x-11-\dfrac{4}{\sqrt[3]{(4x-4)^2}}\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow 4x-11=\dfrac{4}{\sqrt[3]{(4x-4)^2}}\Rightarrow x>\dfrac{11}{4}$.
Lại có: , $\forall x>\dfrac{11}{4}$ và $f'(3)=0$ suy ra phương trình $f'(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x=3$.
Ta có bảng biến thiên:
Từ bảng biến thiên ta thấy: $\underset{\left(\frac{11}{4};+\infty\right)}{Min} f(x)=f(3)=0$. Do đó phương trình $f(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x=3$. ■

Nhận xét: Việc sử dụng bảng biến thiên thực sự hữu hiệu với những bài toán được chia ra nhiều khoảng xác định. Ta xét các ví dụ sau:

Ví dụ 9. Giải phương trình $\sqrt{3x-8}-\sqrt{x+1}=\dfrac{5}{2x-11}$.

Lời giải.
Điều kiện $\begin{cases} x\ge\dfrac{8}{3}\\ x\ne\dfrac{11}{2}\end{cases}$
Ta có $\sqrt{3x-8}-\sqrt{x+1}=\dfrac{5}{2x-11}\Leftrightarrow\sqrt{3x-8}-\sqrt{x+1}-\dfrac{5}{2x-11}=0$.

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{3x-8} - \sqrt{x+1} - \dfrac{5}{2x-11}$ có: $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x-8}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} + \dfrac{10}{(2x-11)^2}$
$= \dfrac{3\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-8}}{2\sqrt{(3x-8)(x+1)}} + \dfrac{10}{(2x-11)^2} = \dfrac{6x+17}{2\left(3\sqrt{x+1}+\sqrt{3x-8}\right)\sqrt{(3x-8)(x+1)}} + \dfrac{10}{(2x-11)^2} > 0$
Từ đó ta có bảng biến thiên:
Từ bảng biến thiên, kết luận: phương trình $f(x) = 0$ có 2 nghiệm $x = 3$; $x = 8$.

Ví dụ 10. Giải phương trình $(4x-1)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{3x+5}\right) = 4x+8$.

Lời giải.
Điều kiện $x \geq -3$. Nhận thấy $x = \dfrac{1}{4}$ không là nghiệm của phương trình. Với $x \neq \dfrac{1}{4}$, phương trình đã cho tương đương với: $\sqrt{x+3} + \sqrt[3]{3x+5} - \dfrac{4x+8}{4x-1} = 0$
Xét hàm số: $f(x) = \sqrt{x+3} + \sqrt[3]{3x+5} - \dfrac{4x+8}{4x-1}$, $x \in [-3;+\infty) \setminus \left\{\dfrac{1}{4}\right\}$
Ta có: $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{(3x+5)^2}} + \dfrac{36}{(4x-1)^2} > 0\ \forall x \in (-3;+\infty) \setminus \left\{\dfrac{1}{4}\right\}$
Bảng biến thiên:
Từ bảng biến thiên, suy ra:
Phương trình $f(x) = 0$ chỉ có 2 nghiệm là $x = -2$; $x = 1$.

Ví dụ 11. Giải phương trình $\sqrt{x^2+1} = \dfrac{x+1}{1-x\sqrt{x^2-1}}$.

Lời giải.
Điều kiện $\begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ 1-x\sqrt{x^2-1} \neq 0 \end{cases}$. Ta có: $\sqrt{x^2+1} = \dfrac{x+1}{1-x\sqrt{x^2-1}}$
$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}\left(1-x\sqrt{x^2-1}\right) = x+1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} - x\sqrt{x^4-1} = x+1(*)$
Ta lại có: $(*) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} - 1 = x\left(\sqrt{x^4-1}+1\right) \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}+1} = x\left(\sqrt{x^4-1}+1\right) \Rightarrow x > 0$
Kết hợp điều kiện cho ta: $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq x_0 = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}} \end{cases}$
Từ phương trình (*), xét hàm số: $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x\sqrt{x^4-1} - x - 1$
$f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{x^4-1} - \dfrac{2x^4}{\sqrt{x^4-1}} - 1 = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2+1}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} - \sqrt{x^4-1} - \dfrac{2x^4}{\sqrt{x^4-1}} < 0, \forall x > 1.$
$\Rightarrow f(x) \leq f(1) = \sqrt{2} - 2 < 0$
Suy ra phương trình (*) vô nghiệm, hay phương trình đã cho vô nghiệm.
Bình luận. Phương pháp đánh giá nói chung và phương pháp hàm số nói riêng là phương pháp thường dùng nhất trong việc chứng minh một phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 12. Giải phương trình $2\sqrt{1-2x} + \sqrt[10]{20x+1} = 3$.

Lời giải.
Đặt $a = \sqrt{1-2x} \Rightarrow 2x = 1 - a^2\ (a \geq 0)$; $b = \sqrt[10]{20x+1} \Rightarrow 20x = b^{10} - 1\ (b \geq 0)$, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2a+b=3 \\ b^{10}+10a^2-11=0 \end{cases} \Leftrightarrow b^{10}+10\left(\frac{3-b}{2}\right)^2-11=0 \Rightarrow 2b^{10}+5b^2-30b+23=0(*)$$

Do $a, b \geq 0$ nên từ: $2a+b=3 \Rightarrow 0 \leq b \leq 3$

+Nếu: $b=0$ phương trình (*) vô nghiệm, suy ra PT đã cho vô nghiệm.

+Nếu: $0 < b \leq 3$, từ (*) ta có: $2+\frac{5}{b^8}-\frac{30}{b^9}+\frac{23}{b^{10}}=0$

Xét hàm số: $f(b)=2+\frac{5}{b^8}-\frac{30}{b^9}+\frac{23}{b^{10}}$, $(0 < b \leq 3)$ ta có:

$f'(b)=-\frac{40}{b^9}+\frac{270}{b^{10}}-\frac{230}{b^{11}}=-\frac{10}{b^{11}}\left(23-27b+4b^2\right)$

Lập bảng biến thiên ta thấy: $f(b) \geq f(1)=0$.

Hay phương trình (*) có nghiệm duy nhất $b=1$.

Thử lại cho ta phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=0$. ■

Bình luận. Lựa chọn phương pháp đặt ẩn phụ để đưa về phương trình bậc cao, sau đó kết hợp với phương pháp hàm số để xử lý bài toán cũng là một lựa chọn tinh tế cho những bài toán khó.

Ví dụ 13. Giải phương trình $\frac{x+1}{\sqrt{3x-2}}+\frac{\sqrt[3]{3x+2}}{4}=\sqrt{3x-2}$.

✍ **Lời giải.**

Điều kiện $x > \frac{2}{3}$.

Phương trình đã cho tương đương với: $\sqrt[3]{3x+2}.\sqrt{3x-2}=8x-12(*)$.

Với $x > \frac{2}{3}$ thì: $\sqrt[3]{3x+2}.\sqrt{3x-2} > 0 \Rightarrow 8x-12 > 0 \Rightarrow x > \frac{3}{2}$.

Đặt $\sqrt{3x-2}=a$ $\left(a > \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$. Phương trình đã cho trở thành:

$a\sqrt[3]{a^2+4}=\frac{8\left(a^2+2\right)}{3}-12 \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}+\frac{4}{a^3}}+\frac{20}{a^2}=8$

Hàm số: $f(a)=3\sqrt[3]{\frac{1}{a}+\frac{4}{a^3}}+\frac{20}{a^2}-8$, nghịch biến trên: $\left(\sqrt{\frac{5}{2}};+\infty\right)$ và $f(2)=0$

Suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$. ■

Ví dụ 14. Giải phương trình $\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=32\left(x-1\right)^2\sqrt{2x-2}$.

✍ **Lời giải.**

Điều kiện $x \geq 1$.

Phương trình đã cho tương đương với: $x+\sqrt{x^2-1}=2\left(4x-4\right)^5$

Đặt: $4x-4=a$ $(a \geq 0)$. Phương trình đã cho trở thành:

$2a^5-\frac{a+4}{4}-\sqrt{\left(\frac{a+4}{4}\right)^2-1}=0 \Leftrightarrow 8a^5=\sqrt{a^2+8a}+a+4(*)$

+Rõ ràng $a=0$ không là nghiệm của phương trình (*)

+Với $a \neq 0$, phương trình (*) tương đương với: $8=\frac{4}{a^5}+\frac{1}{a^4}+\sqrt{\frac{1}{a^8}+\frac{8}{a^9}}$

Hàm số: $f(a)=\frac{4}{a^5}+\frac{1}{a^4}+\sqrt{\frac{1}{a^8}+\frac{8}{a^9}}-8$, nghịch biến trên $(0;+\infty)$ và $f(1)=0$

Suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$. ■

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

① Giải phương trình $x+\sqrt[5]{x-1}+\sqrt{x+2}=5$. Đáp số: $x=2$.

② Giải phương trình $\sqrt{x+3}+\dfrac{7}{2x}=\dfrac{1}{2}x+5$. Đáp số: $x=1$.

③ Giải phương trình $13\sqrt{x-1}+9\sqrt{x+1}=16x$. Đáp số: $x=\dfrac{5}{4}$.

④ Giải phương trình $x+\dfrac{1}{2+\sqrt{4-x}}=1+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3+x}}$. Đáp số: $x=1$.

⑤ Giải phương trình $\sqrt{8-x^2}+\sqrt{\dfrac{x^2-2}{2x^2}}=5-\dfrac{1+x^2}{x}$. Đáp số: $x=2$.

⑥ Giải phương trình $13\sqrt{x^2-x^4}+9\sqrt{x^2+x^4}=16$. Đáp số: $x=\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

⑦ Giải phương trình $\sqrt{2x+3}.\sqrt[3]{x+5}=x^2+x-6$. Đáp số: $x=3$.

⑧ Giải phương trình $\left(\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+3}\right)(2x-7)=5$. Đáp số: $x=1$; $x=6$.

4.1 Sử dụng hàm số đại diện

Tính chất. Xét hàm số: $y=f(t)$, $t\in D$.
1) Nếu hàm số $f(t)$ đơn điệu trong khoảng $(a,b)\subset D$, ta có:

$$\begin{cases} f(u)=f(v) \\ u,v\in(a,b)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=v \\ u,v\in(a,b)\end{cases}$$

2) Nếu hàm số $f(t)$ đồng biến trong khoảng $(a,b)\subset D$, ta có:

$$\begin{cases} u>v \\ u,v\in(a,b)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(u)>f(v) \\ u,v\in(a,b)\end{cases}$$

3) Nếu hàm số $f(t)$ nghịch biến trong khoảng $(a,b)\subset D$, ta có:

$$\begin{cases} u>v \\ u,v\in(a,b)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(u)<f(v) \\ u,v\in(a,b)\end{cases}$$

Ví dụ 1. Giải phương trình $(5x-6)^2-\dfrac{1}{\sqrt{5x-7}}=x^2-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$.

✍ **Lời giải.**

Điều kiện $x>\dfrac{7}{5}$. Phương trình đã cho tương đương với:

$(5x-6)^2-\dfrac{1}{\sqrt{(5x-6)-1}}=x^2-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}(*)$

Xét hàm số $f(u)=u^2-\dfrac{1}{\sqrt{u-1}}$, $u>1$. Ta có: $f'(u)=2u+\dfrac{1}{2\sqrt{(u-1)^3}}>0$, $\forall u>1$.

Suy ra hàm số $f(u)$ đồng biến trong khoảng $(1;+\infty)$ nên:

Với $x>\dfrac{7}{5}$, ta có: $\begin{cases} x>1; 5x-6>1 \\ f(5x-6)=f(x)\end{cases} \Rightarrow 5x-6=x \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$.

Thử lại ta thấy nghiệm của phương trình đã cho là $x=\dfrac{3}{2}$. ■

Ví dụ 2. Giải phương trình $\dfrac{x^3+6x^2+15x+13}{x^2+4x+7}=\sqrt{x+9}-\dfrac{1}{x+12}$.

✍ Lời giải.

Điều kiện $x\geq -9$. Phương trình đã cho tương đương với:

$(x+2)-\dfrac{1}{x^2+4x+7}=\sqrt{x+9}-\dfrac{1}{x+12}\Leftrightarrow (x+2)-\dfrac{1}{(x+2)^2+3}=\sqrt{x+9}-\dfrac{1}{(x+9)+3}(*)$

Xét hàm số: $f(u)=u-\dfrac{1}{u^2+3}$ trên R, ta có:

$f'(u)=1+\dfrac{2u}{(u^2+3)^2}=\dfrac{(u^2+3)^2+2u}{(u^2+3)^2}=\dfrac{u^4+5u^2+8+(u+1)^2}{(u^2+3)^2}>0,$

Suy ra hàm số $f(u)$ đồng biến trên .

Nên $f(x+2)=f\left(\sqrt{x+9}\right)\Leftrightarrow x+2=\sqrt{x+9}\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{29}-3}{2}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=\dfrac{\sqrt{29}-3}{2}$. ■

Ví dụ 3. Giải phương trình $26x^3+30x^2=4-\dfrac{\sqrt{3x}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{3x^2-6x}}$.

✍ Lời giải.

Điều kiện $x>2$. Đặt $\sqrt{3x}=a$; $\sqrt{x-2}=b\ (a,b>0)$. Phương trình đã cho trở thành: $a^6+3a^4-b^6-3b^4+\dfrac{a-b}{ab}=0\Leftrightarrow a^6+3a^4-\dfrac{1}{a}=b^6+3b^4-\dfrac{1}{b}(*)$

Xét hàm số: $f(u)=u^6+3u^4-\dfrac{1}{u}$, $u>0$, ta có: $f'(u)=6u^5+12u^3+\dfrac{1}{u^2}>0,\ \forall u>0$

Suy ra hàm số $f(u)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$, do đó:

$$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}f(a)=f(b)\\ a,b\in(0;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow a=b$$

Với $a=b$, thay trở lại ta có: $\sqrt{3x}=\sqrt{x-2}$ (VN).

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm. ■

Ví dụ 4. Giải phương trình $\sqrt[4]{3(x+5)}-\sqrt[4]{x+13}=\sqrt[4]{11-x}-\sqrt[4]{3(3-x)}$.

✍ Lời giải.

Điều kiện $-5\leq x\leq 3$. Phương trình đã cho tương đương với:

$\sqrt[4]{3(x+5)}+\sqrt[4]{3(3-x)}=\sqrt[4]{11-x}+\sqrt[4]{x+13}$

$\Leftrightarrow\ \sqrt[4]{(3x+2)+13}+\sqrt[4]{11-(3x+2)}=\sqrt[4]{11-x}+\sqrt[4]{x+13}(*)$

Xét hàm số: $f(u)=\sqrt[4]{11-u}+\sqrt[4]{u+13}$, $u\in[-13;11]$, ta có: Hàm số $f(u)$ liên tục trên đoạn $[-13;11]$, đồng thời:

$f'(u)=\dfrac{1}{4\sqrt[4]{u+13}}-\dfrac{1}{4\sqrt[4]{11-u}}\Rightarrow f'(u)=0\Leftrightarrow u=-1.$

Suy ra: $f(u)$ đồng biến trên $[-13;-1)$ và nghịch biến trên $(-1;11.]$ Do đó ta có:

+Nếu $x\in[-5;-1)\Rightarrow\begin{cases}-13\leq 3x+2<-1\\ 3x+2<x\end{cases}$ nên: $f(3x+2)<f(x)$ hay phương trình (*) không có nghiệm $x\in[-5;-1)$

+Nếu $x \in (-1;3] \Rightarrow \begin{cases} -1 \le 3x+2 < 11 \\ 3x+2 > x \end{cases}$ nên $f(3x+2) < f(x)$ hay phương trình (*) không có nghiệm $x \in (-1;3]$.
Với $x=-1 \Rightarrow f(x) = f(3x+2)$. Hay phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-1$.

Ví dụ 5. Giải phương trình $\dfrac{\sqrt{x^2-x+2}}{1+\sqrt{-x^2+x+2}} - \dfrac{\sqrt{x^2+x}}{1+\sqrt{-x^2-x+4}} = x^2-1.$

Lời giải.

Điều kiện $\left[\begin{array}{l} 0 \le x \le \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ x=-1 \end{array}\right.$. Phương trình đã cho tương đương với:

$\dfrac{\sqrt{x^2-x+2}}{1+\sqrt{4-(x^2-x+2)}} - \dfrac{\sqrt{x^2+x}}{1+\sqrt{4-(x^2+x)}} = x^2-1(*)$

Xét hàm số: $f(u) = \dfrac{u}{1+\sqrt{4-u^2}}$, $0 \le u \le 2$, ta có:

$f'(u) = \dfrac{\sqrt{4-u^2}+4}{\sqrt{4-u^2}\left(1-\sqrt{4-u^2}\right)} > 0$, $\forall u \in [0;2)$

Đồng thời $f(u)$ liên tục trên đoạn $[0;2]$, suy ra $f(u)$ đồng biến trên đoạn $[0;2]$. Ta lại có:
+$x=-1$ không là nghiệm của phương trình.
+Với $x \in \left[0;\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}\right]$, ta có: $\sqrt{x^2-x+2}$, $\sqrt{x^2+x} \in [0;2]$ và:
-Nếu $0 \le x < 1 \Rightarrow \sqrt{x^2-x+2} > \sqrt{x^2+x} \Rightarrow f\left(\sqrt{x^2-x+2}\right) > f\left(\sqrt{x^2+x}\right)$, suy ra:
$VT(*) = f\left(\sqrt{x^2-x+2}\right) > f\left(\sqrt{x^2+x}\right) > 0$, đồng thời $VP(*) = x^2-1 < 0$ hay phương trình (*) không có nghiệm $x \in [0;1)$
-Nếu $1 < x < \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2} \Rightarrow \sqrt{x^2-x+2} < \sqrt{x^2+x} \Rightarrow f\left(\sqrt{x^2-x+2}\right) < f\left(\sqrt{x^2+x}\right)$,
Suy ra: $VT(*) = f\left(\sqrt{x^2-x+2}\right) - f\left(\sqrt{x^2+x}\right) < 0$, đồng thời $VP(*) = x^2-1 > 0$ hay phương trình (*) không có nghiệm $x \in \left(1;\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}\right]$.
-Với $x=1$ ta có: $f\left(\sqrt{x^2-x+2}\right) = f\left(\sqrt{x^2+x}\right)$. Suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

① Giải phương trình $2x^5+2\sqrt{(1-x^2)^5} = x^3+\sqrt{(1-x^2)^3}$.
② Giải phương trình $x^3+3x^2+4x+2 = (3x+1)\sqrt{3x+1}$. Đáp số: $x=0$; $x=1$.
③ Giải phương trình $\sqrt[6]{1-\sqrt{x^4-x^2}} + \sqrt[3]{1+\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}}} = \sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x}$. Đáp số: $x=1$.
④ Giải phương trình $3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right) + (4x+2)\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right) = 0$
⑤ Giải phương trình $(6x^2+x-1)\sqrt{x-1} - (3x^2+2x+7)\sqrt{2x+7} = 4x^3+3x^2-3x$. Đáp số: Vô nghiệm.
⑥ Giải phương trình $1+2\left(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right) = \dfrac{x^4}{4}+\sqrt{x^4+4}$.
⑦ Giải phương trình $24x^2-60x+36 = \dfrac{1}{\sqrt{5x-7}} - \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$. Đáp số: $x=\dfrac{3}{2}$.
⑧ Giải phương trình $\dfrac{\sqrt{4-x}}{1+\sqrt{x}} - \dfrac{\sqrt{3+x}}{1+\sqrt{1-x}} = 2x-1$. Đáp số: $x=\dfrac{1}{2}$.

⑨ Giải phương trình $\dfrac{\sqrt{2x^2-5x+3}}{3+\sqrt{-6x^2+15x+3}}+2=\dfrac{x\sqrt{x}-1}{3+\sqrt{-3x^3-6x\sqrt{x}+9}}+2x^5$. Đáp số: $x=1$.

4.2 Đánh giá trên tổng cực trị của hàm số

Tính chất. Cho các hàm số $f(x)$, $g(x)$ xác định trên D. Nếu:

-$\underset{D}{Min}\, f(x)=m_1;\ \underset{D}{Min}\, g(x)=m_2 \Rightarrow f(x)+g(x)\geq m_1+m_2\ \forall x\in D$.

-$\underset{D}{Max}\, f(x)=M_1;\ \underset{D}{Max}\, g(x)=M_2 \Rightarrow f(x)+g(x)\leq M_1+M_2\ \forall x\in D$.

-$\underset{D}{Min}\, f(x)=m;\ \underset{D}{Max}\, g(x)=m \Rightarrow f(x)=g(x)\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=m \\ g(x)=m \end{cases}$

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sqrt{9x^3-18x^2}+\sqrt{36x^2-9x^3}=x^2+9$.

Lời giải.

Đặt: $a=\sqrt{9x^3-18x^2};\ b=\sqrt{36x^2-9x^3}\ (a,b\geq 0)\Rightarrow \dfrac{a^2+b^2}{18}=x^2$

Ta có: $a+b=\dfrac{a^2+b^2}{18}+9\Leftrightarrow (a^2-18a+81)+(b^2-18b+81)=0$

$\Leftrightarrow (a-9)^2+(b-9)^2=0\Leftrightarrow a=b=9$.

-Bình luận. Ở ví dụ này ta thấy rằng với các hàm số:

$f(a)=a^2-18a+81;\ g(b)=b^2-18b+81$ thì $\underset{[0;+\infty)}{Min}\, f(a)=0;\ \underset{[0;+\infty)}{Min}\, g(b)=0\Rightarrow f(a)+g(b)\geq 0$ ■

Ví dụ 2. Giải phương trình $\dfrac{3x+3}{\sqrt{x}}=4+\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}$.

Lời giải.

Điều kiện $x>0$.

Phương trình đã cho tương đương với: $\left(3\sqrt{x}+\dfrac{3}{\sqrt{x}}-6\right)+\left(2-\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}\right)=0$

$\Leftrightarrow 3\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}-2\right)+\left(\dfrac{2\sqrt{x^2-x+1}-x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}\right)=0$

$\Leftrightarrow 3\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+\dfrac{3(x-1)^2}{\left(2\sqrt{x^2-x+1}+x+1\right)\sqrt{x^2-x+1}}=0\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ \sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=1.$ ■

-Bình luận. Khi giải toán ta dựa trên bản chất tổng cực trị của hàm số nhưng không phải lúc nào cũng nên dùng hàm số, một phép biến đổi bình phương hoặc một phép tách hạng tử có thể đưa chúng ta đạt được mục đích của mình.

Ví dụ 3. Giải phương trình $(x-3)\left(\dfrac{1}{2}x+\sqrt{x}\right)=(x-1)\sqrt{2x+1}+3\sqrt{x}-11$.

Lời giải.

Điều kiện $x\geq 0$.

PT tương đương với: $(x-3)(x+2\sqrt{x})=2(x-1)\sqrt{2x+1}+6\sqrt{x}-22$.

$\Leftrightarrow \left[(x-1)^2-2(x-1)\sqrt{2x+1}+2x+1\right]+(2x\sqrt{x}-3x-12\sqrt{x}+20)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-1-\sqrt{2x+1}\right)^2+(2x\sqrt{x}-3x-12\sqrt{x}+20)=0(*)$

Đặt $\sqrt{x}=a\ (a\geq 0)$, xét hàm số $f(a)=2a^3-3a^2-12a+20,\ a\geq 0$

Ta có $f'(a) = 6a^2 - 6a - 12 \Rightarrow f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 2$ (do $a \geq 0$)
Lập bảng biến thiên cho ta $\underset{[0;+\infty)}{Min} f(a) = 0 \Leftrightarrow a = 2$ hay:
$2x\sqrt{x} - 3x - 12\sqrt{x} + 20 \geq 0, \forall x \geq 0$

Từ đó ta có: $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = \sqrt{2x+1} \\ \sqrt{x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$

Vậy $x = 4$ là nghiệm của phương trình đã cho.
-Bình luận.
+Ta có thể giải bằng cách phân tích: PT$\Leftrightarrow \left(x - 1 - \sqrt{2x+1}\right)^2 + (2\sqrt{x} + 5)\left(\sqrt{x} - 2\right)^2 = 0$
+Tuy nhiên nếu hàm số $f(a)$ được cho phức tạp hơn, vấn đề phân tích để đánh giá sẽ có nhiều rắc rối.

Ví dụ 4. Giải phương trình $\sqrt{3x-7} + (4x-7)\sqrt{7-x} = 32$.

Lời giải.
Điều kiện $\frac{7}{3} \leq x \leq 7$. Đặt $a = \sqrt{7-x}$ $\left(0 \leq a \leq \sqrt{\frac{14}{3}}\right)$. Phương tình đã cho trở thành $\sqrt{14-3a^2} - 4a^3 + 21a - 32 = 0$. Ta có $0 \leq f(a) = \sqrt{14-3a^2} \leq \sqrt{14}$
$g(a) = -4a^3 + 21a - 32,\ 0 \leq a \leq \sqrt{\frac{14}{3}}$
$\Rightarrow g'(a) = -12a^2 + 21 \Rightarrow -32 = g(0) \leq g(a) \leq g\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right) = -32 + 7\sqrt{7}$
Do đó $f(a) + g(a) \leq -32 + 7\sqrt{7} + \sqrt{14} < 0$. Hay phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 5. Giải phương trình $\frac{4}{4-x^2} + \frac{5+3\sqrt{1-x^2}}{8\sqrt{1-x^2}+8-2x^2} = \frac{13}{2+\sqrt{5-x}+\sqrt{3+x}}$.

Lời giải.
Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$. Ta có:
-$2\sqrt{2} \leq \sqrt{5-x} + \sqrt{3+x} \leq \sqrt{(1+1)(5-x+3+x)} = 4 \Rightarrow \frac{13}{6} \leq \frac{13}{2+\sqrt{5-x}+\sqrt{3+x}} = f(x)$
Hay $\underset{[-1;1]}{Min} f(x) = \frac{13}{6} \Leftrightarrow x = 1(1)$. Đặt $\sqrt{1-x^2} = a\ (a \geq 0)$, ta có:
$\frac{4}{4-x^2} + \frac{5+3\sqrt{1-x^2}}{8\sqrt{1-x^2}+8-2x^2} = \frac{4}{3+a^2} + \frac{5+3a}{8a+6+2a^2} = \frac{4}{3+a^2} + \frac{1}{(a+3)} + \frac{1}{2(a+1)}$.
Xét hàm số: $g(a) = \frac{4}{3+a^2} + \frac{1}{(a+3)} + \frac{1}{2(a+1)},\ a \geq 0$.
Ta có: $g'(a) = -\frac{8a}{(a^2+3)^2} - \frac{1}{2(a+1)^2} - \frac{1}{(a+3)^2} < 0, \forall a \geq 0$, hay hàm số nghịch biến trên $[0; +\infty)$.
Do đó: $g(a) \leq g(0) = \frac{13}{6}$ tức là: $\frac{4}{4-x^2} + \frac{5+3\sqrt{1-x^2}}{8\sqrt{1-x^2}+8-2x^2} \leq \frac{13}{6}(2)$
Dấu '=' xảy ra $\Leftrightarrow x = \pm 1$. Kết hợp (1) và (2) cho ta nghiệm của phương trình là $x = 1$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Giải phương trình $13\sqrt{x-1} + 9\sqrt{x+1} = 16x$. Đáp số: $x = \frac{5}{4}$.
Bài 2. Giải phương trình $x^2 - 2(x+1)\sqrt{3x+1} = 2\sqrt{2x^2+5x+2} - 8x - 5$. Đáp số: $x = 1$.
Bài 3. Giải phương trình $4x^2 + 12 + \sqrt{x-1} = 4\left(x\sqrt{5x-1} + \sqrt{9-5x}\right)$. Đáp số: $x = 1$.
Bài 4. Giải phương trình $\sqrt{3x^2+6x+12} + \sqrt{5x^4-10x^2+9} = -2x(x+2) + 3$. Đáp số: $x = -1$.
Bài 5. Giải phương trình $3x + \frac{1}{\sqrt{2x-7}} + \frac{1}{\sqrt{x-3}} = 2\left(\sqrt[4]{2x-7} + \sqrt[4]{x-3} + 5\right)$. Đáp số: $x = 4$.

Bài 6. Giải phương trình $\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}+\sqrt{x}\right)^2 = 2\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x}+1}+\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}\right)+1$. Đáp số: $x=0$.

Bài 7. Giải phương trình $6\sqrt{(3-3x)(3x+7)}+4\sqrt[3]{3x+7}=27x+76$. Đáp số: $x=-2$.

Bài 8. Giải phương trình $x^2-8x+10+\dfrac{81}{x+2\sqrt{x-1}}=2\sqrt{x-1}$. Đáp số: $x=5$.

Bài 9. Giải phương trình $x\left(x^2+x+4\right)+\dfrac{7x-3}{2x^2-x}=2\sqrt{2x-1}+4\sqrt{x^2+3}$. Đáp số: $x=1$.

E PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC HÓA

Thông thường khi ta sử dụng máy tính bỏ túi để kiểm tra nghiệm của phương trình vô tỷ, ta nhận được kết quả bài toán không có nghiệm hữu tỷ và không đưa nghiệm của phương trình về dạng nhân tử $\left(ax^2+bx+c\right)$, nguyên nhân rất có thể nghiệm của bài toán được cho dưới dạng lượng giác.
Tuy nhiên do tính phổ biến của loại phương trình này trong các đề thi hiện nay, nên chúng tôi không đi sâu vào loại phương trình này. Sau đây xin được gới thiệu với các bạn một số kỹ thuật lượng giác hóa thông thường.

1. Một số dạng biến đổi lượng giác.

-Nếu $x^2+y^2=a^2$, $(a>0)$ thì có một số $\alpha\in[0;2\pi]$ sao cho:
$x=a\sin\alpha$, $y=a\cos\alpha$.

+Đặc biệt $a=1$ thì ta có thể đặt $\begin{cases} x=\sin\alpha \\ y=\cos\alpha \end{cases}$ với $\alpha\in[0;2\pi]$.

-Nếu $|x|\le a$,$(a>0)$ thì có một số $\alpha\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ sao cho: $x=a\sin\alpha$, và một số $\beta\in[0;\pi]$ sao cho $x=a\cos\beta$.

+Đặc biệt: $a=1$ thì ta có thể đặt $x=\sin\alpha$, $\alpha\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ hoặc $x=\cos\alpha$, $\alpha\in[0;\pi]$.

-Nếu $0\le x\le 1$ thì có một số $\alpha\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ sao cho: $x=\sin\alpha$, và một số $\beta\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ sao cho: $x=\cos\beta$.

-Nếu $|x|\ge m$, $(m\ge 0)$ hoặc các bài toán có chứa biểu thức $\sqrt{x^2-m^2}$ thì đặt $x=\dfrac{m}{\cos x}$, $\alpha\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left[\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right)$

+Đặc biệt: $m=1$ thì ta có thể đặt $x=\dfrac{1}{\cos x}$, $\alpha\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left[\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

-Nếu không ràng buộc điều kiện cho biến số và bài toán có chứa biểu thức $\sqrt{x^2+m^2}$ thì đặt $x=m.\tan\alpha$, $\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$

+Đặc biệt: $m=1$ thì ta có thể đặt $x=\tan\alpha$, $\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

2. Một số ví dụ minh họa.

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sqrt{1-x^2}=4x^3-3x$.

Lời giải.

-Phân tích. Phương trình trên thuộc dạng cơ bản, nhưng nếu sử dụng phương pháp nâng lũy thừa sẽ cho ta một phương trình bậc cao. Tuy nhiên, ta để ý rằng trong phương trình có chứa biểu thức $\sqrt{1-x^2}$ nên điều kiện ban đầu của phương trình là $|x|\le 1$. Do đó, ta sử dụng một trong hai phép đặt ẩn $x=\sin\alpha$ hoặc $x=\cos\alpha$. Tiếp tục quan sát phương trình, ta có thể thấy ngay biểu thức $4x^3-3x$ làm ta liên tưởng đến một công thức trong lượng giác đó: $4\cos^3\alpha-3\cos\alpha=\cos 3\alpha$. Ta có lời giải như sau: Điều kiện $1-x^2\ge 0\Leftrightarrow -1\le x\le 1$.
Đặt $x=\cos\alpha$, $\alpha\in[0;\pi]$, khi đó phương trình đã cho trở thành:
$\sqrt{1-\cos^2\alpha}=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha\Leftrightarrow\sin\alpha=\cos 3\alpha\Leftrightarrow\cos 3\alpha=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3\alpha = \dfrac{\pi}{2} - \alpha + k2\pi \\ 3\alpha = -\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2} \\ \alpha = -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right.$$

Do $\alpha \in [0;\pi]$, nên $\alpha \in \left\{\dfrac{\pi}{8};\dfrac{5\pi}{8};\dfrac{3\pi}{4}\right\}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình:

$$S = \left\{\cos\dfrac{\pi}{8};\cos\dfrac{5\pi}{8};\cos\dfrac{3\pi}{4}\right\} = \left\{\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2};\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2};-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$$

-Bình luận. Để có thể sử dụng được phương pháp lượng giác hóa khi giải phương trình vô tỷ thì trước hết ta cần nắm vững các công thức lượng giác và những dạng biến đổi của nó. Như vậy, vệc quy về giải một phương trình lượng giác đã giúp ta giải quyết phương trình vô tỷ một cách nhẹ nhàng hơn.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\sqrt{1-x} = 2x^2 - 1 - 2x\sqrt{1-x^2}$.

Lời giải.

-Phân tích. Để ý rằng trong phương trình có chứa biểu thức $\sqrt{1-x}$ và $\sqrt{1-x^2}$ nên điều kiện ban đầu của phương trình là $|x| \le 1$. Sử dụng phép đặt ẩn $x = \cos\alpha$ ta có lời giải: Điều kiện $\begin{cases} 1-x^2 \ge 0 \\ 1-x \ge 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow -1 \le x \le 1$.

Đặt $x = \cos\alpha$, $\alpha \in [0;\pi]$, khi đó phương trình đã cho trở thành:

$$\sqrt{1-\cos\alpha} = 2\cos^2\alpha - 1 - 2\cos\alpha\sqrt{1-\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \sqrt{2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}} = \cos 2\alpha + 2\cos\alpha\sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\dfrac{\alpha}{2} = \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = \sqrt{2}\sin\left(2\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \sin\left(2\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\dfrac{\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\alpha + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\alpha}{2} + k2\pi \\ 2\alpha + \dfrac{\pi}{4} = \pi - \dfrac{\alpha}{2} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k4\pi}{3} \\ \alpha = \dfrac{3\pi}{10} + \dfrac{k4\pi}{5} \end{array}\right.$$

Do $\alpha \in [0;\pi]$, nên $\alpha = \dfrac{3\pi}{10} \Leftrightarrow x = \cos\dfrac{3\pi}{10}$.

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \cos\dfrac{3\pi}{10} = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

-Bình luận. Trong lời giải trên giáo viên cần lưu ý cho học sinh ở phép biến đổi: $\sqrt{2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}} = \sqrt{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

Nếu trong lời giải trên ta sử dụng phép đặt $x = \sin\alpha$, $\alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ thì ta có $\sqrt{1-x} = \sqrt{1-\sin\alpha} =$ $\sqrt{\left(\sin\dfrac{\alpha}{2} - \cos\dfrac{\alpha}{2}\right)^2} = \left|\sin\dfrac{\alpha}{2} - \cos\dfrac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{2}\left|\sin\left(\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)\right| = -\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)$

Ví dụ 3. Giải phương trình $x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{35}{12}$.

Lời giải.

-Phân tích. Với điều kiện ban đầu của bài toán $x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1 \vee x < -1$ ta có thể sử dụng phép đặt ẩn phụ $x = \dfrac{1}{\cos\alpha}$, $\alpha \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right)$. Khi đó, ta có $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1} = |\tan x|$. Tuy nhiên, để giải quyết vấn đề tạo ra một phương trình có chứa dấu giá trị tuyệt đối, ta chú ý rằng nếu $x < 0$ thì phương trình trên sẽ không có nghiệm thực. Từ đó ta có lời giải cho bài toán như sau: Đều kiện ban đầu: $x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1 \vee x < -1$.

Để ý rằng nếu $x < -1$ thì phương trình đã cho vô nghiệm. Cho nên ta chỉ cần xét $x > 1$. Khi đó, ta đặt $x = \dfrac{1}{\cos\alpha}$, $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ và phương trình đã cho trở thành: $\dfrac{1}{\cos\alpha} + \dfrac{\dfrac{1}{\cos\alpha}}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{\cos\alpha}\right)^2 - 1}} = \dfrac{35}{12}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\cos\alpha} + \dfrac{1}{\sin\alpha} = \dfrac{35}{12} \Leftrightarrow 12\left(\sin\alpha + \cos\alpha\right) = 35\sin\alpha.\cos\alpha(1)$

Đặt $t = \sin\alpha + \cos\alpha$, $t \in \left(1; \sqrt{2}\right] \Rightarrow \sin\alpha.cos\alpha = \dfrac{t^2 - 1}{2}$. Khi đó

$12t = 35\left(\dfrac{t^2 - 1}{2}\right) \Leftrightarrow 35t^2 - 24t - 35 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\dfrac{5}{7}\,(\text{loại}) \\ t = \dfrac{7}{5} \end{array}\right. \Rightarrow \sin\alpha.\cos\alpha = \dfrac{12}{25} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\sin\alpha} + \dfrac{1}{\cos\alpha} = \dfrac{35}{12} \\ \dfrac{1}{\sin\alpha}.\dfrac{1}{\cos\alpha} = \dfrac{25}{12} \end{cases}$$

Suy ra $\dfrac{1}{\sin\alpha}; \dfrac{1}{\cos\alpha}$ là 2 nghiệm của phương trình: $12u^2 - 35u + 25 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = \dfrac{5}{3} \\ u = \dfrac{5}{4} \end{array}\right.$

Do đó, $\left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{\cos\alpha} = \dfrac{5}{3} \\ \dfrac{1}{\cos\alpha} = \dfrac{5}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5}{3} \\ x = \dfrac{5}{4} \end{array}\right.$ (thỏa mãn phương trình ban đầu).

Vậy $x = \dfrac{5}{3}; x = \dfrac{5}{4}$ là 2 nghiệm của phương trình đã cho. ■

Ví dụ 4. Giải phương trình $64x^6 - 112x^4 + 56x^2 - 7 = 2\sqrt{1 - x^2}$.

✍ Lời giải.

-Phân tích. Sử dụng công thức $\cos\left(n+1\right)a + \cos\left(n-1\right)a = 2\cos a.\cos na$.

Suy ra: $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$

$\cos 4a = 8\cos^4 a - 8\cos^2 a + 1$

$\cos 5a = 16\cos^5 a - 20\cos^3 a + 5\cos a$

$\cos 6a = 32\cos^6 a - 48\cos^4 a + 18\cos^2 a - 1$

$\cos 7a = 64\cos^7 a - 112\cos^5 a + 56\cos^3 a - 7\cos a$

Từ đó ta có lời giải như sau: Đặt $x = \cos\alpha$, $\alpha \in \left[0; \pi\right]$, phương trình đã cho trở thành:

$64\cos^6\alpha - 112\cos^4\alpha + 56\cos^2\alpha - 7 = 2\sqrt{1 - \cos^2\alpha}(1)$

Nhận thấy $\cos\alpha = 0$ không thỏa phương trình (1), nên nhân hai vế phương trình (1) với $\cos\alpha \neq 0$ ta có

$64\cos^7\alpha - 112\cos^5\alpha + 56\cos^3\alpha - 7\cos\alpha = 2sin\alpha.cos\alpha$

$$\Leftrightarrow \cos 7\alpha = \sin 2\alpha \Leftrightarrow \cos 7\alpha = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\alpha\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{2k\pi}{9} \\ \alpha = -\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2k\pi}{5} \end{array}\right.$$

Do $\alpha \in [0; \pi]$ nên $\alpha \in \left\{\dfrac{\pi}{18}; \dfrac{5\pi}{18}; \dfrac{9\pi}{18}; \dfrac{13\pi}{18}; \dfrac{17\pi}{18}; \dfrac{3\pi}{10}; \dfrac{7\pi}{10}\right\}$.

Vì $\cos\alpha \neq 0$ nên $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{9\pi}{18}$. Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm là: $\alpha \in \left\{\dfrac{\pi}{18}; \dfrac{5\pi}{18}; \dfrac{9\pi}{18}; \dfrac{13\pi}{18}; \dfrac{17\pi}{18}; \dfrac{3\pi}{10}; \dfrac{7\pi}{10}\right\}$
. ■

-Bình luận. Phương trình trên thực sự rất khó. Khó bởi các biểu thức trong phương trình có bậc cao. Vì thế để sử dụng được phương pháp lượng giác hóa không phải đơn giản, ta cần có một cách nhìn tổng quát phương trình.

Ví dụ 5. Giải phương trình $\sqrt{1+x^2}=\dfrac{5}{2+\sqrt{1+x^2}}+x$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích. Phương trình trên không có điều kiện ràng buộc của ẩn x. Sự xuất hiện của biểu thức $\sqrt{1+x^2}$ trong phương trình định hướng cho ta phép đặt $x=\tan\alpha$, $\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ Đặt $x=\tan\alpha$, $\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$, phương trình đã cho trở thành:

$\sqrt{1+\tan^2\alpha}=\dfrac{5}{2+\sqrt{1+\tan^2\alpha}}+\tan\alpha\Leftrightarrow\dfrac{1}{\cos\alpha}=\dfrac{5\cos\alpha}{2}+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\Leftrightarrow 5\cos^2\alpha+2\sin\alpha-2=0\Leftrightarrow -5\sin^2\alpha+2\sin\alpha+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\alpha=1\\ \sin\alpha=-\dfrac{3}{5}\end{array}\right.$

Do $\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\sin\alpha\neq 1$. Cho nên $\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}\Leftrightarrow x=\tan\alpha=-\dfrac{3}{4}$.

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm $x=-\dfrac{3}{4}$. ■

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Giải phương trình $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}=x\left(1+2\sqrt{1-x^2}\right)$.
Hướng dẫn: Đặt $x=\cos\alpha$, $\alpha\in[0;\pi]$

Bài 2. Giải phương trình $\sqrt{\dfrac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}}=1-2x^2$.
Hướng dẫn: Đặt $x=\cos\alpha$, $\alpha\in[0;\pi]$

Bài 3. Giải phương trình $\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x}}+\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{1-x}}$.
Hướng dẫn: Đặt $x=\cos\alpha$, $\alpha\in(0;\pi]\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

Bài 4. Giải phương trình $\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)=2x$.
Hướng dẫn: Đặt $x=\cos\alpha$, $\alpha\in[0;\pi]$

Bài 5. Giải phương trình $\sqrt{1-|x|}=\sqrt{2}\left(2x^2-1\right)$. Hướng dẫn: Đặt $|x|=\cos\alpha$, $\alpha\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

Bài 6. Giải phương trình $\left|2x-\sqrt{1-4x^2}\right|=\sqrt{2}\left(8x^2-1\right)$.
Hướng dẫn: Đặt $2x=\sin\alpha$, $\alpha\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$

Bài 7. Giải phương trình $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left[\sqrt{(1-x)^3}-\sqrt{(1+x)^3}\right]=2+\sqrt{1-x^2}$.
Hướng dẫn: Đặt $x=\cos\alpha$, $\alpha\in[0;\pi]$ Đáp số: $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Bài 8. Giải phương trình $x^3+\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}=x\sqrt{2\left(1-x^2\right)}$.
Hướng dẫn: Đặt $x=\sin\alpha$, $\alpha\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$. Đáp số: $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $x=\dfrac{1-\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$.

Bài 9. Giải phương trình $x+\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+3}}=\sqrt{3}$. Hướng dẫn: Đặt $x=\sqrt{3}\tan\alpha$, $\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Bài 10. Giải phương trình $\sqrt{x^2+1}+\dfrac{x^2+1}{2x}=\dfrac{\left(x^2+1\right)^2}{2x\left(1-x^2\right)}$.
Hướng dẫn: Đặt $x=\tan\alpha$, $\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)\setminus\left\{\pm\dfrac{\pi}{4};0\right\}$

CHƯƠNG 2 PHÂN TÍCH, SUY LUẬN ĐỂ TÌM LỜI GIẢI

-Chương này giới thiệu cùng bạn đọc:
+Phân tích và suy luận khi đứng trước một phương trình vô tỷ.
+Lựa chọn phương án hợp lý để tìm lời giải tối ưu.
+Những hướng đi khác nhau – khó khăn và cách xử lý.

Ở chương I các bạn độc giả đã biết được phương pháp điển hình để giải một bài toán phương trình vô tỷ, cũng như một bài toán vô tỷ có thể có nhiều phương pháp khác nhau để tiếp cận. Tuy nhiên, làm thế nào để chúng ta có thể tiếp cận một bài toán phương trình vô tỷ và đưa ra được một lời giải cho nó là một câu hỏi khá lớn đang còn bỏ ngõ? Với mục đích, mở ra một hướng đi, một suy nghĩ cần có trước một phương trình vô tỷ thì trong chương này, chúng tôi xin mạn phép đưa ra một số những suy nghĩ là tại sao chúng ta có lời giải như thế, dựa trên những kinh nghiệm mà chúng tôi đã rút kết ra được trong quá trình giảng dạy.

1. Khi nào nên sử dụng phương pháp nâng lên lũy thừa?

Trong bài toán phương trình vô tỷ thì phép nâng lũy thừa là một phép biến đổi tự nhiên, đẹp để giải quyết. Có lúc phương pháp này được giải trực tiếp hoặc sẽ được sử dụng gián tiếp và sẽ là chìa khóa còn lại để tìm nghiệm của phương trình. Những bài toán thường được giải bằng phép nâng lũy thừa là những bài toán có dạng phương trình cơ bản, phương trình có chứa hằng đẳng thức, phương trình có chứa nghiệm chung, phương trình có chứa nhiều lớp căn thức có thể đưa về phương tình cơ bản. Điều quan trọng trong hướng giải bằng phép nâng lũy thừa đó chính là ta sẽ thu được phương trình tương đương hay phương trình hệ quả. Để có thể biến đổi chính xác, ta cần chú ý ta sẽ thu được phương trình tương đương nếu hai vế phương trình cùng dấu và hệ quả khi hai vế phương trình chưa rõ về dấu. Đó là những nhận định chung mà ta có thể định hướng lời giải cho bài toán dùng phương pháp nâng lũy thừa. Bây giờ ta sẽ quan tâm chính đến các ví dụ sau để có thể hiểu rõ hơn.

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sqrt{7-x^2+x\sqrt{x+5}}=\sqrt{3-2x-x^2}$.

Lời giải.

-Phân tích hướng giải. Phương trình này về hình thức là một phương trình cơ bản nên để giải quyết bài toán này ta sẽ dùng phép nâng lũy thừa để loại bớt căn thức trong phương trình.

Cách giải: $\sqrt{7-x^2+x\sqrt{x+5}}=\sqrt{3-2x-x^2}\Leftrightarrow\begin{cases}3-2x-x^2\ge 0\\ 7-x^2+x\sqrt{x+5}=3-2x-x^2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-3\le x\le 1\\ x\sqrt{x+5}=-2x-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3\le x\le 1\\ x\left(-2x-4\right)\ge 0\\ x^2\left(x+5\right)=\left(2x+4\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3\le x\le 1\\ x\le -2\vee x\ge 0\\ \left(x+1\right)\left(x^2-16\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=-1$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-1$. ■

Ví dụ 2. Giải phương trình $x+\sqrt{x^2+9}=\dfrac{45}{\sqrt{x^2+9}}$.

Lời giải.

-Phân tích hướng giải. Quan sát phương trình ta nhận thấy chỉ cần quy đồng mẫu số ta sẽ thu được phương trình cơ bản.

Cách giải: $x+\sqrt{x^2+9}=\dfrac{45}{\sqrt{x^2+9}} \Leftrightarrow x\sqrt{x^2+9}+x^2+9=45$

$\Leftrightarrow x\sqrt{x^2+9}=36-x^2 \Rightarrow x^2\left(x^2+9\right)=\left(36-x^2\right)^2$

$\Leftrightarrow 81x^2=1296 \Leftrightarrow x=\pm 4.$

Thử lại ta có nghiệm của phương trình là $x=4$.

-Bình luận. Với lời giải trên, sau khi biến đổi về phương trình quen thuộc, sử dụng phép nâng lũy thừa ta thu được phương trình hệ quả vì ta chưa biết rõ về dấu của hai phương trình nên ta cần thử lại nghiệm.

Ví dụ 3. Giải phương trình $x^3-7=4\sqrt{8x+1}$.

Lời giải.

-Phân tích hướng giải. Phương trình này có hình thức quen thuộc, ta có thể dùng phép nâng lũy thừa để giải quyết. Tuy nhiên trên thực tế, có một số học sinh rất quan ngại khi giải quyết phương trình này bằng phép nâng lũy thừa vì sẽ tạo ra phương trình bậc 6. Sử dụng máy tính ta biết được phương trình này có nghiệm duy nhất $x=3$. Do đó ta có thể tự tin giải phương pháp này bằng phép nâng lũy thừa.

Cách giải: $x^3-7=4\sqrt{8x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-7\geq 0 \\ \left(x^3-7\right)^2=16\left(8x+1\right) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq \sqrt[3]{7} \\ x^6-14x^3-128x+33=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq \sqrt[3]{7} \\ (x-3)\left(x^5+3x^4+9x^3+13x^2+39x-11\right)=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x=3$ vì $x^5+3x^4+9x^3+13x^2+39x-11>0, \forall x\geq \sqrt[3]{7}$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

-Bình luận. Bài toán được giải quyết khá gọn nhẹ và trong phép nâng lũy thừa thì đôi lúc ta cũng cần một chút khéo léo để làm gãy gọn về nghiệm của phương trình bằng những đánh giá cơ bản.

Ví dụ 4. Giải phương trình $x+\sqrt{x+\dfrac{1}{2}+\sqrt{x+\dfrac{1}{4}}}=3$.

Lời giải.

-Phân tích hướng giải. Bài toán này có chứa nhiều căn thức và khi chuyển x sang vế phải phương trình ta sẽ thu được một phương trình quen thuộc. Điều đó ta hoàn toàn có thể sử dụng phép nâng lũy thừa để giải quyết bài toán. Tuy nhiên nếu chúng ta để ý một chút thì trong phương trình có chứa một hằng đẳng thức.

Thật vậy: $x+\dfrac{1}{2}+\sqrt{x+\dfrac{1}{4}}=x+\dfrac{1}{4}+2.\dfrac{1}{2}.\sqrt{x+\dfrac{1}{4}}+\dfrac{1}{4}=\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{4}}+\dfrac{1}{2}\right)^2$

Với phát hiện này, thì bài toán đã cho sẽ được thu gọn hơn và sẽ có lời giải gọn nhẹ hơn.

Cách giải: Điều kiện $x+\dfrac{1}{4}\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -\dfrac{1}{4}$. Lúc đó:

$x+\sqrt{x+\dfrac{1}{2}+\sqrt{x+\dfrac{1}{4}}}=3 \Leftrightarrow x+\sqrt{\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{4}}+\dfrac{1}{2}\right)^2}=3$

$x+\dfrac{1}{2}+\sqrt{x+\dfrac{1}{4}}=3 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+\dfrac{1}{4}}+\dfrac{1}{2}\right)^2=3$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+\dfrac{1}{4}}+\dfrac{1}{2}=\sqrt{3} \Leftrightarrow x+\dfrac{1}{4}=3-\sqrt{3}+\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x=3-\sqrt{3}$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3 - \sqrt{3}$. ■

-Bình luận. Với việc phát hiện ra hằng đẳng thức ta đã có lời giải gọn hơn vì khi đó ta chỉ sử dụng phép nâng lũy thừa cho một bài toán đơn giản.

Ví dụ 5. Giải phương trình $\sqrt{\dfrac{1+2x.\sqrt{1-x^2}}{2}} = 1-2x^2$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích hướng giải. Hình thức phương trình có kết cấu khá giống phương trình ta vừa xét. Ở trong phương trình này, ta tinh ý cũng sẽ phát hiện ra một hằng đẳng thức.

Thật vậy: $1+2x\sqrt{2-x^2} = 1-x^2+2x\sqrt{1-x^2}+x^2 = \left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^2$.

Từ đó ta có cách giải như sau:

Cách giải: Điều kiện $\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ 1-2x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Với điều kiện vừa xét ta có: $x+\sqrt{1-x^2} \geq 0$. Lúc đó phương trình trở thành:

$$\frac{\sqrt{\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^2}}{\sqrt{2}} = 1-2x^2 \Leftrightarrow x+\sqrt{1+x^2} = \sqrt{2}\left[(1-x^2)-x^2\right]$$

$$\Leftrightarrow x+\sqrt{1-x^2} = \sqrt{2}\left(\sqrt{1-x^2}-x\right)\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\sqrt{1-x^2}\right)\left[1-\sqrt{2}\left(\sqrt{1-x^2}-x\right)\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\sqrt{1-x^2} = 0 \\ \sqrt{1-x^2}-x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -x \geq 0 \\ 1-x^2 = x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 1-x^2 = \left(x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện cho ta tập nghiệm của phương trình $T = \left\{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right\}$. ■

-Bình luận. Qua ví dụ này, một lần nữa ta thấy được việc phát hiện phương trình có chứa hằng đẳng thức và đưa về được phương trình cơ bản sẽ giúp chúng ta sử dụng phép biến đổi lũy thừa chỉ còn là một phép biến đổi cơ bản để tìm nghiệm của phương trình. Trong ví dụ trên, ta có hai lần sử dụng hằng đẳng thức. bản chất của hai ví dụ 4 và 5 thực chất là chúng ta đã sử dụng phép nâng lũy thừa ở hai ý nghĩa "ngược" và "thuận".

Ví dụ 6. Giải phương trình $x\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x+17}\right)^2 = 16$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích hướng giải. Bài toán này có chứa một hiệu bình phương và hình thức phương trình là một phương trình không quen thuộc. Bây giờ ta sẽ sử dụng phép nâng lũy thừa này như nào? Nếu ta sử dụng trực tiếp thì ta sẽ tạo cho phương trình bậc còn cao hơn bậc ban đầu.

Ta để ý rằng: $16 = \left(\sqrt{2x+17}-\sqrt{2x+1}\right)\left(\sqrt{2x+17}+\sqrt{2x+1}\right)$.

Với biến đổi này ta thấy số 16 có chứa hằng đẳng thức. Do đó ta sẽ biến đổi để làm vế trái phương trình giảm sự phức tạp bằng những biến đổi xuất phát từ nhận xét đã chỉ ra.

Cách giải: Điều kiện $\begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ 2x+17 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0$

Với $x=0$ không thỏa phương trình nên ta chỉ cần xét $x>0$.
Lúc đó phương trình đã cho được biến đổi trở thành:
$x\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x+17}\right)^2\left(\sqrt{2x+17}-\sqrt{2x+1}\right)^2 = 16\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x+17}\right)^2$
$\Leftrightarrow 16x = \left(\sqrt{2x+17}-\sqrt{2x+1}\right)^2 \Leftrightarrow 6x-9 = \sqrt{4x^2+36x+17}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x-9 \geq 0 \\ (6x-9)^2 = 4x^2+36x+17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{3}{2} \\ 32x^2-144x+64=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=4.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của phương trình là $x=4$. ■

-Bình luận. Bài toán này, một lần nữa khẳng định sự mạnh mẽ của việc phương trình vô tỷ có chứa hằng đẳng thức và đưa về phương trình cơ bản thì phép nâng lũy thừa sẽ là lựa chọn ưu tiên. Điều đặc biệt của bài toán đó chính là việc biểu diễn 16 dưới dạng hằng đẳng thức.

Ví dụ 7. Giải phương trình $\sqrt{2x^2+8x+6}+\sqrt{x^2-1} = 2(x+1)$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích hướng giải. Quan sát bài toán này, việc đầu tiên muốn sử dụng nâng lũy thừa thì ta hoặc lũy thừa trực tiếp phương trình đã cho hoặc chuyển bớt căn thức sang vế phải rồi lũy thừa. Các phép biến đổi này đều thực hiện được, tuy nhiên nếu quan sát phương trình ta thấy ngay được phương trình giữa các đại lượng có một nghiệm chung $x=-1$. Do đó ta có thể giản ước được độ phức tạp giữa các đại lượng để đưa về phương trình cơ bản.

Cách giải: Điều kiện $\begin{cases} 2x^2+8x+6 \geq 0 \\ x^2-1 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 1 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Với $x=-1$ phương trình đã cho được nghiệm đúng.
Với $x \geq 1$, ta biến đổi phương trình đã cho tương đương với phương trình:
$\sqrt{2(x+1)(x+3)}+\sqrt{(x-1)(x+1)} = 2\sqrt{(x+1)^2} \Leftrightarrow \sqrt{2(x+3)}+\sqrt{x-1} = 2\sqrt{x+1}$
$\Leftrightarrow 3x+5+2\sqrt{2(x+3)(x-1)} = 4(x+1) \Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2+4x-6} = x-1$

$$\Leftrightarrow 4\left(2x^2+4x-6\right) = x^2-2x+1 \Leftrightarrow 7x^2+18x-25=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\dfrac{25}{7}. \end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện $x \geq 1$ ta có $x=1$.
Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=\pm 1$. ■

-Bình luận. Việc phát hiện ra nghiệm chung, giúp chúng ta sử dụng phép lũy thừa cho một bài toán cơ bản và hình thức gọn nhẹ hơn so với bài toán ban đầu.

Ví dụ 8. Giải phương trình $\sqrt[3]{x+2}-\sqrt{x-1} = \sqrt[3]{2x+1}$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích hướng giải. Bài toán có chứa hai căn bậc leach, thường bài toán cho dưới hình thức này thì thường phép nâng lũy thừa ít được tính đến. Nhưng quan sát thấy phương trình chứa hai căn bậc ba

nên ta có thể ghép chúng lại với nhau rồi sử dụng phép nâng lũy thừa.
Cách giải: Điều kiện $x \geq 1$.
Với $x = 1$, phương trình đã cho được nghiệm đúng.
Với $x > 1$, phương trình đã cho được biến đổi.
$\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{2x+1} = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{2x+1}\right)^3 = (x-1)\sqrt{x-1}$
$\Rightarrow 1 - x - 3\sqrt[3]{(2x+1)(x+2)}\sqrt{x-1} = (x-1)\sqrt{x-1}$
$\Leftrightarrow (x-1)\sqrt{x-1} + \left(\sqrt{x-1}\right)^2 + 3\sqrt[3]{(2x+1)(x+2)}\sqrt{x-1} = 0$
$\Leftrightarrow x - 1 + \sqrt{x-1} + 3\sqrt[3]{(2x+1)(x+2)} = 0(1)$.
Nhận xét với $x > 1$ thì $x - 1 + \sqrt{x-1} + 3\sqrt[3]{(2x+1)(x+2)} > 0$.
Do đó (1) vô nghiệm. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$. ■
-Bình luận. Với hình thức phương trình đã cho ta có thể nghĩ khó có thể sử dụng phép nâng lũy thừa, nhưng ta thấy qua lời giải thì bài toán có hai căn bậc leach nhưng có dấu hiệu đặc biệt ta hoàn toàn có thể sử dụng phương pháp nâng lũy thừa để giải quyết. Bài toán này có thể có cách giải ngắn gọn hơn nhưng bằng kỉ năng lũy thừa cơ bản ta vẫn có thể giải bài toán một cách tự nhiên và đẹp.

Ví dụ 9. Giải phương trình $\sqrt{x+5} - \sqrt{3x+4} = \sqrt{x+10} - \sqrt{3x+7}$.

✍ Lời giải.
-Phân tích hướng giải. Bài toán có chứa bốn căn bậc hai, theo nguyên tắc thì ta vẫn có thể sử dụng phép nâng lũy thừa để giải quyết. Tuy nhiên nếu ta khéo léo một chút bằng sự cảm nhận giữa các đại lượng thì khi nâng lũy thừa ta sẽ thu được một phương trình gọn gàng và đẹp hơn. Quan sát bài toán ta nhận thấy giữa các đại lượng trong phương trình ở cả hai vế đều chứa x và 3x và để tiện lợi trong phép nâng lũy thừa ta nên chuyển các dấu trừ thành dấu cộng.
Cách giải: Điều kiện $x \geq -\dfrac{3}{4}$. Lúc đó phương trình đã cho trở thành:
$\sqrt{x+5} + \sqrt{3x+7} = \sqrt{x+10} + \sqrt{3x+4} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+5} + \sqrt{3x+7}\right)^2 = \left(\sqrt{x+10} + \sqrt{3x+4}\right)^2$
$\Leftrightarrow 4x + 12 + 2\sqrt{3x^2 + 22x + 35} = 4x + 14 + 2\sqrt{3x^2 + 34x + 40}$
$\Leftrightarrow \sqrt{3x^2 + 22x + 35} = 1 + \sqrt{3x^2 + 34x + 40}$
$\Leftrightarrow 3x^2 + 22x + 35 = 3x^2 + 34x + 41 + 2\sqrt{3x^2 + 34x + 40}$

$$\Leftrightarrow -6x - 3 = \sqrt{3x^2 + 34x + 40} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x - 3 \geq 0 \\ (6x+3)^2 = 3x^2 + 34x + 40 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\dfrac{1}{2} \\ 33x + 2x - 31 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của phương trình là $x = -1$. ■
-Bình luận. Với sự nhận xét tinh tế giữa các đại lượng có trong phương trình thì ta sẽ giải quyết bài toán gọn gàng và đẹp hơn. Đó là một trong những điểm đáng lưu ý trong các phương trình chứa bốn căn bậc hai mà khi ta sử dụng phép nâng lũy thừa để giải quyết nó.

Ví dụ 10. Giải phương trình $2\sqrt{2(x^5 - x^4 + x^3 + 1)} = 2x^3 - x^2 + 3$

✍ Lời giải.
-Phân tích hướng giải. Phương trình này có hình thức rất quen thuộc, nhưng điều quan ngại là cả đại lượng trong căn thức và ngoài căn thức đều chứa bậc cao. Do đó để có thể nắm chắc lời giải này bằng phép nâng lũy thừa, thì điều quan trọng lúc này cũng chính là chúng ta đi tìm hiểu nghiệm của nó thế nào? Sử dụng máy tính ta biết được phương trình này có hai nghiệm $x = 1$; $x = -\dfrac{1}{2}$. Mặt khác khi nâng lũy thừa ta sẽ thu được phương trình bậc 6, với hai nghiệm đã biết thì trong quá trình phân tích

ta sẽ còn phương trình bậc 4, phương trình này quen thuộc hơn nên bây giờ ta mới tự tin dùng phép nâng lũy thừa để giải quyết bài toán.

Cách giải:

$$2\sqrt{2\left(x^5-x^4+x^3+1\right)}=2x^3-x^2+3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3-x^2+3\geq 0 \\ 8\left(x^5-x^4+x^3+1\right)=\left(2x^3-x^2+3\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3-x^2+3\geq 0 \\ 4x^6-12x^5+9x^4+ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3-x^2+3\geq 0 \\ (x-1)^4(2x+1)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=1$; $x=-\dfrac{1}{2}$. ■

-Bình luận. Với những phương trình cơ bản có chứa các đại lượng bậc cao, nếu nghiệm của phương trình "đẹp" thì ta vẫn có khả năng dùng phép nâng lũy thừa để giải quyết trọn vẹn bài toán.

Với 10 ví dụ vừa phân tích và bình luận trên, chúng tôi hi vọng đã mở ra cho quý độc giả có cái nhìn tổng quan cho một phương trình giải bằng phương pháp nâng lũy thừa bao gồm những tư duy và đánh giá nào cần có ngoài những bài toán cơ bản. Bây giờ vấn đề đặt ra là với những bài toán mà khi sử dụng phép nâng lũy thừa tạo cho chúng ta những biến đổi phức tạp hoặc không thể dùng phép nâng lũy thừa để giải quyết thì chúng ta sẽ giải quyết nó bằng phương pháp nào? Mời các độc giả chuyển sang câu hỏi thứ 2 của chúng tôi.

2. Khi nào nên sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ?

Phương pháp giải phương trình vô tỷ bằng ẩn phụ hóa là một phương pháp vô cùng quan trọng, có đôi lúc khi gặp phương trình vô tỷ mà ta không thể dùng phép nâng lũy thừa bởi vì có thể là do không giải được hoặc giải được nhưng lại rắc rối. khi đó có thể nếu ta ẩn phụ hóa sẽ được một lời giải gọn hơn. Tuy nhiên, ngoài những định dạng cụ thể để ẩn phụ hóa ở phương pháp thì ta cần phải xác định rõ xem bài toán đang xét nên ẩn phụ hóa bằng cách nào là thuận tiện nhất. Để ẩn phụ hóa một phương trình vô tỷ thành công thì điều quyết định đó chính là tìm ra các mối liên quan giữa các đại lượng trong bài toán được gắn kết với nhau thế nào. Mặt khác các phép biến đổi ẩn phụ hóa phải đưa được về phương trình có lối thoát nhất định, thường gặp đó chính là các phương trình tách nhân tử, các phương trình đa thức quen thuộc, phương trình đẳng cấp, hệ phương trình giải bằng phương án thế hoặc hệ đối xứng hoặc hệ có lối đi đánh giá nào đó. Để hiểu rõ hơn ta xem xét các ví dụ sau:

Ví dụ 1. Giải phương trình $x^2+\sqrt[3]{x^4-x^2}=2x+1$

-Phân tích hướng giải. Với phương trình này, ta sẽ bắt bầu tìm các mối liên quan giữa các đại lượng với nhau để từ đó có thể ẩn phụ hóa thành công. Ta để ý rằng: $x^4-x^2=x^3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$. Khi đó ta để ý thấy được rằng nếu phương trình có nghiệm thì nghiệm đó buộc phải khác 0. Ngoài ra từ sự biến đổi này ta thấy sự xuất hiện của số 1 trong căn và ngoài căn làm ta liên tưởng đến phép chia hai vế phương trình cho $x\neq 0$, ta thu được phương trình:

$$x+\sqrt[3]{x-\frac{1}{x}}=2+\frac{1}{x} \Leftrightarrow x-\frac{1}{x}+\sqrt[3]{x-\frac{1}{x}}=2$$

Rõ ràng đến nay ta đã thấy được sự liên quan giữa các đại lượng trong phương trình nên ta hoàn toàn có thể ẩn phụ hóa để giải phương trình này.

Cách giải:

Với $x=0$ phương trình đã cho không thỏa.

Với $x\neq 0$ ta biến đổi phương trình đã cho trở thành:

$$x^2+\sqrt[3]{x^3\left(x-\frac{1}{x}\right)}=2x+1 \Leftrightarrow x^2+x\sqrt[3]{x-\frac{1}{x}}=2x+1$$

$$\Leftrightarrow x+\sqrt[3]{x-\frac{1}{x}}=2+\frac{1}{x} \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{x}\right)+\sqrt[3]{x-\frac{1}{x}}-2=0(1)$$

Đặt $t=\sqrt[3]{x-\frac{1}{x}}$. Lúc đó (1) trở thành:
$t^3+t-2=0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2+t+2)=0 \Leftrightarrow t=1$.
$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x-\frac{1}{x}}=1 \Leftrightarrow x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$
Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.
-Bình luận. Lối đi tìm mối liên quan giữa các đại lượng ở phương trình này là một hướng đi rất quen thuộc trong những lối đi tìm ẩn phụ ở các bài toán phương trình vô tỷ trong các kì thi. Việc phát hiện ra chia hai vế phương trình cho biến x để tìm ẩn phụ hóa xuất phát từ ý tưởng các hệ số đối xứng, thể hiện rõ trong bài toán này chính là số 1.
Ví dụ 2. Giải phương trình $5(x^2+3x+5)=3\sqrt[3]{x^4-15x^2+25}$.
-Phân tích hướng giải. Quan sát bài toán này, ta thấy hình thức phương trình rất quen thuộc nhưng nếu ta dùng phương án lũy thừa để giải quyết sẽ rất khó đạt được kết quả khả thi phương trình tạo ra sẽ là phương trình bậc 6 có nghiệm vô tỷ. Do đó để giải bài toán này, ta thử xem có thể ẩn phụ hóa được không?
Ta cần tìm các mối liên quan giữa các đại lượng có trong phương trình.
Nhận xét rằng: $x^4-15x^2+25=(x^4+10x^2+25)-25x^2=(x^2+5)^2-(5x)^2=(x^2+5x+5)(x^2-5x+5)$
Tới nay, ta thấy được đại lượng trong căn thức được biểu diễn thành tích. Do đó ta thử tìm hiểu xem đại lượng ngoài căn thức có liên quan gì đến tích này không? Thông qua xác định các hệ số bất định m, n để có được phân tích sau: $5x^2+15x+25=m(x^2+5x+5)+n(x^2-5x+5)$
$\Leftrightarrow 5x^2+15x+25=(m+n)x^2+5(m-n)x+5(m+n)\ (*)$

Đồng nhất hệ số hai vế của (*) ta thu được: $\begin{cases} m+n=5 \\ m-n=3 \\ m+n=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=4 \\ n=1. \end{cases}$

Điều đó có nghĩa là: $5x^2+15x+25=4(x^2+5x+5)+(x^2-5x+5)$.
Tới nay xem như ta đã thực sự thành công trong việc tìm ra mối liên quan giữa các đại lượng có trong phương trình với nhau.
Cách giải: Phương trình đã cho được biến đổi thành phương trình:
$4(x^2+5x+5)+(x^2-5x+5)=3\sqrt[3]{(x^2+5x+5)(x^2-5x+5)}$
$\Leftrightarrow 4\left(\frac{x^2+5x+5}{x^2-5x+5}\right)+1=3\sqrt[3]{\frac{x^2+5x+5}{x^2-5x+5}}$(1) vì $x^2-5x+5>0,\ \forall x$.
Đặt $t=\sqrt[3]{\frac{x^2+5x+5}{x^2-5x+5}}$, khi đó phương trình (1) trở thành:

$4t^3-3t+1=0 \Leftrightarrow (t+1)(4t^2+4t+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Với $t=-1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{x^2+5x+5}{x^2-5x+5}}=-1 \Leftrightarrow x^2+5=0$ (vô nghiệm).
Với $t=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{x^2+5x+5}{x^2-5x+5}}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 7x^2+45x+35=0 \Leftrightarrow x=\frac{-45\pm\sqrt{1045}}{14}$.
Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=\frac{-45\pm\sqrt{1045}}{14}$.
-Bình luận. Việc tìm hệ số bất định để gắn kết các đại lượng trong phương trình với nhau để tạo ẩn phụ hóa là một hướng đi rất quen thuộc và quan trọng trong lối đi ẩn phụ hóa. Để sử dụng được điều này, ta cần tách được đại lượng trong căn thức thành tích, việc tách tích này thường dựa vào hằng đẳng

thức hoặc biết trước nghiệm của phương trình. Tuy nhiên nếu sau khi bước tách tích mà ta không tìm được hệ số bất định gắn kết đại lượng còn lại theo hai thừa số có trong tích tách được thì đó có khả năng là phương trình đó không giải bằng ẩn phụ hóa.

Ví dụ 3. Giải phương trình $\sqrt{2x^2-3x+1}=\dfrac{x^2-1}{2x-3}$.

-Phân tích hướng giải. Quan sát bài toán này, với điều kiện cho phép ta quy đồng sẽ đưa bài toán về dạng quen thuộc và có thể sử dụng phép nâng lũy thừa để giải quyết bài toán. Tuy nhiên, ta hãy thử với phương pháp ẩn phụ hóa bài toán này, ta sẽ thu được những kiến thức gì và lời giải cho nó được tư duy thế nào để gắn kết mối liên quan giữa các đại lượng với nhau.

Ta có: $2x^2-3x+1=x(2x-3)+1$.

Khi đó nếu $t=\sqrt{x(2x-3)+1}\Rightarrow x(2x-3)=t^2-1$.

Khi đó kết hợp với phương trình ta sẽ thu được hệ phương trình:

$$\begin{cases} t^2-1=x(2x-3) \\ x^2-1=t(2x-3) \end{cases}$$

Hệ thu được là một hệ đối xứng loại 2 quen thuộc. Vậy xem như việc tìm sự liên quan giữa các đại lượng có trong phương trình đã hoàn tất.

Cách giải: Điều kiện $\begin{cases} 2x^2-3x+1\ge 0 \\ \dfrac{x^2-1}{2x-3}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1\le x\le \dfrac{1}{2} \\ x>\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

Đặt $t=\sqrt{x(2x-3)+1}$,$t\ge 0\Rightarrow x(2x-3)=t^2-1$.

Khi đó kết hợp với phương trình ta sẽ thu được hệ phương trình:

$$\begin{cases} t^2-1=x(2x-3)\,(1) \\ x^2-1=t(2x-3)\,(2) \end{cases}$$

Lấy (1) – (2) vế theo vế ta thu được phương trình:

$$t^2-x^2=(2x-3)(x-t)\Leftrightarrow (t-x)(t+3x-3)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=x \\ t=3-3x \end{array}\right.$$

Với $t=x\Rightarrow \sqrt{2x^2-3x+1}=x\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2-3x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Với $t=3-3x\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-3x+1}=3-3x\Leftrightarrow \begin{cases} x\le 1 \\ 7x^2-15x+8=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$.

Đối chiếu điều kiện của x, t ta có nghiệm $x=\left\{\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2};1\right\}$.

-Bình luận. Việc đặt ẩn phụ hóa kết hợp với phương trình đưa về hệ phương trình giải bằng các phương pháp cơ bản là một trong những lối đi cũng khá phổ biến trong các bài toán phương trình vô tỷ.

Ví dụ 11. Giải phương trình $\sqrt{x^2+3x+6}+\sqrt{2x^2-1}=3x-1$.

Lời giải.

-Phân tích hướng giải. Quan sát bài toán ta thấy bài toán có chứa hai căn thức nhưng các đại lượng trong các căn thức liên hệ với nhau không có "thân tình" với đại lượng còn lại ở vế phải của phương

trình nên ta không thể ẩn phụ hóa hai căn thức để rồi biểu diễn đại lượng còn lại theo ẩn phụ được. Do đó để có thể tìm được mối liên quan giữa các đại lượng với nhau trong bài toán ta cần phải thoát căn thức để làm giảm độ phức tạp của bài toán. Để thoát căn thức thì phép nâng lũy thừa là ưu tiên hàng đầu.
Dùng phép nâng lũy thừa ta biến đổi phương trình về phương trình:
$x^2+3x+6=11x^2+6x-2\left(3x+1\right)\sqrt{2x^2-1}$
$\Leftrightarrow 2\left(3x+1\right)\sqrt{2x^2-1}=10x^2+3x-6$
Phương trình vừa biến đổi chỉ chứa một căn thức nên ta hoàn toàn có thể sử dụng phép nâng lũy thừa một lần nữa để giải phương trình bậc 4. Tuy nhiên hướng đi này, chúng ta sẽ tìm hiểu tiếp theo ở phần sau. Vấn đề bây giờ là ta đi tìm các mối liên quan giữa các đại lượng có trong phương trình với đại lượng chứa trong căn thức.
Ta có: $10x^2+3x-6=4\left(2x^2-1\right)+2x^2+3x-2$.
Khi đó nếu ta đặt $t=\sqrt{2x^2-1}$ thì phương trình vừa có được sau phép nâng lũy thừa trở thành phương trình: $4t^2-2\left(3x+1\right)t+2x^2+3x-2=0$
Xem phương trình này là phương trình bậc hai theo biến t thì phương trình có biệt thức $\Delta=\left(3x+1\right)^2-4\left(2x^2+3x-2\right)=\left(x-3\right)^2$.
Điều này có nghĩa rằng phương trình bậc hai theo t hoàn toàn tách được nhân tử. Vậy đến nay ta đã kết thúc bước đi tìm mối liên quan giữa các đại lượng với nhau.
Cách giải: Điều kiện $2x^2-1\geq 0\Leftrightarrow x\leq -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vee x\geq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Phương trình đã cho được biến đổi thành:
$\sqrt{x^2+3x+6}=3x-1-\sqrt{2x^2-1}\Rightarrow x^2+3x+6=\left(3x-1-\sqrt{2x^2-1}\right)^2$
$\Leftrightarrow x^2+3x+6=11x^2+6x-2\left(3x+1\right)\sqrt{2x^2-1}$
$\Leftrightarrow 2\left(3x+1\right)\sqrt{2x^2-1}=10x^2+3x-6$
$\Leftrightarrow 4\left(2x^2-1\right)-2\left(3x+1\right)\sqrt{2x^2-1}+2x^2+3x-2=0(1)$
Đặt $t=\sqrt{2x^2-1}$, $t\geq 0$. Lúc đó phương trình (1) trở thành:
$4t^2-2\left(3x+1\right)t+2x^2+3x-2=0(2)$
Phương trình (2) có biệt số: $\Delta=\left(3x+1\right)^2-4\left(2x^2+3x-2\right)=\left(x-3\right)^2$
Suy ra phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt: $\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{3x+1+x-3}{4}=\dfrac{2x-1}{2}\\ t=\dfrac{3x+1-x+3}{4}=\dfrac{x+2}{2}\end{array}\right.$
Với $t=\dfrac{2x-1}{2}\Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2-1}=2x-1\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x\geq\dfrac{1}{2}\\ 4x^2+4x-5=0\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\dfrac{-1+\sqrt{6}}{2}$.
Với $t=\dfrac{x+2}{2}\Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2-1}=x+2\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x\geq -2\\ 7x^2-4x-8=0\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\dfrac{2\pm 2\sqrt{5}}{7}$.
Đối chiếu điều kiện và thử lại ta có nghiệm: $x=\left\{\dfrac{2+2\sqrt{5}}{7};\dfrac{-1+\sqrt{6}}{2}\right\}$. ■

-Bình luận. Đây là hướng đi ẩn phụ hóa không hoàn toàn hay còn gọi là sử dụng biệt số Delta chính phương để tách nhân tử của phương trình, một trong những phương án cũng thường gặp trong kì thi hoặc ở một lớp bài toán phương trình vô tỷ. Phương pháp này, cần có những kỉ năng biến đổi thích hợp và khéo léo giữa các đại lượng để có thể tìm được biệt số Delta chính phương thành công.Trong các phần phân tích sau chúng ta sẽ biết cách để đạt được điều đó ta cần qua những bước phân tích cơ sở nào. Và lối đi trong bài toán là tìm ẩn phụ sau một phép biến đổi nâng lũy thừa cũng là một lối đi mà ta thường sử dụng khi cần ẩn phụ hóa.

Ví dụ 12. Giải phương trình $7(x-2)\sqrt{2x-1}+(11-8x)\sqrt{4-x}+6=5\sqrt{-2x^2+9x-4}-2x$.

Lời giải.

-Phân tích hướng giải. Quan sát phương trình ta thấy phương trình chứa ba căn thức, trong đó có hai căn thức chứa căn bậc nhất và một căn thức chứa tam thức bậc hai. Với phương trình phép nâng lũy thừa xem như thất bại. Vậy ta sẽ chuyển hướng tìm mối quan hệ giữa các đại lượng để tìm cách ẩn phụ hóa.

Trước tiên ta quan tâm đến hai đại lượng bậc nhất và đại lượng tam thức bậc hai có liên quan gì đặc biệt không?

Ta có: $-2x^2+9x-4=(2x-1)(4-x)$.

Với nhận xét này, ta có thể ẩn phụ hóa cả hai căn thức hoặc một căn thức, tuy nhiên quan sát thấy hệ số đứng trước các căn thức chứa đại lượng bậc nhất không có sự tương đồng nên ta không nên đặt một ẩn phụ mà là cả hai ẩn phụ và sử dụng tìm hệ số bất định để gắn kết các đại lượng lại với nhau theo ẩn phụ.

Cách giải: Điều kiện $\begin{cases} 2x-1\geq 0 \\ 4-x\geq 0 \\ -2x^2+9x-4\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\leq x\leq 4$.

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{2x-1} \\ v=\sqrt{4-x} \end{cases}, u,v\geq 0$.

Khi đó ta có: $7(x-2)=2u^2-3v^2$, $11-8x=-3u^2+2v^2$, $2x+6=2u^2+2v^2$.

Lúc đó phương trình đã cho trở thành:

$2u^3-3u^2v-3uv^2+2v^3=-(2u^2-5uv+v^2)$ (1).

Nhận xét rằng vế trái và vế phải của (1) đều là phương trình đẳng cấp.

Do đó ta xét các khả năng.

Với $v=0\Rightarrow u=0$, không thỏa phương trình đã cho.

Với $u,v>0$, đặt $u=kv$ $(k>0)$. Khi đó (1) trở thành:

$(2k^3-3k^2-3k+2)v^3=-(2k^2-5k+2)v^2$

$\Leftrightarrow (k+1)(2k^2-5k+2)v^3=-(2k^2-5k+2)v^2$

$\Leftrightarrow (2k^2-5k+2)[(k+1)v+1]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=\dfrac{1}{2} \\ k=2 \end{array}\right.$ vì $(k+1)v+1>0$

Với $k=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \sqrt{2x-1}=\dfrac{1}{2}\sqrt{4-x}\Leftrightarrow 2x-1=\dfrac{1}{4}(4-x)\Leftrightarrow x=\dfrac{8}{9}$.

Với $k=2\Leftrightarrow \sqrt{2x-1}=2\sqrt{4-x}\Leftrightarrow 2x-1=4(4-x)\Leftrightarrow x=\dfrac{17}{6}$.

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm $x=\left\{\dfrac{8}{9};\dfrac{17}{6}\right\}$.

-Bình luận. Bài toán này là bài toán có lối ẩn phụ hóa rất thường gặp trong phương trình vô tỷ. Bài toán có chứa $f(x)$, $g(x)$ và $f(x).g(x)$. Có thể phát triển bài toán này theo nhiều góc độ khác nhau và ứng với mỗi góc độ ta sẽ có lối đi ẩn phụ hóa phù hợp và điều đó lệ thuộc nhiều vào cách nhìn và biến đổi của người giải. Chúng ta sẽ có rất nhiều bài toán để có luyện tập cho bài toán này.

Ví dụ 13. Giải phương trình $\sqrt{x^2-x+1}=\dfrac{x^3+2x^2-3x+1}{x^2+2}$.

✍ **Lời giải.**
-Phân tích hướng giải. Bài toán này có nhiều lối đi khác nhau, ở nay ta quan sát bài toán dưới cái nhìn ẩn phụ hóa. Vế phải phương trình là một phân thức có tử là một đa thức bậc 3 và mẫu là một tam thức bậc 2, còn vế trái chứa một căn thức mà bên trong là một đại lượng bậc 2 nên ta thử biến đổi khéo léo các đại lượng tử và mẫu của phân số với đại lượng trong căn thức xem thế nào?
Ta có: $x^3+2x^2-3x+1=(x+3)\left(x^2-x+1\right)-(x+2)$.
Mặt khác: $x^2+2=\left(x^2-x+1\right)+x+1$.
Khi đó với $t=\sqrt{x^2-x+1}$ thì phương trình đã cho trở thành:
$\left(t^2+x+1\right)t=(x+3)\,t^2-(x+2)\Leftrightarrow t^3-(x+3)\,t^2+(x+1)\,t+x+2=0(1)$
Xem phương trình (1) là phương trình bậc ba theo biến t, ta sẽ cố gắng bắt nhân tử bằng cách đoán nghiệm dựa trên hệ số hoặc bằng kỉ thuật thêm bớt. Ta để ý rằng với các hệ số ở phương trình (1) thì việc đoán nghiệm dạng $k.x$ với k là số thực khác không là điều không dễ nên ta sẽ nghĩ đến việc có khi nghiệm mà ta cần đoán có thể ở dạng $t=ax+b$. Mà điều này là không dễ dàng nên để đi tìm nghiệm này thì ta sẽ cố gắng tách phương trình (1) sao cho có nhân tử $t-ax-b=0$.
Thật vậy ta biến đổi (1) ta có:
$t^3-(x+3)\,t^2+(x+1)\,t+x+2=0$
$\Leftrightarrow t\left(t^2-t-1\right)-x\left(t^2-t-1\right)-2\left(t^2-t-1\right)=0\Leftrightarrow\left(t^2-t-1\right)(t-x-2)=0.$
Tới nay ta đã thành công trong việc biểu diễn ẩn phụ theo các đại lượng liên quan trong phương trình dù không triệt để hết.
Cách giải: Đặt: $t=\sqrt{x^2-x+1},\ t\geq 0$.
Lúc đó phương trình đã cho được viết lại:
$\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2-x+1}=x^3+2x^2-3x+1$
$\Leftrightarrow\left(x^2-x+1+x+1\right)\sqrt{x^2-x+1}=(x+3)\left(x^2-x+1\right)-(x+2)$
$\Leftrightarrow\left(t^2+x+1\right)t=(x+3)\,t^2-(x+2)\Leftrightarrow t^3-(x+3)\,t^2+(x+1)\,t+x+2=0$
$\Leftrightarrow t\left(t^2-t-1\right)-x\left(t^2-t-1\right)-2\left(t^2-t-1\right)=0\Leftrightarrow\left(t^2-t-1\right)(t-x-2)=0$
$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t^2-t-1=0\\ t=x+2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{1-\sqrt5}{2}\\ t=\dfrac{1+\sqrt5}{2}\\ t=x+2\end{array}\right.$. Đối chếu điều kiện ta có: $\left[\begin{array}{l}t=x-2\\ t=\dfrac{1+\sqrt5}{2}\end{array}\right.$.
Với $t=\dfrac{1+\sqrt5}{2}\Leftrightarrow\sqrt{x^2-x+1}=\dfrac{1+\sqrt5}{2}\Leftrightarrow x^2-x-\dfrac{1+\sqrt5}{2}=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{3+2\sqrt5}}{2}$.
Với $t=x+2\Leftrightarrow\sqrt{x^2-x+1}=x+2\Leftrightarrow\begin{cases}x+2\geq 0\\ x^2-x+1=(x+2)^2\end{cases}\Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{5}$.
Đối chiếu điều kiện ta có tập nghiệm $T=\left\{\dfrac{1\pm\sqrt{3+2\sqrt5}}{2};-\dfrac{3}{5}\right\}$. ■
-Bình luận. Qua bài toán này đã giúp chúng ta thấy được tầm quan trọng của việc biến đổi khéo léo giữa ẩn phụ và các đại lượng liên quan đôi lúc phép biến đổi đó rất triệt để nhưng cũng có đôi lúc phép biến đổi đó không triệt để được, Vì vậy tầm quan trọng của ẩn phụ hóa mà chúng tôi đề cập ở trên đó chính là cần phải tìm được mối liên quan giữa ẩn phụ và đại lượng có trong phương trình.

Ví dụ 14. Giải phương trình $x^3+2x^2-9x+3=\left(3x^2-3x-5\right)\sqrt{x-1}$.

✍ **Lời giải.**
-Phân tích hướng giải. Phương trình này có hình thức khá giống với phương trình vừa xét, nhưng ta không thể ứng dụng được lối giải của bài toán vừa xét vào bài toán này vì đại lượng trong căn chỉ là bậc nhất, việc tạo ra các biểu thức liên quan sẽ rắc rối. Có 1 điều rất tự nhiên trong phương trình vô tỷ đó là nếu trong phương trình chỉ chứa một căn thức có đại lượng bậc nhất thì khi muốn ẩn phụ hóa

ta chỉ cần đặt t bằng căn thức. Khi đó ta cần thêm yếu tố về nghiệm của phương trình để có thể tự tin về ẩn phụ hóa. Đối với phương trình này, sử dụng máy tính ta biết được phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 2$. Điều này giúp chúng ta khẳng định được mạnh mẽ hơn việc ẩn phụ hóa phương trình này.
Cách giải: Điều kiện $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.
Đặt $t = \sqrt{x-1}$, $t \geq 0$. Lúc đó ta có: $x = t^2 + 1$.
Do đó phương trình đã cho được biến đổi thành:
$(t^2+1)^3 + 2(t^2+1)^2 - 9(t^2+1) + 3 = \left[3(t^2+1)^2 - 3(t^2+1) - 5\right] t$
$\Leftrightarrow t^6 - 3t^5 + 5t^4 - 3t^3 - 2t^2 + 5t - 3 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^5 - 2t^4 + 3t^3 - 2t + 3) = 0(1)$
Nhận xét rằng với$t \geq 0$ thì ta có:
$t^5 - 2t^4 + 3t^3 - 2t + 3 = t^3(t-1)^2 + 2t^3 - 2t + 3 = t^3(t-1)^2 + (t+2)(t-1)^2 + t^3 + t + 1 > 0$
Do đó (1) cho ta: $t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 2$.
Đối chiếu điều kiện ta có được nghiệm là $x = 2$. ■

-Bình luận. Qua bài toán này ta nhận thấy rằng nếu phương trình có chứa một căn thức mà căn thức đó chứa đại lượng bậc nhất, cùng với nghiệm của phương trình tìm được bằng máy tính là "đẹp" thì ta hoàn toàn có thể ẩn phụ hóa bài toán thành công. Đây cũng chính là lối đi thường gặp trong các bài toán thi.

Ví dụ 15. Giải phương trình $\sqrt[3]{7x+1} - \sqrt[3]{x^2-x-8} + \sqrt[3]{x^2-8x-1} = 2$.

✍ Lời giải.

-Phân tích hướng giải. Quan sát bài toán ta thấy bài toán có chứa ba căn thức bậc ba, trong đó có hai căn thức chứa tam thức bậc 2 nên nếu dùng phép lũy thừa cho bài toán này có thể chúng ta sẽ vướng phải những tính toán rắc rối. Do đó, ta chuyển hướng ẩn phụ hóa cho bài toán này.
Trước tiên ta tìm mối liên hệ giữa các đại lượng tham gia phương trình xem chúng ta có được điều gì?
Nhận xét ta có: $(7x+1) + (-x^2+x+8) + (x^2-8x-1) = 8$.

Do đó nếu đặt $\begin{cases} a = \sqrt[3]{7x+1} \\ b = \sqrt[3]{-x^2+x+8} \\ c = \sqrt[3]{x^2-8x-1} \end{cases} \Rightarrow a^3+b^3+c^3 = 8.$

Từ đây kết hợp với phương trình ta có hệ: $\begin{cases} a+b+c = 2 \\ a^3+b^3+c^3 = 8 \end{cases}$

Quan sát hệ này, ta cảm giác được ngay chìa khóa giải quyết bài toán chính là hằng đẳng thức.

Cách giải: Đặt $\begin{cases} a = \sqrt[3]{7x+1} \\ b = \sqrt[3]{-x^2+x+8} \\ c = \sqrt[3]{x^2-8x-1} \end{cases} \Rightarrow a^3+b^3+c^3 = 8.$

Kết hợp với phương trình ta có hệ: $\begin{cases} a+b+c = 2 \\ a^3+b^3+c^3 = 8 \end{cases}$.

Lại có: $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$.

Suy ra: $(a+b)(b+c)(c+a)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b \\ b=-c \\ c=-a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{7x+1}=-\sqrt[3]{-x^2+x+8} \\ \sqrt[3]{-x^2+x+8}=-\sqrt[3]{x^2-8x-1} \\ \sqrt[3]{x^2-8x-1}=-\sqrt[3]{7x+1} \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-8x+9=0 \\ 7x=7 \\ x^2-x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x=9 \\ x=0 \end{array}\right.$$

Thử lại ta có tập nghiệm của phương trình là $T=\{-1;1;9\}$. ■

-Bình luận. Hệ phương trình chúng ta thu được giải quyết bằng hằng đẳng thức và thế, một trong những hướng giải quyết cũng thường gặp trong quá trình ẩn phụ hóa phương trình.

Ví dụ 16. Giải phương trình $2\left(4\sqrt{x+\sqrt{x^2+2}}-3\right)+\sqrt[3]{4\left(-x+\sqrt{x^2+2}\right)}=0.$

✍ **Lời giải.**

-Phân tích hướng giải. Bài toán thoạt nhìn ta thấy hết sức rối mắt vì đã chứa hai căn bậc lệch lại còn các đại lượng dưới căn thức lại chứa căn. Tuy nhiên quan sát một chút và đủ tinh ý trong đại số, ta sẽ thấy rằng hai đại lượng chứa trong hai căn thức có gắn kết với nhau.

Thật vậy ta có: $\left(x+\sqrt{x^2+2}\right).\left(-x+\sqrt{x^2+2}\right)=2.$

Từ đó ta nghĩ đến nếu ta đặt $t=x+\sqrt{x^2+2} \Rightarrow -x+\sqrt{x^2+2}=\dfrac{2}{t}.$

Vậy là xem như mối liên hệ gĩa đại lượng có trong phương trình và ẩn phụ hóa đã hoàn tất.

Cách giải: Đặt $t=x+\sqrt{x^2+2} \Rightarrow -x+\sqrt{x^2+2}=\dfrac{2}{t}$.

Lúc đó phương trình đã cho trở thành phương trình:

$2\left(4\sqrt{t}-3\right)=\sqrt[3]{\dfrac{8}{t}} \Leftrightarrow 2\left(4\sqrt{t}-3\right)=\dfrac{2}{\sqrt[3]{t}} \Leftrightarrow 4\sqrt{t}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{t}}-3=0(1)$

Lại đặt $u=\sqrt[6]{t}$, $u>0$. Ta có (1) trở thành:

$$4u^3+\frac{1}{u^2}-3=0 \Leftrightarrow 4u^6-3u^2+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u^2=-1 \\ u^2=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. .$$

Đối chiếu điều kiện ta có: $u^2=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt[3]{t}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2^6}.$

Từ đó ta có:

$$x+\sqrt{x^2+2}=\frac{1}{2^6} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le \dfrac{1}{2^6} \\ x^2+2=x^2+\dfrac{1}{2^5}x+\dfrac{1}{2^{12}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le \dfrac{1}{2^6} \\ x=\dfrac{1-2^{13}}{2^7} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1-2^{13}}{2^7}.$$ ■

-Bình luận. Việc phương trình có chứa cặp số mà tích của chúng bằng k số thực thì việc giải quyết nó bằng ẩn phụ là hoàn toàn có thể giải quyết được, một lối đi cũng thường gặp.

Với 9 ví dụ vừa phân tích trên chắc độc giả đã có phần nào về việc trả lời được câu hỏi khi nào giải phương trình vô tỷ bằng ẩn phụ. Theo những gì đã phân tích trên đã cho ta thấy được để giải một phương trình vô tỷ theo hướng ẩn phụ hóa, ta cần nhất chính là sự phát hiện các đại lượng liên quan đến ẩn phụ bằng mối quan hệ nào? Tìm được mối quan hệ này ta sẽ đi được đến lời giải bài toán. Vậy ta có thể khẳng định được rằng các phương trình giải bằng ẩn phụ hóa thì các đại lượng trong phương trình phải có cộng hưởng được với ẩn phụ hoặc triệt để hoặc không triệt để.

1 Khi nào nên sử dụng lượng liên hợp?

Có một lớp bài toán phương trình vô tỷ mà với hai phương pháp đầu ta xét tính không thể giải quyết được vì nó quá phức tạp khi nâng lũy thừa hoặc không tìm được mối tương quan hỗ trợ nào khi muốn ẩn phụ hóa. Nhưng nghiệm của phương trình lại chỉ ra được, khi đó phương pháp nhân lượng liên hiệp sẽ phát huy mạnh vai trò của nó. Bản chất thực sự của phương pháp này là lạm dụng các kỉ năng liên hiệp để bắt nhân tử chung tách tích trong đó có một thừa số trong tích chỉ ra nghiệm của phương trình, còn thừa số còn lại thường ta phải đánh giá nó vô nghiệm hoặc kết hợp với phương trình đầu hoặc dùng kỉ thuật đã biết để tìm nghiệm của nó. Để có thể hiểu rõ hơn và thấy được ưu và nhược điểm của phương pháp này cũng như thực hành lại một lần nữa các kỉ năng liên hợp ta chỉ ra trong phần phương pháp ta xét các ví dụ sau.

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sqrt{x^3+4x}-2=\sqrt{8-x^2}$.

✍ Lời giải.

-Phân tích hướng giải. Bài toán có hình thức đơn giản dễ đánh lừa giác quan của chúng ta giải quyết nó bằng lũy thừa, tuy nhiên qua hai lần lũy thừa để thoát căn thức ta đi đến phương trình bậc 6, một phương trình không phải để thử lửa trong lúc làm bài thi được. Sự xuất hiện của hai căn thức và các đại lượng trong căn thức không có mối liên quan nào cả nên việc ẩn phụ hóa là hoàn toàn không khả thi. Sử dụng máy tính ta biết phương trình này có nghiệm duy nhất $x=2$. Do đó ta sẽ sử dụng phương pháp liên hợp để tạo cho phương trình có dạng $(x-2).f(x)=0$
Ta để ý rằng khi $x=2$ thì ta có: $\sqrt{x^3+4}=4$; $\sqrt{8-x^2}=2$
Từ đó ta đi đến cách giải sau:

Cách giải: Điều kiện $\begin{cases} 8-x^2\geq 0\\ x\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow 0\leq x\leq 2\sqrt{2}$.

Phương trình đã cho được biến đổi thành phương trình:
$\sqrt{x^3+4x}-2=\sqrt{8-x^2} \Leftrightarrow \sqrt{x^3+4x}-4=\sqrt{8-x^2}-2$
$\Leftrightarrow (x-2)\left(\dfrac{x^2+2x+8}{\sqrt{x^3+4x}+4}+\dfrac{x+2}{\sqrt{8-x^2}+2}\right)=0(1)$
Nhận xét: $\dfrac{x^2+2x+8}{\sqrt{x^3+4x}+4}+\dfrac{x+2}{\sqrt{8-x^2}+2}>0$ với $0\leq x\leq 2\sqrt{2}$.
Do đó (1) cho $x-2=0\Leftrightarrow x=2$.
Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x=2$. ■

-Bình luận. Ở bài toán này ta thấy phép nhân liên hợp bắt nhân tử cho lời giải vô cùng đơn giản, cách tạo biểu thức liên hợp đó chính là tìm giá trị của căn thức tại vị trí của nghiệm để từ đó thêm bớt tạo được nhân tử, phần còn lại đánh giá khá đơn giản.

Ví dụ 2. Giải phương trình $x-\sqrt{9-2x^2}=\sqrt{9-x^3}$.

✍ Lời giải.

-Phân tích hướng giải. Bài toán này có hình thức khá giống với phương trình vừa xét, việc sử dụng hai phương án kia chúng ta tạm thời gác lại mà chủ yếu nhấn mạnh vào yếu tố vì sao có thể giải được phương trình này bằng phương pháp nhân lượng liên hợp.
Sử dụng máy tính ta biết phương trình này có nghiệm duy nhất $x=2$.
Mặt khác ta để ý thấy rằng: $x^2-4\left(9-2x^2\right)=9\left(x^2-4\right)$.
Lại có: $\left(9-x^3\right)-\left(9-2x^2\right)=-x^2\left(x-2\right)$. Do đó ta đi đến lời giải sau:

Cách giải: Điều kiện $\begin{cases} 9-2x^2 \geq 0 \\ 9-x^3 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Lúc đó phương trình đã cho được biến đổi thành:

$x-2\sqrt{9-2x^2}=\sqrt{9-x^3}-\sqrt{9-x^2} \Leftrightarrow \dfrac{9\left(x^2-4\right)}{x+2\sqrt{9-2x^2}}=\dfrac{-x^2\left(x-2\right)}{\sqrt{9-x^3}+\sqrt{9-2x^2}}$

$\Leftrightarrow (x-2)\left[\dfrac{9\left(x+2\right)}{x+2\sqrt{9-2x^2}}+\dfrac{x^2}{\sqrt{9-x^3}+\sqrt{9-2x^2}}\right]=0(1)$

Nhận xét: $\dfrac{9\left(x+2\right)}{x+2\sqrt{9-2x^2}}+\dfrac{x^2}{\sqrt{9-x^3}+\sqrt{9-2x^2}}>0$ với $0 \leq x \leq \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Do đó (1) cho $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$. ■

-Bình luận. Bài toán này được liên hợp "một cách rất nội tạng" tức là bản chất phương trình đã chứa sẵn biểu thức liên hợp từ việc nhận định cả hai đại lượng trong căn thức đề chứa số 9 và hệ số của biến giúp tạo ra được nhân tử cần tìm.

Ví dụ 3. Giải phương trình $3\sqrt{2x-1}+x\sqrt{5-4x^2}=4x^2$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích hướng giải. Phương trình này hình thức cho ta biết hai phương pháp mà ta vừa phân tích ở trên hoàn toàn bất lực với phương trình này. Sử dụng máy tính ta biết phương trình này có nghiệm $x=\left\{\dfrac{1}{2};1\right\}$. Do đó ta sẽ cần tìm cách liên hợp để xuất hiện cho được nhân tử chứa hai nghiệm này. Với phương trình này, ta cần tìm nhân tử có dạng là một tam thức bậc hai vì phương trình đã cho có hai nghiệm.

Do đó với hai giá trị của nghiệm ta sẽ thu được hai số a, b thỏa hệ đẳng thức: $3\sqrt{2x-1}-(ax+b)=0$
.

Thay lần lượt hai giá trị nghiệm của phương trình ta thu được $a=6; \text{b}=-3$

Tương tự cho đẳng thức: $\sqrt{5-4x^2}-(cx+d)=0$

Ta sẽ thu được $c=-2; d=3$.

Lúc đó ta sẽ hoàn thiện phương trình bằng cách thêm bớt sao cho phương trình vẫn không đổi và bắt đầu liên hợp.

Cách giải: Điều kiện $\begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ 5-4x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \leq x \leq \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Với $x=\dfrac{1}{2}$, phương trình không thỏa.

Với $\dfrac{1}{2}<x \leq \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, ta biến đổi phương trình đã cho thành:

$3\sqrt{2x-1}-(6x-3)+x\left[\sqrt{5-4x^2}-(3-2x)\right]-3\left(2x^2-3x+1\right)=0$

$\Leftrightarrow -6\dfrac{\left(2x^2-3x+1\right)}{\sqrt{2x-1}+2x-1}-\dfrac{4x\left(2x^2-3x+1\right)}{\sqrt{5-4x^2}+3-2x}-3\left(2x^2-3x+1\right)=0$

$\Leftrightarrow -\left(2x^2-3x+1\right)\left(\dfrac{6}{\sqrt{2x-1}+2x-1}+\dfrac{4x}{\sqrt{5-4x^2}+3-2x}+3\right)=0(1)$

Nhận xét: $\dfrac{6}{\sqrt{2x-1}+2x-1}+\dfrac{4x}{\sqrt{5-4x^2}+3-2x}+3>0,\ \dfrac{1}{2}<x \leq \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Do đó từ (1) ta có: $2x^2-3x+1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2} \vee x=1$.

Đối chiếu với điều kiện $\dfrac{1}{2} < x \le \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, ta có nghiệm là $x = 1$.
Kết hợp lại ta có nghiệm là: $x = \left\{\dfrac{1}{2}; 1\right\}$.

-Bình luận. Bài toán này các bạn lưu ý chúng tôi đưa ra nghiệm $x = \dfrac{1}{2}$ trước là có lí do. Vì khi $x = \dfrac{1}{2}$ thì biểu thức $\sqrt{2x-1} + 2x - 1 = 0$ nên ta không thể nhân lượng liên hợp được. Do đó việc khép chặt lại miền nghiệm như trong lời giải giúp cho phép liên hợp được thành công. Đây là một trong những yếu tố mà các bạn rất dễ phạm sai lầm.

Ví dụ 4. Giải phương trình $x\sqrt{x^2+4} - 2\sqrt{5x^2+20} + 3x = 0$.

Lời giải.
-Phân tích hướng giải. Quan sát bài toán ta thấy được ta chỉ giải được phương trình này trên tập số thực dương.
Thật vậy với $x \le 0$ thì $x\sqrt{x^2+4} - 2\sqrt{5x^2+20} + 3x < 0$.
Mặt khác ta biến đổi phương trình đã cho trở thành: $\left(x - 2\sqrt{5}\right)\sqrt{x^2+4} = -3x(1)$.
Với phương trình (1) ta lại thấy rằng nếu $x \ge 2\sqrt{5}$ thì phương trình vô nghiệm. Do đó ta chỉ cần xét phương trình trong khoảng $0 < x < 2\sqrt{5}$.
Sử dụng máy tính ta biết được phương trình này có nghiệm duy nhất $x = \sqrt{5}$. Từ đó ta đi đến lời giải cho bài toán như sau.
Cách giải: Với$x \le 0$ thì $x\sqrt{x^2+4} - 2\sqrt{5x^2+20} + 3x < 0$.
Do đó phương trình đã cho vô nghiệm.
Phương trình đã cho được biến đổi thành phương trình:
$\left(x - 2\sqrt{5}\right)\sqrt{x^2+4} = -3x(1)$.
Với phương trình (1) ta thấy rằng nếu $x \ge 2\sqrt{5}$ thì phương trình vô nghiệm. Do đó ta chỉ cần xét phương trình trong khoảng $0 < x < 2\sqrt{5}$.
Lúc đó phương trình (1) được biến đổi thành:

$$x + \frac{3x}{\sqrt{x^2+4}} - 2\sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow x - \sqrt{5} + \frac{3x}{\sqrt{x^2+4}} - \sqrt{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \sqrt{5}\right) + \frac{2\left(x^2-5\right)}{\left(x^2+4\right)\left(\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+4}} + \sqrt{5}\right)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \sqrt{5}\right)\left(1 + \frac{2\left(x+\sqrt{5}\right)}{\left(x^2+4\right)\left(\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+4}} + \sqrt{5}\right)}\right) = 0(2)$$

Với $0 < x < 2\sqrt{5}$ thì $1 + \dfrac{2\left(x+\sqrt{5}\right)}{\left(x^2+4\right)\left(\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+4}} + \sqrt{5}\right)} > 0$.

Do đó từ (2) ta có $x - \sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{5}$.
Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của phương trình $x = \sqrt{5}$.
-Bình luận. Việc chia khoảng nghiệm chính xác phương trình có thể có là một việc làm hết sức quan trọng trong bài toán này, vì khi đó phần còn lại được đánh giá rất chặt và dễ dàng. Điều này đã làm giảm đi sự khó khăn cho bài toán, một điều đáng lưu ý và cần thiết cần có khi giải bằng phương pháp nhân lượng liên hợp.

Ví dụ 5. Giải phương trình $\sqrt[3]{7x-8} + 5\sqrt{x-1} + 2 = x\sqrt{2x-1}$.

Lời giải.
-Phân tích hướng giải. Đây là bài toán khá hay để chứng tỏ được sức mạnh của phương pháp nhân

lượng liên hợp và kỉ thuật truy ngược dấu biểu thức liên hợp. Thật vậy, sử dụng máy tính ta biết được nghiệm của phương trình đã cho là $x = \{1; 5\}$. Điều này có nghĩa rằng ta cần phải tạo ra nhân tử là một tam thức bậc hai $x^2 - 6x + 5$. Tuy nhiên với các hệ số như bài toán đang có ta sẽ sử dụng kỉ thuật truy ngược dấu biểu thức liên hợp để tạo thuận lợi trong việc đánh giá.
Tức là thay vì ta dùng biểu thức liên hợp dạng: $\sqrt{f(x)} - (ax+b)$.
Ta sẽ dùng ngược lại như sau: $(ax+b) - \sqrt{f(x)}$.
Với việc sử dụng ngược này tức là ta đã có một động thái đảo dấu rất có lợi trong khi giải quyết phần còn lại khi bắt được nhân tử.
Cách giải: Điều kiện $x \geq 1$.
Với $x = 1$, phương trình đã cho được nghiệm đúng.
Với $x > 1$, ta biến đổi phương trình đã cho thành phương trình:
$2\sqrt[3]{7x-8} + 10\sqrt{x-1} + 4 = 2x\sqrt{2x-1}$
$\Leftrightarrow x\left(x+1-2\sqrt{2x-1}\right) = 5\left(x-1-2\sqrt{x-1}\right) + (x^2-6x+5) + 2\left(x-2-\sqrt[3]{7x-8}\right)$
$\Leftrightarrow \dfrac{x\left[(x+1)^2 - 4(2x-1)\right]}{x+1+2\sqrt{2x-1}} =$
$\dfrac{5\left[(x-1)^2 - 4(x-1)\right]}{x-1+2\sqrt{x-1}} + (x-1)(x-5) + \dfrac{2\left[(x-2)^3 - (7x-8)\right]}{(x-2)^2 + (x-2)\sqrt[3]{7x-8} + \sqrt[3]{(7x-8)^2}}$
$\Leftrightarrow (x-1)(x-5)\left[\dfrac{5}{x-1+2\sqrt{x-1}} + \dfrac{2x}{(x-2)^2 + (x-2)\sqrt[3]{7x-8} + \sqrt[3]{(7x-8)^2}} + 1 - \dfrac{x}{x+1+2\sqrt{2x-1}}\right] =$
$0 (1)$
Với $x > 1$ ta có: $\dfrac{5}{x-1+2\sqrt{x-1}} > 0$, $\dfrac{2x}{(x-2)^2 + (x-2)\sqrt[3]{7x-8} + \sqrt[3]{(7x-8)^2}} > 0$.
Lại có: $\dfrac{x}{x+1+2\sqrt{2x-1}} < \dfrac{x}{x+1} < 1 \Rightarrow 1 - \dfrac{x}{x+1+2\sqrt{2x-1}} > 0$.
Do đó từ (1) ta có: $(x-1)(x-5) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 5$.
Đối chiếu điều kiện $x > 1$ ta có $x = 5$.
Kết hợp lại ta có nghiệm của phương trình là $x = 1$; $x = 5$. ■

-Bình luận. Việc chỉ ra nghiệm $x = 1$ trước lí do như ví dụ trên, việc nhân hệ số 2 trước khi phân tích có được là do trong quá trình tìm các hệ số bất định để tạo biểu thức liên hợp có chứa phân số có mẫu là 2. Sử dụng kỉ thuật truy ngược đặc biệt có lợi cho các bài toán mà hệ số của chúng có cách đặt để như nhân hệ số trước cân bằng một biểu thức chứa biến. Tuy nhiên trong nhiều trường hợp thì cả "thuận" và "ngược" đều có lời giải tối ưu.

Ví dụ 6. Giải phương trình $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} + 2\sqrt{(x-1)(x^2-3x+5)} = 2x$.

✍ Lời giải.

-Phân tích hướng giải. Quan sát bài toán và sử dụng máy tính ta biết phương trình này có nghiệm duy nhất $x = 1$.
Ta để ý thấy rằng: $(2x)^2 - \left(\sqrt{x+3}\right)^2 = 4x^2 - x - 3 = (x-1)(4x+3)$.
Từ đó ta đi đến lời giải cho bài toán như sau:
Cách giải: Điều kiện $x \geq 1$. Lúc đó phương trình đã cho được biến đổi như sau:
$\sqrt{x-1} + 2\sqrt{(x-1)(x^2-3x+5)} = \dfrac{(x-1)(4x+3)}{2x+\sqrt{x+3}}$
$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}\left[1 + 2\sqrt{x^2-3x+5} - \dfrac{(4x+3)\sqrt{x-1}}{2x+\sqrt{x+3}}\right] = 0 (1)$.
Ta có: $1 + 2\sqrt{x^2-3x+5} = 1 + \sqrt{2\left[x^2 + (x-3)^2 + 1\right]} > 1 + \sqrt{2x^2} > 1 + x$
Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchuy ta có:

$x = (x-1)+1 \geq 2\sqrt{x-1} \Rightarrow \dfrac{(4x+3)\sqrt{x-1}}{2x+\sqrt{x+3}} \leq \dfrac{(4x+3)\sqrt{x-1}}{2x} \leq \dfrac{\frac{x}{2}(4x+3)}{2x} < x+1$

Từ các nhận xét này (1) cho ta $\sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$. ■

-Bình luận. Bài toán trên không khó về mặt tạo nhân tử nhưng lại có khó khăn trong phần đánh giá. Việc sử dụng các bất đẳng thức cơ bản quen thuộc để đánh giá là một việc hết sức cần thiết trong phương pháp nhân lượng liên hợp khi mà chúng ta không cách nào để tránh đánh giá.

Ví dụ 7. Giải phương trình $3x^3 + 5x^2 + 2x + 5 = (x^3 + 3x + 5)\sqrt{2x^2 + 5x}$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích hướng giải. Quan sát phương trình này, ta để ý thấy được giữa hai đại lượng bậc ba có cùng số 5 nên ta thử ghép chúng lại bằng phép trừ để khử hệ số ta thu được điều gì?

Ta có: $(3x^3 + 5x^2 + 2x + 5) - (x^3 + 3x + 5) = x(2x^2 + 5x - 1)$.

Đại lượng vừa thu được gần giống biểu thức chứa trong căn vì ta chỉ cần thực hiện phép biến đổi sau:

$\left(\sqrt{2x^2+5x}\right)^2 - 1 = 2x^2 + 5x - 1$.

Với hai nhận xét này, ta đã biết nhân tử chung cần tìm chính là đại lượng mà cả hai bước phân tích trên đã chỉ ra.

Từ đó ta đi đến lời giải cho bài toán.

Cách giải: Điều kiện $2x^2 + 5x \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -\dfrac{5}{2} \\ x \geq 0 \end{array}\right.$.

Phương trình đã cho được biến đổi trở thành phương trình sau:

$3x^3 + 5x^2 + 2x + 5 - (x^3 + 3x + 5)\sqrt{2x^2 + 5x}$

$\Leftrightarrow 3x^3 + 5x^2 + 2x + 5 - (x^3 + 3x + 5) - (x^3 + 3x + 5)\left(\sqrt{2x^2+5x} - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow x(2x^2 + 5x - 1) - (x^3 + 3x + 5).\dfrac{2x^2 + 5x - 1}{\sqrt{2x^2 + 5x} + 1} = 0$

$\Leftrightarrow (2x^2 + 5x - 1)\left(x - \dfrac{x^3 + 3x + 5}{\sqrt{2x^2+5x} + 1}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2 + 5x - 1 = 0 \\ x = \dfrac{x^3 + 3x + 5}{\sqrt{2x^2+5x}+1} \end{array}\right.$

Với $2x^2 + 5x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{33}}{4}$ (thỏa điều kiện).

Với $x = \dfrac{x^3 + 3x + 5}{\sqrt{2x^2+5x}+1} \Leftrightarrow x\sqrt{2x^2+5x} = x^3 + 2x + 5$

$\Rightarrow x^3(2x+5) = (x^3)^2 + 2.x^3.(2x+5) + (2x+5)^2$

$\Leftrightarrow (x^3)^2 + x.(2x+5) + (2x+5)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x^3 + \dfrac{2x+5}{2}\right)^2 + 3\left(\dfrac{2x+5}{2}\right)^2 = 0$ vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{33}}{4}$. ■

Tổng kết. Với bài toán này việc phân tích được nhân tử chung là do một phần bài toán có dấu hiệu quá đặc biệt. Tuy nhiên trên thực tế và qua các bài toán đã biết ở phần phương pháp các bạn đều biết để sử dụng phép liên hợp thành công thì việc sử dụng máy tính để đoán được nghiệm của phương trình trước là điều không thể bỏ qua nên cho dù phương trình có nghiệm chẵn hay lẻ ta đều có thể sử dụng máy tính để tìm nghiệm của phương trình và bắt nhân tử chung. Các bạn hãy xem kỷ phần phụ lục của chúng tôi trong việc tìm nghiệm bằng máy tính.

Kết thúc phần câu hỏi này ở ví dụ 9, hy vọng rằng với những phân tích ở những góc nhìn khác nhau và những bài toán khác nhau đã phần nào giải quyết được câu trả lời là đứng trước một phương trình vô tỷ ta cần giải quyết thế nào? Và vì sao phải chọn phương pháp liên hợp để giải. Ưu và nhược điểm và cách khắc phục đánh giá thì từ các bài toán ở chương I đến lúc này, chắc đã trả lời được phần lớn các câu hỏi mà chúng tôi đã đặt ra. Lưu ý rằng, trong quá trình liên hợp sau khi bắt nhân tử chung không phải lúc nào chúng ta cũng thu được một kết quả vô nghiệm, sự có nghiệm trở lại sau khi liên hợp sẽ được chúng tôi phân tích ở các bài toán sau.

2 Khi nào nên sử dụng phương pháp đánh giá

Có một số lớp bài toán phương trình vô tỷ mà khi sử dụng các phương pháp khác cho lời giải khá dài và rắc rối và cũng có khi với những phương pháp đó cũng không thể giải quyết được bài toán, khi đó phương pháp đánh giá sẽ được tính đến. Những phương trình vô tỷ giải bằng phương pháp đánh giá thường là những phương trình thường có những dấu hiệu đó là nếu chia trên từng khoảng nghiệm của phương trình ta thu được những điều vô lý và phương trình chỉ đúng trên một hoặc hai giá trị nào đó mà thôi. Cũng có khi dấu hiệu nằm ở hình thức phương trình gợi cho ảnh của một trong những hằng đẳng thức cơ bản, cũng có khi cần đến hàm số để đánh giá. Điều đó nhắm đến để sử dụng đánh giá phương trình ta cần có những kỉ năng hết sức khéo léo và đủ mạnh để có thể thành công. Để vén một phần bí mật và giúp cho độc giả có thể hình dung câu hỏi đặt ra được giải quyết thế nào, cộng với các bài toán đã xét trong phương pháp ở chương I, hãy xem xét các ví dụ sau.

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{(x-1)\left(x^2-3x+5\right)}=4-2x$.

Lời giải.

-Phân tích hướng giải. Sử dụng máy tính ta có nghiệm duy nhất của phương trình là $x=1$. Điều này gợi ý cho chúng ta sẽ liên hợp phương trình này. Tuy nhiên nếu ta để ý xuất phát từ điều kiện của phương trình là $x \geq 1$.

Khi đó ta có: $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{(x-1)\left(x^2-3x+5\right)} \geq \sqrt{x+3}=2$ và $4-2x \leq 2$.

Điều này gợi cho chúng ta mạnh dạn đánh giá phương trình này cho lời giải gọn gàng.

Cách giải: Điều kiện $x \geq 1$. Với điều kiện này, ta có hai đánh giá sau:

$\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{(x-1)\left(x^2-3x+5\right)} \geq \sqrt{x+3}=2$.

Dấu xảy ra khi và chỉ khi $x=1$.

$4-2x \leq 2$. Dấu xảy ra khi và chỉ khi $x=1$.

Từ hai đánh giá này ta có: $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{(x-1)\left(x^2-3x+5\right)} \geq 2 \geq 4-2x$.

Do đó đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=1$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$. ■

-Bình luận 1. Việc chỉ ra nghiệm $x=1$ trước lí do như ví dụ trên, việc nhân hệ số 2 trước khi phân tích có được là do trong quá trình tìm các hệ số bất định để tạo biểu thức liên hợp có chứa phân số có mẫu là 2. Sử dụng kỉ thuật truy ngược đặc biệt có lợi cho các bài toán mà hệ số của chúng có cách đặt để như nhân hệ số trước căn bằng một biểu thức chứa biến. Tuy nhiên trong nhiều trường hợp thì cả "thuận" và "ngược" đều có lời giải tối ưu.

-Bình luận 2. Với sự tinh tế khéo léo cách phát hiện từ điều kiện thì hai vế phương trình đều sẽ có dạng $f(x) \leq a \leq g(x)$ đã giúp chúng ta có lời giải bằng đánh giá gọn nhẹ. Đây là một trong những hướng đánh giá rất quan trọng và thường gặp rất nhiều trong phương trình vô tỷ, có thể đó là phương pháp đánh giá trực tiếp để giải phương trình, cũng có khi đó chính là lối đi để xử lí phần còn lại trong phương trình khi ta đã xử lí bằng các phương pháp khác.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\sqrt[5]{x-1}+\sqrt[3]{x+8}=x^3+1$.

Lời giải.

-Phân tích hướng giải. Phương trình này chứa căn bậc cao nên rõ ràng các phương pháp khác đã xét đến không thể triệt phá nỗi phương trình này, dù ta biết phương trình này có nghiệm duy nhất $x=0$. Do đó ta sẽ chuyển hướng đánh giá phương trình xung quanh nghiệm có được. Tức là ta sẽ siết chặt lại miền nghiệm của phương trình.

Cách giải: Nhận xét $x=0$ thỏa phương trình đã cho.

Với $x > 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[5]{x-1} + \sqrt[3]{x+8} > -1 + 2 = 1 \\ -x^3 + 1 < 1 \end{cases}$ nên phương trình vô nghiệm.

Với $x < 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[5]{x-1} + \sqrt[3]{x+8} < -1 + 2 = 1 \\ -x^3 + 1 > 1 \end{cases}$ nên phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

-Bình luận. Với phương trình có bậc khá cao thì việc sử dụng đánh giá loại phương trình này có thể là tối ưu nhất. Kỉ thuật siết chặt miền nghiệm ở lời giải trên là một lối đi đáng để chú ý khi giải phương trình bằng phương pháp đánh giá. Cái khó của lối đánh giá này chính là ta cần chỉ ra được quanh vùng nghiệm chỉ ra ta cần so sánh với điều gì? Ở bài toán khi cho $x = 0$ thì hai vế phương trình đều bằng 1, nên chúng tôi đã tập trung quanh vùng của số 0 để so sánh hai vế phương trình với số 1.

Ví dụ 3. Giải phương trình $\sqrt{3x^2+6x+12} + \sqrt{5x^4-10x^2+9} = -2x(x+2)+3$.

Lời giải.

-Phân tích hướng giải. Quan sát bài toán ta thấy được các đại lượng trong căn thức là một tam thức bậc hai luôn dương, một phương trình trùng phương đưa về tam thức bậc hai cũng luôn dương. Một điều tự nhiên, khi gặp các đại lượng tam thức bậc hai dương là tách chúng về dạng $(ax+b)^2 + k$.

Ta có: $3x^2+6x+12 = 3(x+1)^2 + 9 \Rightarrow \sqrt{3x^2+6x+12} \geq 3$.

$5x^4 - 10x^2 + 9 = 5(x^2-1)^2 + 4 \Rightarrow \sqrt{5x^4-10x^2+9} \geq 2$.

Do đó ta có: $\sqrt{3x^2+6x+12} + \sqrt{5x^4-10x^2+9} \geq 3 + 2 = 5$.

Lại có: $-2x(x+2)+3 = -2x^2-4x+3 = -2(x^2+2x+1)+5 = -2(x+1)^2+5 \leq 5$.

Với nhận xét này ta đã hình dung được cách giải của bài toán.

Cách giải:

Ta có: $-2x(x+2)+3 = -2x^2-4x+3 = -2(x^2+2x+1)+5 = -2(x+1)^2+5 \leq 5$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$. Mặt khác ta lại có:

$\sqrt{3x^2+6x+12} + \sqrt{5x^4-10x^2+9} = \sqrt{3(x+1)^2+12} + \sqrt{5(x^2+1)^2+4} \geq 3+2 = 5$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

-Bình luận. Với bài toán này ta bắt được sự đánh giá do có sự nhận xét về các đại lượng dương trong căn thức nên cho phép ta tách các hằng đẳng thức dư và dấu bằng xảy ra tại cùng một vị trí, mặt khác kết hợp với vế phải phương trình là một tam thức bậc hai luôn âm và khi thay giá trị để có đẳng thức ở vế trái lại cho đúng bằng giá trị. Đây cũng là một trong những yếu tố đánh giá quen thuộc.

Ví dụ 4. Giải phương trình $\sqrt{4x^3-6x^2-x+10} = 1 - x^2\sqrt{x(x+1)(x-2)}$.

Lời giải.

-Phân tích hướng giải. Với bài toán hình thức này việc tìm điều kiện trước tiên là ưu tiên hàng đầu.

Điều kiện $\begin{cases} 4x^3-6x^2-x+10 \geq 0 \\ x(x+1)(x-2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \leq x \leq 0 \\ x \geq 2 \end{array}\right.$

Từ điều kiện này ta có ngay được: $1 - x^2\sqrt{x(x+1)(x-2)} \leq 1$.

Vậy vấn đề còn lại ta chỉ cần chỉ ra được: $\sqrt{4x^3-6x^2-x+10} \geq 1$.

Bình phương hai vế, ta thu được: $(x+1)(4x^2-10x+9) \geq 0$.

Tới nay, đã xem như đánh giá thành công.

Cách giải: Điều kiện $\begin{cases} 4x^3 - 6x^2 - x + 10 \geq 0 \\ x(x+1)(x-2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \leq x \leq 0 \\ x \geq 2 \end{array}\right.$

Từ điều kiện này ta có ngay được: $1 - x^2\sqrt{x(x+1)(x-2)} \leq 1$.
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = -1$.
Mặt khác từ điều kiện ta luôn có: $\sqrt{4x^3 - 6x^2 - x + 10} \geq 1$.
Thật vậy, bình phương hai vế bất phương trình ta có:
$4x^3 - 6x^2 - x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(4x^2 - 10x + 9) \geq 0$ (luôn đúng).
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = -1$.
Từ các đánh giá này ta có: $\sqrt{4x^3 - 6x^2 - x + 10} \geq 1 \geq 1 - x^2\sqrt{x(x+1)(x-2)}$
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = -1$.
Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = -1$.

-Bình luận. Bài toán này từ điều kiện ta có ngay được một đánh giá, do đó bài toán trở nên đánh giá khá đơn giản. Sử dụng phép biến đổi tương đương để hoàn thiện đánh giá là một việc rất thường dùng.

Ví dụ 5. Giải phương trình $\sqrt{8 - x^2} + \sqrt{\dfrac{x^2 - 2}{2x^2}} = 5 - \dfrac{1 + x^2}{x}$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích hướng giải. Quan sát bài toán và sử dụng máy tính ta biết được nghiệm duy nhất của phương trình là $x = 2$. Tới nay khả năng có thể nghĩ đến lúc này là phương pháp nhân lượng liên hợp vì hai phương án nâng lũy thừa và ẩn phụ hóa là hoàn toàn không khả thi. Tuy nhiên với cấu tạo của bài toán thì việc sử dụng phương pháp liên hợp cũng khả thi. Mặt khác, ta nhớ rằng với phương trình vô tỷ thì cho dù phương pháp nào thì mục đích chính cũng là thoát căn thức. Với các điều vừa lưu ý thì để giải bài toán này ta sẽ chọn lối đánh giá, cộng với việc cần phải thoát căn thức nên một điều tự nhiên ta nghĩ ngay đến bất đẳng thức Cauchuy (AM – GM) sao cho dấu đẳng thức phải xảy ra tại $x = 2$.
Để có được điều đó ta phân tích như sau:

$\sqrt{8 - x^2} = 2\sqrt{\dfrac{m}{4}.\dfrac{8 - x^2}{m}} \leq \dfrac{m}{4} + \dfrac{8 - x^2}{m}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{m}{4} = \dfrac{8 - x^2}{m} \Leftrightarrow m^2 = 4(8 - x^2)$.

Với $x = 2 \Rightarrow m = 4$. Từ đó ta có: $\sqrt{8 - x^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{4(8 - x^2)} \leq \dfrac{4 + 8 - x^2}{4} = 3 - \dfrac{x^2}{4}$.

$\sqrt{\dfrac{x^2 - 2}{2x^2}} = 2.\sqrt{\dfrac{m}{4}.\dfrac{x^2 - 2}{2mx^2}} \leq \dfrac{m}{4} + \dfrac{x^2 - 2}{2mx^2}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $\dfrac{m}{4} = \dfrac{x^2 - 2}{2mx^2} \Leftrightarrow 2m^2x^2 = 4(x^2 - 2)$.

Cho $x = 2 \Rightarrow m = 1$ nên ta có: $\sqrt{\dfrac{x^2 - 2}{2x^2}} = 2\sqrt{\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{x^2 - 2}{2x^2}\right)} \leq \dfrac{x^2 - 2}{2x^2} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{x^2}$

Cách giải: Điều kiện $\begin{cases} 8 - x^2 \geq 0 \\ \dfrac{x^2 - 2}{2x^2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2\sqrt{2} \leq x \leq -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2} \end{array}\right.$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có các đánh giá:

$\sqrt{8 - x^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{4(8 - x^2)} \leq \dfrac{4 + 8 - x^2}{4} = 3 - \dfrac{x^2}{4}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $8 - x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

$\sqrt{\dfrac{x^2 - 2}{2x^2}} = 2\sqrt{\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{x^2 - 2}{2x^2}\right)} \leq \dfrac{x^2 - 2}{2x^2} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{x^2}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $\dfrac{x^2 - 2}{2x^2} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Với hai đánh giá này từ phương trình đã cho ta có:
$5-\dfrac{x^2+1}{x}\le 3+\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{x^2}\Leftrightarrow\left(\dfrac{x}{2}-1\right)^2+\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}\right)^2\le 0$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases}\dfrac{x}{2}-1=0\\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow x=2.$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$. ■

-Bình luận. Bài toán có lối đánh giá thoát căn bằng bất đẳng thức Cauchuy, một trong những yếu tố rất được ưa chuộng trong lối đánh giá. Tiếp theo ta xét một bài toán có lối đánh giá giống như vậy.

Ví dụ 6. Giải phương trình $3\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2-x}+\sqrt[4]{3-2x}=5$.

✍ Lời giải.

-Phân tích hướng giải. Ta sẽ tập trung đánh giá phương trình này bằng bất đẳng thức AM – GM quen thuộc để tạo được nghiệm của phương trình là $x=1$.

Cách giải: Điều kiện $0\le x\le 2$.

Sử dụng liên tiếp bất đẳng thức AM – GM ta có các đánh giá:

$\sqrt[4]{x}\le\dfrac{(\sqrt{x}+1)}{2}\le\dfrac{x+3}{4}\Rightarrow 3\sqrt[4]{x}\le\dfrac{3(x+3)}{4}$

$\sqrt[4]{2-x}\le\dfrac{\sqrt{2-x}+1}{2}\le\dfrac{5-x}{4}$

$\sqrt[4]{3-2x}\le\dfrac{\sqrt{3-2x}+1}{2}\le\dfrac{6-2x}{4}$

Cộng vế theo vế các đánh giá này ta thu được: $3\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2-x}+\sqrt[4]{3-2x}\le 5$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=1$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$. ■

-Bình luận. Kết cấu hình thức của phương trình giúp chúng ta liên tưởng đến phương án chọn để giải quyết là phương án đánh giá.

Ví dụ 7. Giải phương trình $2(2x+1)\sqrt{x+1}+(4-x)\sqrt{2-2x}=6\sqrt{x^2+2}$.

✍ Lời giải.

-Phân tích hướng giải. Hình thức bài toán ở vế trái gợi cho chúng ta liên tưởng đến việc ẩn phụ hóa bài toán này, tuy nhiên chúng ta sẽ không đạt được kết quả như mong muốn, vì vế phải phương trình chứa một căn thức có chứa đại lượng tam thức bậc 2. Mặt khác vế trái phương trình có hình thức gợi tả một bất đẳng thức quen thuộc, đó là bất đẳng thức Bunhiacopxki (B.C.S). Bất đẳng thức B.C.S được viết dưới dạng.

$|ab+cd|\le\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $\dfrac{b}{a}=\dfrac{d}{c}$.

Mặt khác khi sử dụng máy tính ta biết được phương trình này vô nghiệm.

Từ đó ta đi vào hướng giải quyết bài toán như sau:

Cách giải: Điều kiện: $\begin{cases}x+1\ge 0\\ 2-2x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow -1\le x\le 1.$

Nhận xét với $x=\pm1$ không thỏa phương trình đã cho.

Với $-1<x<1$, ta sử dụng bất đẳng thức B.C.S ta có:

$\sqrt{2}(2x+1)\sqrt{2x+2}+(4-x)\sqrt{2-2x}\le\sqrt{\left(2(2x+1)^2+(4-x)^2\right)(2x+2+2-2x)}=6\sqrt{x^2+2}.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $\dfrac{\sqrt{2}(2x+1)}{\sqrt{2x+2}}=\dfrac{4-x}{\sqrt{2-2x}}\Leftrightarrow\dfrac{2x+1}{\sqrt{x+1}}=\dfrac{4-x}{\sqrt{2-2x}}$

$\Leftrightarrow (2x+1)\sqrt{2-2x} = (4-x)\sqrt{x+1} \Rightarrow (2x+1)^2(2-2x) = (4-x)(x+1)^2$
$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 6x + 14 = 0(1)$
Với (1) ta có: $x^3 - 3x^2 + 6x + 14 = (x-1)^3 + (3x+15)$.
Mà với: $-1 < x < 1 \Rightarrow -8 < (x-1)^3 < 0$; $12 < 3x + 15 < 18$
$\Rightarrow 4 < (x-1)^3 + 3x + 15 < 18$.
Do đó (1) vô nghiệm nên dấu đẳng thức không xảy ra.
Vậy phương trình đã cho vô nghiệm. ■
-Bình luận. Qua bài toán này, ta thấy được rằng đôi lúc hình thức phương trình có thể gợi lên cho chúng ta một hình ảnh bất đẳng thức nào đó rồi ta sử dụng phép đánh giá phù hợp từ bất đẳng thức đó ta sẽ tạo được lời giải cho bài toán.

Ví dụ 8. Giải phương trình $\sqrt{x^4+20} - \sqrt{x^4+9} = x^3 - 7$.

✍ **Lời giải.**
-Phân tích hướng giải. Quan sát phương trình ta thấy các đại lượng chứa trong căn thức đều là các đại lượng bậc 4, vế phải phương trình lại là một đại lượng bậc 3. Sử dụng máy tính ta biết được phương trình có một nghiệm duy nhất $x = 2$. Mặt khác ta có: $(x^4+20) - (x^4+9) = 11$.
Do đó ta biến đổi phương trình đã cho trở thành: $11 = (x^3-7)\left(\sqrt{x^4+20} + \sqrt{x^4+9}\right)$
Từ phương trình này, ta suy ra được Điều kiện $x^3 - 7 > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt[3]{7}$.
Khi đó ta tiếp tục biến đổi phương trình vừa biến đổi thành phương trình $\sqrt{x^4+20} + \sqrt{x^4+9} = \dfrac{11}{x^3-7}$.
Không khó để nhận thấy rằng phương trình cuối có vế trái là một hàm số đồng biến, còn vế phải là một hàm số nghịch biến nên ta nghĩ đến việc giải phương trình này bằng cách sử dụng hàm số để đánh giá.
Cách giải: Phương trình đã cho được biến đổi thành phương trình:
$11 = (x^3-7)\left(\sqrt{x^4+20} + \sqrt{x^4+9}\right)$
Từ phương trình này, ta suy ra được điều kiện $x^3 - 7 > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt[3]{7}$.
Khi đó ta tiếp tục biến đổi phương trình vừa biến đổi thành phương trình:
$\sqrt{x^4+20} + \sqrt{x^4+9} = \dfrac{11}{x^3-7}$ (1)
Xét hàm số: $f(x) = \sqrt{x^4+20} + \sqrt{x^4+9}$, $x > \sqrt[3]{7}$.
Ta có: $f'(x) = 2x^3\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^4+20}} + \dfrac{1}{\sqrt{x^4+9}}\right) > 0$, $x > \sqrt[3]{7}$.
Vậy hàm số $f(x)$ liên tục và đồng biến với $x > \sqrt[3]{7}$.
Xét hàm số: $g(x) = \dfrac{11}{x^3-7}$, $x > \sqrt[3]{7}$. Ta có: $g'(x) = -\dfrac{33x^2}{(x^3-7)} < 0$, $x > \sqrt[3]{7}$.
Vậy hàm số $g(x)$ liên tục và nghịch biến với $x > \sqrt[3]{7}$.
Do đó phương trình $f(x) = g(x)$ nếu có nghiệm thì có tối đa một nghiệm.
Mà: $f(2) = g(2)$ nên $x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình. ■
-Bình luận. Sử dụng hàm số để đánh giá là một phương pháp rất được quan tâm hiện nay, nó là một công cụ mạnh nhưng không khó lại có tính phổ biến rất cao, hầu hết các bài toán xuất hiện trong đề thi thử hoặc đề thi đại học thì phương pháp này luôn có chỗ đứng rất đáng quan tâm. Ngoài so sánh tính đối lập giữa hai hàm, người ta còn có thể sử dụng đánh giá một hàm số nào đó để chỉ ra nghiệm của phương trình.

Ví dụ 9. Giải phương trình $\left(\dfrac{1}{(1-x)^2} + 1\right)\sqrt{\dfrac{1}{x} - x} - \left(\dfrac{1}{x^2} + 1\right)\sqrt{\dfrac{1}{1-x} + x - 1} = 0$.

✍ **Lời giải.**
-Phân tích hướng giải. Bài toán có hình thức khá rối, tuy nhiên ta lại thấy giữa các đại lượng có sự đối xứng đan chéo cho nhau.

Thật vậy, ta biến đổi phương trình đã cho gọn lại thành:

$$\frac{\frac{1}{x^2}+1}{\sqrt{\frac{1}{x}-x}}=\frac{\frac{1}{(1-x)^2}+1}{\sqrt{\frac{1}{1-x}+1-x}}$$

Ở phương trình này, hai vế phương trình gợi cho để giải phương trình này ta sẽ thông qua đánh giá một hàm số đặc trưng lột tả được hình thức cho cả hai vế.

Đó chính là hàm số: $f(t)=\frac{\frac{1}{t^2}+1}{\sqrt{\frac{1}{t}-t}}$. Vậy ta sẽ đi vào hướng giải cho bài toán.

Cách giải: Điều kiện $0<x<1$.

Biến đổi phương trình đã cho trở thành: $\frac{\frac{1}{x^2}+1}{\sqrt{\frac{1}{x}-x}}=\frac{\frac{1}{(1-x)^2}+1}{\sqrt{\frac{1}{1-x}+1-x}}(1)$

Xét hàm số: $f(t)=\frac{\frac{1}{t^2}+1}{\sqrt{\frac{1}{t}-t}}$, $0<t<1$.

Ta có: $f'(x)=\frac{-\frac{2}{t^3}\sqrt{\frac{1}{t}-t}-\frac{\left(\frac{1}{t^2}+1\right)\left(-\frac{1}{t^2}-1\right)}{2\sqrt{\frac{1}{t}-t}}}{\frac{1}{t}-t}=\frac{-4-\left(t^2-1\right)^2}{2t^4\left(\frac{1}{t}-t\right)\sqrt{\frac{1}{t}-t}}<0$, $t\in(0;1)$.

Vậy hàm số $f(t)$ liên tục và nghịch biến với $0<t<1$.

Do đó từ (1) ta có: $f\left(\frac{1}{x^2}\right)=f\left(\frac{1}{1-x}\right)\Leftrightarrow\frac{1}{x}=\frac{1}{1-x}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm duy nhất của phương trình là $x=\frac{1}{2}$. ■

-Bình luận. Đây là một trong những lối đi đánh giá thông qua một hàm số đặc trưng để giải quyết bài toán. Lối đi này với những bài toán có mối liên quan với nhau để tạo ra được một hàm số đặc trưng thì nó thực sự rất mạnh.

Vậy là chúng tôi vừa trình bày với bạn đọc về những ví dụ và những phân tích cần có, những chủ đích tư duy thường gặp nhất khi giải phương trình bằng phương pháp đánh giá. Mặt khác qua các ví dụ đã xét, chúng tôi cũng đã cố gắng lựa chọn những ví dụ đủ mạnh để có thể trả lời cho câu hỏi được đặt ra trước đó. Hy vọng quý độc giả đã rút cho mình được những điều cần thiết.

Tuy nhiên, trên nay chỉ là những hành trang cần có khi đứng trước một phương trình vô tỷ, nhưng trên thực tế đối với một phương trình vô tỷ ta sẽ gặp rất nhiều cách giải quyết khác nhau và đó chính là điều thú vị của phương trình vô tỷ. Để biết được điều đó, chúng ta tiếp tục tìm hiểu những phân tích có lý để giải quyết một phương trình vô tỷ theo nhiều cách khác nhau, những khó khăn và thuận lợi, hoặc những lối đi độc đáo cho bài toán phương trình vô tỷ qua 5 phần sau.

3 Nhiều hướng giải cho một bài toán – Ưu điểm và nhược điểm

Ví dụ 1. Giải phương trình $2-x^2=\sqrt{x+2}$.

✍ Lời giải.

-Phân tích hướng giải. Đối với một phương trình vô tỷ, cho dù chúng ta có chọn hướng nào giải quyết đi chăng nữa thì mục đích cuối cùng của chúng ta là làm cho phương trình "thoát" căn thức một cách đơn giản nhất có thể và để tối giản hóa hình thức của phương trình. Một điều cần nhớ đó là khi giải

phương trình vô tỷ ta cố gắng đoán được ít nhất một nghiệm của phương trình để từ đó có thể phán đoán hướng đi thuận lợi nhất.
Với bài toán ta đang xét, hình thức của phương trình gọn đẹp đơn giản nhưng để giải quyết nó chúng ta sẽ có rất nhiều điều thú vị. Không quá khó, ta nhẩm thấy được phương trình có giá trị $x = -1$ thỏa. Và cùng với hy vọng thoát căn thì chúng ta có hai phương án: nâng lũy thừa và đặt ẩn phụ.
-Hướng 1: Nâng lũy thừa

Ta có: $2 - x^2 = \sqrt{x+2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x^2 \geq 0 \\ \left(2 - x^2\right)^2 = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \\ x^4 - 4x^2 - x + 2 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \\ \left(x^2 - x - 2\right)\left(x^2 + x - 1\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \\ \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \\ x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = -1$; $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
-Hướng 2. Đặt ẩn phụ. Quan sát bài toán, ta thấy bài toán chỉ chứa một căn thức, vậy ta có thể ẩn phụ hóa t bằng căn thức rồi rút biến x theo ẩn phụ. Lại có, trong phương trình chứa x^2 nên phương trình theo ẩn phụ t sẽ là một phương trình bậc bốn. Tuy nhiên, do ngay từ đầu ta đã nhẩm được giá trị x nên ta có giá trị $t = 1$. Từ đó ta hoàn toàn giải quyết bài toán. Thật vậy: Điều kiện: $x \geq -2$. Đặt $t = \sqrt{x+2}$, $t \geq 0$. Ta có: $x = t^2 - 2$.
Lúc đó phương trình đã cho trở thành: $2 - \left(t^2 - 2\right)^2 = t \Leftrightarrow t^4 - 4t^2 + t + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t+2)\left(t^2 - t - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2 \\ t = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ t = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được: $t = 1$; $t = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Từ đó ta có: $x = -1$; $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Tuy nhiên, trên đây chỉ là hai hướng đi có thể là thường gặp nhất khi gặp phương trình này. Chúng ta còn có một số hướng tiếp cận khác, nếu chúng ta nhìn nó dưới một góc nhìn khác.
-Hướng 3. Bây giờ quan sát phương trình đã cho:
$2 - x^2 = \sqrt{x+2} \Leftrightarrow x^2 = 2 - \sqrt{x+2}(*)$
Hãy quan sát vế phải của (*) ta linh cảm được sự “thiếu hụt” của một hằng đẳng thức.
Thật vậy, nếu ta biến đổi vế phải thành: $2 - \sqrt{x+2} = x + 2 - 2.\dfrac{1}{2}.\sqrt{x+2} + \dfrac{1}{4}$ và vế trái của phương trình thành: $x^2 + x + \dfrac{1}{4}$.
Với các biến đổi này, chúng ta đã thấy hai vế của phương trình là hai hằng đẳng thức, từ đó ta có lời giải cho bài toán:
Điều kiện $x \geq -2$. Phương trình đã cho được biến đổi thành:

$x^2=2-\sqrt{x+2}\Leftrightarrow x^2+x+\dfrac{1}{4}=x+2-\sqrt{x+2}+\dfrac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\sqrt{x+2}-\frac{1}{2}\right)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+1=\sqrt{x+2}\\ \sqrt{x+2}=-x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+1\ge 0\\ x^2+x-1=0\end{cases}\\ \begin{cases}x\le 0\\ x^2-x-2=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$$

-Hướng 4. Giờ ta quan sát phương trình: $2-x^2=\sqrt{x+2}\Leftrightarrow x^2-2+\sqrt{x+2}=0$
Ở phương trình này nếu ta nhìn hằng đẳng thức dưới góc độ khác ta cũng sẽ thu được một lời giải thú vị. Thật vậy, ta chỉ cần thêm bớt đại lượng x vào ngay số 2 ta thu được phương trình:
$x^2-x-2+x+\sqrt{x+2}=0\Leftrightarrow x^2-(x+2)+\left(x+\sqrt{x+2}\right)=0$
$\Leftrightarrow\left(x-\sqrt{x+2}\right)\left(x+\sqrt{x+2}\right)+\left(x+\sqrt{x+2}\right)=0\Leftrightarrow\left(x+\sqrt{x+2}\right)\left(x+1-\sqrt{x+2}\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-x=\sqrt{x+2}\\ x+1=\sqrt{x+2}\end{array}\right.$$

Tới đây, ta giải như hướng 3.
-Hướng 5. Từ hướng hai ta thấy rằng khi ta đặt $t=\sqrt{x+2}\Rightarrow t^2-x=2$. Kết hợp với phương trình ban đầu ta thu được một hệ phương trình: $\begin{cases}t^2-x=2\\ x^2+t=2\end{cases}$.
Hệ phương trình này là hệ phương trình gần đối xứng loại 2. Nên ta hoàn toàn có thể giải quyết bài toán. Cụ thể:
Điều kiện $x\ge -2$. Đặt $t=\sqrt{x+2}$, $t\ge 0$. Ta có: $x=t^2-2$.
Kết hợp với phương trình ban đầu, ta thu được hệ phương trình: $\begin{cases}t^2-x=2\\ x^2+t=2\end{cases}\quad(*')$
Lấy hai vế phương trình trong hệ $(*')$ trừ vế theo vế ta có:

$$t^2-x^2-x-t=0\Leftrightarrow(t-x)(t+x)-(t+x)=0\Leftrightarrow(t+x)(t-x-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-x\\ t=x+1\end{array}\right.$$

Với $t=-x\Leftrightarrow\sqrt{x+2}=-x\Leftrightarrow\begin{cases}-x\ge 0\\ x^2-x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0\\ \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=-1.$

Với: $t=x+1\Leftrightarrow\sqrt{x+2}=x+1\Leftrightarrow\begin{cases}x+1\ge 0\\ x^2+x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\ \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\\ x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ■

-Bình luận. Qua ví dụ đơn giản trên đây, chúng ta đã thấy được đứng trước một phương trình vô tỷ thì lối đi giải bài toán đặt trọng tâm nhiều vào hướng tư duy và tìm cách gỡ rối như thế nào là hiệu quả nhất. Tuy bài toán trên chỉ là một bài toán đơn giản và cơ bản. Chúng ta có thể khái quát hóa cho bài toán trên là giải phương trình: $x^2 + \sqrt{x^2 + a^2} = a$ và dựa vào các hướng đi như trên để giải quyết trọn ven bài toán.

Ví dụ 2. Giải phương trình $(x+2)\sqrt{x^2-2x+4} = (x-1)\sqrt{x^2+4x+7}$

✍ **Lời giải.**

-Phân tích hướng giải. Bài toán này về hình thức có thể đưa ra hai hướng giải quyết để thoát căn thức là nâng lũy thừa hoặc đặt ẩn phụ. Tuy nhiên, khi sử dụng phép nâng lũy thừa ta cần chú ý đến phép biến đổi tương đương và phép biến đổi hệ quả vì ta chỉ được phép biến đổi tương đương trong phương trình này khi hai vế cùng dấu.
-Hướng 1. Sử dụng phép nâng lũy thừa:
Ta có: $(x+2)\sqrt{x^2-2x+4} = (x-1)\sqrt{x^2+4x+7}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x-1) \geq 0 \\ (x+2)^2(x^2-2x+4) = (x-1)^2(x^2+4x+7) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \vee x \geq 1 \\ (x+2)^2\left[(x-1)^2+3\right] = (x-1)^2\left[(x+2)^2+3\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \vee x \geq 1 \\ (x+2)^2 = (x-1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \vee x \geq 1 \\ x = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$ (Hệ vô nghiệm). Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

-Hướng 2: Đặt ẩn phụ.

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x^2-2x+4} \\ b = \sqrt{x^2+4x+7} \end{cases}$ $,(a;b>0)$. Ta có: $x+2 = \dfrac{b^2-a^2+9}{6}$; $x-1 = \dfrac{b^2-a^2-9}{6}$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành:

$$\left(\frac{b^2-a^2+9}{6}\right)a = \left(\frac{b^2-a^2-9}{6}\right)b \Leftrightarrow (b^2-a^2+9)a = (b^2-a^2-9)b$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(a-3-b)(a+3-b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3+b \\ b = a+3 \end{array}\right. .$$

Với: $a = b+3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x+4} = \sqrt{x^2+4x+7}+3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+4x+7} = -x-2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x-2 \geq 0 \\ x^2+4x+7 = (x+2)^2 \end{cases}$$ (Hệ vô nghiệm).

Với: $a+3 = b \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x+4}+3 = \sqrt{x^2+4x+7} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x+4} = x-1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ (x^2-2x+4) = (x-1)^2 \end{cases}$$ (Hệ vô nghiệm).

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm. ■

-Bình luận. Bài toán là một bài toán cơ bản và thường gặp.

Chú ý phép biến đổi sau đây là sai: $A\sqrt{B}=C\sqrt{D}\Leftrightarrow\begin{cases}B\geq 0\\D\geq 0\\A^2B=C^2D\end{cases}$

Biến đổi đúng là: $A\sqrt{B}=C\sqrt{D}\Leftrightarrow\begin{cases}A.C\geq 0\\B\geq 0\\D\geq 0\\A^2B=C^2D\end{cases}$ hoặc $A\sqrt{B}=C\sqrt{D}\Leftrightarrow\begin{cases}B\geq 0\\C\geq 0\\A^2B=C^2D\end{cases}$

Nếu sử dụng phép biến đổi hệ quả cần kiểm tra lại nghiệm của phương trình.

Ví dụ 3. Giải phương trình $3\left(2+\sqrt{x-2}\right)=2x+\sqrt{x+6}$.

Lời giải.

-Phân tích hướng giải. Quan sát phương trình đã cho ta nhận thấy trong phương trình có chứa 2 căn thức nên ta nghĩ ngay đến việc loại căn thức. Có hai hình thức loại đó là loại một căn thức hoặc là loại hai căn thức, nhằm mục đích tối giản hóa hình thức bài toán.
-Xét khả năng loại một căn thức thì ta có thể chọn căn thức nào cũng được.
Đặt $t=\sqrt{x-2}$ thì lúc đó ta có $x=t^2+2$
Phương trình trở thành: $3(2+t)=2(t^2+2)+\sqrt{t^2+8}$.
Biến đổi phương trình mới ta sẽ thu được phương trình: $\sqrt{t^2+8}=-2t^2+3t+2$.
Tiếp tục bình phương phương trình này ta sẽ thu được phương trình bậc bốn $t^4-3t^3+3t-1=0$.
Căn cứ vào sự nhẫm nghiệm của phương trình đã cho ban đầu, một chú ý mà chúng tôi đã nhắc ở ví dụ 1. Không khó để thấy $x=3$ thỏa phương trình. Điều đó cũng có nghĩa rằng phương trình theo t có nghiệm $t=1$.
Từ đó phương trình bậc bốn theo t phải có nhân tử $t-1$. Thực hiện phép chia đa thức hoặc sử dụng sơ đồ Honerr ta thu được:
$t^4-3t^3+3t-1=(t-1)(t^3-2t^2-2t+1)=(t-1)(t+1)(t^2-3t+1)$.
Tới đây bài toán hoàn toàn giải quyết do đó ta có hướng giải như sau:
-Hướng 1: Điều kiện $x\geq 2$.
Đặt $t=\sqrt{x-2}$, $t\geq 0$. Từ đó ta có: $x=t^2+2$. Lúc đó phương trình đã cho trở thành: $3(2+t)=2(t^2+2)+\sqrt{t^2+8}\Leftrightarrow\sqrt{t^2+8}=-2t^2+3t+2$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-2t^2+3t+2\geq 0\\t^2+8=(-2t^2+3t+2)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\leq x\leq 2\\t^4-3t^3+3t-1=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\leq x\leq 2\\(t-1)(t+1)(t^2-3t+1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\leq x\leq 2\\\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-1\\t=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\\t=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-2}=1\\\sqrt{x-2}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\dfrac{11-3\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x=3$; $x=\dfrac{11-3\sqrt{5}}{2}$.

-Xét khả năng loại hai căn thức:

Khi nhắc đến việc loại hai căn thức tức là ta dùng hai ẩn phụ để hóa giải hai căn thức bậc hai trong phương trình. Lúc này, thông thường chúng ta sẽ giải một phương trình hai ẩn hoặc một hệ phương trình hai ẩn, tùy theo độ khó của bài toán mà ta có thể tính toán xem việc giải phương trình hay hệ phương tình có lợi. Trước tiên ta ẩn phụ hóa hai căn thức như sau:

$a\sqrt{x-2}$; $b=\sqrt{x+6}$.

Do trong phương trình vẫn còn x nên ta sẽ biến đổi x theo a, b bằng cách ta bình phương a, b rồi cộng lại ta thu được $x=\dfrac{a^2+b^2-4}{2}$ hay $2x=a^2+b^2-4$.

Tới đây thay vào phương trình đã cho ta thu được phương trình:

$3\left(2+a\right)=a^2+b^2-4+b$.

Ở hướng 1 ta đã tìm được nghiệm $x=3$ từ đó ta sẽ thu được $b=3a$. Do đó ta cần tách được nhân tử $b-3a$.

Chúý ý điều kiện ẩn phụ hóa ban đầu ta sẽ thu được: $a^2-b^2+8=0$

Từ đây ta đi đến cách giải quyết thứ hai như sau:

-Hướng 2: Điều kiện $x\geq 2$.

Đặt: $\left\{\begin{array}{l} a=\sqrt{x-2} \\ b=\sqrt{x+6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a^2=x-2 \\ b^2=x+6 \end{array}\right. \Rightarrow 2x=a^2+b^2-4,\ \left(a\geq 0, b\geq 0\right).$

Lúc đó phương trình đã cho trở thành:

$3\left(2+a\right)=a^2+b^2-4+b \Leftrightarrow 10=a^2+b^2+b-3a$.

Từ phép đặt ta có: $8=a^2-b^2$. Do đó ta có phương trình:

$\dfrac{10}{8}\left(b^2-a^2\right)=a^2+b^2+b-3a \Leftrightarrow 2b^2-18a^2=b-3a$

$\Leftrightarrow \left(b-3a\right)\left(b+3a\right)=4\left(b-3a\right) \Leftrightarrow \left(b-3a\right)\left(b+3a-4\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=3a \\ b+3a=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+6}=3\sqrt{x-2}(1) \\ \sqrt{x+6}+3\sqrt{x-2}=4(2) \end{array}\right.$$

Từ (1) ta có: $\sqrt{x+6}=3\sqrt{x-2} \Leftrightarrow x+6=9\left(x-2\right) \Leftrightarrow x=3$.

Từ (2) ta có: $\sqrt{x+6}+3\sqrt{x-2}=4 \Leftrightarrow 3\sqrt{\left(x+6\right)\left(x-2\right)}=14-5x$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 14-5x\geq 0 \\ 9\left(x^2+4x-12\right)=\left(14-5x\right)^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\leq \dfrac{14}{5} \\ 16x^2-176x+304=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\leq \dfrac{14}{5} \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{11+3\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{11-3\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\dfrac{11-3\sqrt{5}}{2}.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của phương trình là $x=3$; $x=\dfrac{11-3\sqrt{5}}{2}$.

-Tuy nhiên, chúng ta có thể loại căn thức một cách trực diện cho bài toán thông qua góc nhìn sau:

Qua hai hướng phân tích trên ta thấy được phương trình đã cho luôn có nghiệm $x=3$. Quan sát phương trình đã cho ta có hai nhận xét sau:

$6-2x=2(3-x)$
$9(x-2)-(x+6)=8(x-3)$.
Vậy dễ thấy chúng ta có nhân tử $x-3$, muốn có được nhận xét thứ hai ta cần thoát hai căn thức, điều này có được nhờ chúng ta vận dụng liên hợp cho đại lượng $3\sqrt{x-2}-\sqrt{x+6}$.
Từ nay, ta sẽ có thêm một hướng giải nữa cho bài toán như sau:
-Hướng 3: Điều kiện $x\geq 2$.
Phương tình đã cho được biến đổi thành: $3\sqrt{x-2}-\sqrt{x+6}=2x-6(*)$
Nhận xét rằng $x\geq 2$ ta luôn có $3\sqrt{x-2}+\sqrt{x+6}\neq 0$. Khi đó ta biến đổi phương trình (*) trở thành:
$$\frac{\left(3\sqrt{x-2}+\sqrt{x+6}\right)\left(3\sqrt{x-2}-\sqrt{x+6}\right)}{3\sqrt{x-2}+\sqrt{x+6}}=2(x-3)\Leftrightarrow \frac{8(x-3)}{3\sqrt{x-2}+\sqrt{x+6}}=2(x-3)$$
$$\Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{4}{3\sqrt{x-2}+\sqrt{x+6}}-1\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ 3\sqrt{x-2}+\sqrt{x+6}=4\end{array}\right.$$
Tới đây ta giải như hướng 2 và ta cũng tìm được kết quả của bài toán. ■
-Bình luận. Lại một lần nữa chúng ta thấy được, đứng trước một phương trình vô tỷ với những lăng kính nhìn khác nhau thì chúng ta lại thu được những lời giải thú vị khác nhau và mỗi ý tưởng giải nó đều có xuất phát điểm tư duy khác nhau.

Ví dụ 4. Giải phương trình$\sqrt{12-x}.\sqrt{15-x}+\sqrt{15-x}.\sqrt{20-x}+\sqrt{20-x}.\sqrt{12-x}=x$.

✍ **Lời giải.**
-Phân tích hướng giải. Với bài toán này để thoát căn các bạn sẽ nghĩ không thể dùng phép nâng lũy thừa được vì sẽ tạo ra rắc rối cho phương trình. Tuy nhiên các bạn hãy để ý bên vế trái của phương trình có chứa các tích dạng $ab+bc+ca$ gần giống với sự khai triển của hằng đẳng thức $(a+b+c)^2$. Do đó để thoát căn thức ta nghĩ đến phép nâng lũy thừa hoặc đặt ẩn phụ hóa, đồng thời sử dụng máy tính ta biết được phương trình có nghiệm duy nhất $x=11$, ta có thể nghĩ đến phương pháp liên hợp hoặc phương pháp hàm số để giải quyết. Tuy vậy phương pháp liên hợp với bài toán này thật sự sẽ không cần thiết vì khi đó ta sẽ tạo ra những biểu thức rắc rối thêm cho bài toán.
-Hướng 1: Dùng phép nâng lũy thừa: Điều kiện: $\left\{\begin{array}{l} 12-x\geq 0 \\ 15-x\geq 0 \\ 20-x\geq 0 \\ x\geq 0\end{array}\right.\Leftrightarrow 0\leq x\leq 12$.
Phương trình đã cho được biến đổi tương đương với phương trình sau:
$47-3x+2\sqrt{12-x}.\sqrt{15-x}+2\sqrt{15-x}.\sqrt{20-x}+2\sqrt{20-x}.\sqrt{12-x}=47-3x+2x$.
$\Leftrightarrow \left(\sqrt{12-x}+\sqrt{15-x}+\sqrt{20-x}\right)^2=47-x$.
$\Leftrightarrow 12-x+2\sqrt{12-x}\left(\sqrt{15-x}+\sqrt{20-x}\right)+\left(\sqrt{15-x}+\sqrt{20-x}\right)^2=47-x$
$\Leftrightarrow \left(\sqrt{15-x}+\sqrt{20-x}\right)^2=47-x-\sqrt{12-x}\left(\sqrt{12-x}+\sqrt{15-x}+\sqrt{20-x}+\sqrt{15-x}+\sqrt{20-x}\right)$
$\Rightarrow \left(\sqrt{15-x}+\sqrt{20-x}\right)^2=47-x-\sqrt{12-x}\left(\sqrt{47-x}+\sqrt{47-x}-\sqrt{12-x}\right)$
$\Leftrightarrow \left(\sqrt{15-x}+\sqrt{20-x}\right)^2=\left(\sqrt{47-x}\right)^2-2\sqrt{12-x}.\sqrt{47-x}+\left(\sqrt{12-x}\right)^2$
$\Leftrightarrow \left(\sqrt{15-x}+\sqrt{20-x}\right)^2=\left(\sqrt{47-x}-\sqrt{12-x}\right)^2$
$\Leftrightarrow 35+2\sqrt{15-x}.\sqrt{20-x}-2x=59-2\sqrt{47-x}.\sqrt{12-x}-2x$
$\Leftrightarrow \sqrt{15-x}.\sqrt{20-x}=12-\sqrt{47-x}.\sqrt{12-x}$
$\Rightarrow (15-x)(20-x)=144-24\sqrt{(47-x)(12-x)}+(47-x)(12-x)$
$\Leftrightarrow \sqrt{(47-x)(12-x)}=17-x\Leftrightarrow (47-x)(12-x)=(17-x)^2\Leftrightarrow x=11$.
Đối chiếu điều kiện và thử lại ta có nghiệm của phương trình là $x=11$.

-Hướng 2: Đặt ẩn phụ. Điều kiện: $\begin{cases} 12 - x \geq 0 \\ 15 - x \geq 0 \\ 20 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 12.$

Đặt: $\begin{cases} a = \sqrt{12 - x} \geq 0 \\ b = \sqrt{15 - x} \geq 0 \\ c = \sqrt{20 - x} \geq 0 \end{cases}$, $(a, b, c \geq 0)$. Từ phép đặt ta có: $\begin{cases} x = 12 - a^2 \\ x = 15 - b^2 \\ x = 20 - c^2 \end{cases}$

Kết hợp với phương trình đã cho ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} ab + bc + ca = 12 - a^2 \\ ab + bc + ca = 15 - b^2 \\ ab + bc + ca = 20 - c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)(a+c) = 12 \\ (b+c)(b+a) = 15 \\ (c+a)(c+b) = 20 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 60 = 3.4.5 \Rightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ b + c = 5 \\ c + a = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{12 - x} = 1 \\ \sqrt{15 - x} = 2 \\ \sqrt{20 - x} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 11.$$

Đối chiếu điều kiện và thử lại ta có nghiệm của phương trình là $x = 11$.

-Hướng 3: Sử dụng hàm số. Điều kiện: $\begin{cases} 12 - x \geq 0 \\ 15 - x \geq 0 \\ 20 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 12.$

Ta có: $15 - x = (12 - x) + 3$; $20 - x = (12 - x) + 8$.
Do đó đặt: $t = \sqrt{12 - x}$, $(t \geq 0)$. Ta có phương trình đã cho được biến đổi thành phương trình: $t\sqrt{t^2 + 3} + \sqrt{t^2 + 3}\sqrt{t^2 + 8} + t\sqrt{t^2 + 8} + t^2 = 12$.
Xét hàm số $f(t) = t\sqrt{t^2 + 3} + \sqrt{t^2 + 3}\sqrt{t^2 + 8} + t\sqrt{t^2 + 8} + t^2$ với $t \geq 0$.
Ta có: $f'(t) = \sqrt{t^2 + 3} + \dfrac{t^2}{\sqrt{t^2 + 3}} + \dfrac{2t^3 + 11t}{\sqrt{t^4 + 11t^2 + 24}} + \sqrt{t^2 + 8} + \dfrac{t^2}{\sqrt{t^2 + 8}} > 0$ với $t \geq 0$.
Do đo hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến với $t \geq 0$. Mặt khác $f(1) = 12$.
Suy ra phương trình $f(t) = 12$ có nghiệm duy nhất
$t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{12 - x} = 1 \Leftrightarrow x = 11$.
Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 11$.

-Bình luận. Đây là một bài toán hướng giải có thể đến rất tự nhiên là nâng lũy thừa hoặc ẩn phụ để đưa về hệ phương trình ba ẩn cơ bản, phương pháp hàm số cũng không có gì là khó khăn chỉ cần xử lí đạo hàm tốt. Bài toán này về hình thức của nó có khá nhiều bài toán giống như vậy trên các sách tham khảo khác nhưng về hướng giải dùng phép nâng lũy thừa hầu như không được quan tâm đến mà chủ yếu ẩn phụ hóa đưa về hệ phương trình ba ẩn cơ bản như hướng 2.

Ví dụ 5. Giải phương trình $x+1+\sqrt{x^2-4x+1}=3\sqrt{x}$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích hướng giải. Đối với phương trình này điều đầu tiên ta quan tâm chính là điều kiện của bài toán.

Ta có điều kiện: $\begin{cases} x^2-4x+1\geq 0 \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\geq 2+\sqrt{3} \\ 0\leq x\leq 2-\sqrt{3} \end{array}\right.$

Sử dụng máy tính bấm nghiệm của phương trình trong vùng cho phép của điều kiện vừa tìm ta có hai giá trị là $\frac{1}{4}$; 4. Điều này gợi ý cho ta cần tách phương trình sao cho có hai nhân tử $\left(x-\frac{1}{4}\right)(x-4)=x^2-\frac{17}{4}x+1$.

Muốn đạt được điều này, chúng ta cần sử dụng phương pháp chọn hệ số bất định để thêm bớt trong phương trình đã cho, sau đó dùng liên hiệp để đạt được hiệu quả muốn có.

Ta biến đổi phương trình: $x+1-3\sqrt{x}+\sqrt{x^2-4x+1}=0(*)$

Ở phương trình (*) mục đích của chúng ta là tách cho có được đại lượng bậc hai $x^2-\frac{17}{4}x+1$ và trong phương trình (*) lại chứa ba đại lượng: $x+1$; $\sqrt{x}$; $\sqrt{x^2-4x+1}$ nên để có đại lượng bậc hai và không làm xáo trộn các đại lượng trong phương trình thì ta nên để ý tới đại lượng $\sqrt{x}$, bởi vì nó chính là sự khác biệt nhất đối với hai đại lượng còn lại nhưng lại liên quan chặt chẽ vì ta cần đại lượng nhân tử bậc hai do đó ta cần ghép đại lượng $\sqrt{x}$ với một đại lượng bậc nhất hoặc với một đại lượng căn thức chứa phương trình bậc hai. Mà hai yêu cầu thì trong bài toán đã có. Do đó, việc còn lại là bây giờ ta chọn hệ số bất định nữa là xem như nút thắt bài toán được giải quyết.

Bây giờ, ta đi chọn hệ số qua hai nhận xét sau:

-Ta có: $(x-1)^2-(a\sqrt{x})^2=x^2-\frac{17}{4}x+1\Leftrightarrow x^2-(2+a^2)\,x+1=x^2-\frac{17}{4}x+1(1)$

Đồng nhất hệ số hai vế của phương trình (1) ta có: $2+a^2=\frac{17}{4}\Leftrightarrow a=\pm\frac{5}{2}$.

-Ta có: $\left(\sqrt{x^2-4x+1}\right)^2-(b\sqrt{x})^2=x^2-\frac{17}{4}x+1\Leftrightarrow x^2-(4+b^2)\,x+1=x^2-\frac{17}{4}x+1(2)$

Đồng nhất hệ số hai vế của phương trình (2) ta có: $4+b^2=\frac{17}{4}$ $b=\pm\frac{1}{2}$.

-Lại có hệ số $\sqrt{x}$ trong bài toán là -3 nên ta sẽ chọn hai hệ số phù hợp lại $a=-\frac{5}{2}$; $b=-\frac{1}{2}$. Do đó ta có hướng giải quyết bài toán như sau:

-Hướng 1: Điều kiện: $\begin{cases} x^2-4x+1\geq 0 \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\geq 2+\sqrt{3} \\ 0\leq x\leq 2-\sqrt{3} \end{array}\right.$

Phương trình đã cho được biến đổi thành: $x+1-\frac{5}{2}\sqrt{x}+\sqrt{x^2-4x+1}-\frac{1}{2}\sqrt{x}=0(3)$

Nhận xét rằng với điều kiện đang xét ta luôn có:

$x+1+\frac{5}{2}\sqrt{x}>0$; $\sqrt{x^2-4x+1}+\frac{1}{2}\sqrt{x}>0$

Do đó phương trình (3) được biến đổi thành:

$$\frac{(x+1)^2-\frac{25}{4}x}{x+1+\frac{5}{2}\sqrt{x}}+\frac{x^2-4x+1-\frac{1}{4}x}{\sqrt{x^2-4x+1}+\frac{1}{2}\sqrt{x}}=0$$

$\Leftrightarrow \left(x^2-\frac{17}{4}x+1\right)\left(\frac{1}{x+1+\frac{5}{2}\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x^2-4x+1}+\frac{1}{2}\sqrt{x}}\right)=0$

$\Leftrightarrow x^2-\frac{17}{4}x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{4} \\ x=4 \end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện ta có hai nghiệm của phương trình là $x=4$; $x=\frac{1}{4}$.

Tuy nhiên, nếu ta để ý một chút về hệ số của phương trình đã cho, ta sẽ thấy có sự đối xứng nên ta có quyền hy vọng vào việc đặt ẩn phụ để giải bài toán. Thật vậy, ta có hướng giải sau đây:

-Hướng 2: Điều kiện: $\begin{cases} x^2-4x+1\geq 0 \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\geq 2+\sqrt{3} \\ 0\leq x\leq 2-\sqrt{3} \end{array}\right.$

Nhận xét rằng $x=0$ không thỏa phương trình nên với điều kiện: $\left[\begin{array}{l} x\geq 2+\sqrt{3} \\ 0\leq x\leq 2-\sqrt{3} \end{array}\right.$

Chia hai vế phương trình cho $\sqrt{x}$ ta thu được phương trình:

$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x+\frac{1}{x}-4}=3(3)$

Đặt $t=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\geq 2$. Ta có: $t^2-2=x+\frac{1}{x}$. Lúc đó phương trình (3) trở thành: $\sqrt{t^2-6}=3-t$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-t\geq 0 \\ t^2-6=9-6t+t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\leq t\leq 3 \\ t=\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow t=\frac{5}{2}.$

Với $t=\frac{5}{2}\Leftrightarrow \sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{5}{2}\Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=\frac{17}{4}\Leftrightarrow x^2-\frac{17}{4}x+1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{4} \\ x=4 \end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện ta có hai nghiệm của phương trình là $x=4$; $x=\frac{1}{4}$. ■

Ví dụ 6. Giải phương trình $2\sqrt{x+1}+6\sqrt{9-x^2}+6\sqrt{(x+1)(9-x^2)}+x^3+2x^2-10x-38=0$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích hướng giải. Phương trình đã cho có hình thức khá rối mắt, tuy nhiên vẫn khá thoáng trong cách đánh giá lối đi cho bài toán. Thật vậy, bài toán chỉ xoay quanh hai đại lượng đó là $\sqrt{x+1}$; $\sqrt{9-x^2}$. Mặt khác khi lập tích của hai biểu thức trong căn của hai đại lượng này ta gặp được phương trình bậc 3 gần giống phương trình bậc ba trong đề bài. Vậy là tổng quan xem chừng chúng ta tìm được mối liên hệ giữa các đại lượng.

Bây giờ, ta chỉ cần chỉ rõ mối liên hệ là gì? Quan sát ta thấy hệ số trước $\sqrt{x+1}$ là 2 và $\sqrt{9-x^2}$ là 6 điều này gợi cho ta liên tưởng đến hằng đẳng thức. Muốn đạt hiệu quả ta thử tách thêm bớt:

-Ta có: $2\sqrt{x+1}=x+1-2\sqrt{x+1}+1=\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2$

-Ta có: $6\sqrt{9-x^2}=9-x^2-6\sqrt{9-x^2}+9=\left(\sqrt{9-x^2}-3\right)^2$

-Ta có: $(x+1)(9-x^2)=-x^3-x^2+9x+9$

Để đạt được hai hằng đẳng thức như đã phân tích ta cần thêm bớt đi hai đại lượng $x+2$; $18-x^2$.

Điều đó có nghĩa là: $-x^3-2x^2+10x+38-(x+2)-(18-x^2)=-x^3-x^2+9x+18=(-x^3-x^2+9x+9)+9$

Từ nhận xét này kết hợp với đại lượng $6\sqrt{(x+1)(9-x^2)}$ ta thu được hằng đẳng thức $\left(\sqrt{(x+1)(9-x^2)}-3\right)$
. Tới đat xem như bài toán đã được giải quyết. Cụ thể ta có hướng giải:
Điều kiện: $(x+1)(9-x^2)\geq 0 \Leftrightarrow -1\leq x\leq 3$.
Phương trình đã cho được biến đổi thành:

$$-2\sqrt{x+1}-6\sqrt{9-x^2}-6\sqrt{(x+1)(9-x^2)}-x^3-2x^2+10x+38=0$$

$$\Leftrightarrow x+1-2\sqrt{x+1}+1+9-x^2-6\sqrt{9-x^2}+9+9-6\sqrt{(x+1)(9-x^2)}-x^3-x^2+9x+9=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}-1\right)^2+\left(\sqrt{9-x^2}-3\right)^2+\left(\sqrt{(x+1)(9-x^2)}-3\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x+1}-1=0\\ \sqrt{9-x^2}-3=0\\ \sqrt{(x+1)(9-x^2)}-3=0\end{cases} \Leftrightarrow x=0$$

Vậy phương trình có một nghiệm duy nhất là $x=0$. ■

-Bình luận. Bài toán này được hướng đi như thế chính là sự cảm nhận từ tích của hai đại lượng $(x+1)(9-x^2)$ và hệ số đứng trước các biểu thức căn thức. Và lối đi này có thể được xem gọn đẹp nhất đối với bài toán này.

Ví dụ 7. Giải phương trình $(x-1)\sqrt{x^2-2x+5}-4x\sqrt{x^2+1}=2(x+1)$.

✍ Lời giải.

-Phân tích hướng giải. Không khó để thấy phương trình chúng ta đang xét có vùng điều kiện của x là Sử dụng máy tính bấm nghiệm của phương trình ta sẽ thu được một nghiệm $x=-1$. Điều đó có nghĩa rằng ta cần có nhân tử $x+1$. Để thực hiện được điều này cùng với quan sát các căn thức trong phương trình thì khả năng loại căn bằng ẩn phụ khó có thể đạt được hiệu quả, vậy khả năng tách được nhân tử $x+1$ chỉ còn dựa vào tách tích nhóm hạng tử. Để tách tích ta có thể sử dụng trực tiếp bằng cách thêm bớt đại số nhóm hạng tử phù hợp hoặc chúng ta sử dụng khử liên hợp để đạt được nhân tử. Trong trường hợp bài toán này thì sử dụng biến đổi trực tiếp từ phương trình tạo ra nhân tử là điều không khả thi nên ta sẽ dùng phương án khư liên hợp để tách nhân tử $x+1$. Bây giờ ta quan sát thất nếu với biểu thức $\sqrt{x^2-2x+5}$ để có thể liên hợp ra nhân tử $x+1$ ta cần chọn $x=-1$.
Tức là cho $x=-1\Rightarrow \sqrt{x^2-2x+5}=2$. Vậy biểu thức cần liên hợp đó chính là $\sqrt{x^2-2x+5}+2$.
Tuy nhiên, nhìn vào vế phải phương trình đã thấy nhân tử $x+1$ đã có và hệ số của nó cũng là 2 nên ta có quyền nghĩ đến việc phân phối như sau:
$2(x+1)-(x-1)\sqrt{x^2-2x+5}=(x+1)\left(2+\sqrt{x^2-2x+5}\right)-2x\sqrt{x^2-2x+5}$.
Lúc này, ta để ý thấy rằng đại lượng mới vừa xuất hiện là $-2x\sqrt{x^2-2x+5}$ kết hợp với đại lượng có sẵn trong phương trình là $4x\sqrt{x^2+1}$. Khi đó, ta nhóm hai đại lượng này lại có: $-2x\sqrt{x^2-2x+5}+4x\sqrt{x^2+1}=2x\left(2\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-2x+5}\right)$
Tới đây ta để ý thấy rằng: $4(x^2+1)-(x^2-2x+5)=3x^2+2x-1=(x+1)(3x-1)$.
Điều này gợi cho chúng ta ý tưởng sẽ liên tưởng cho biểu thức
$2\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-2x+5}$ để có nhân tử $x+1$.
Tới đây, chúng ta đã rõ nét về hướng giải bài toán đang xét. Cụ thể như sau:
Điều kiện. Phương trình đã cho được biến đổi thành:

$$2(x+1)-(x-1)\sqrt{x^2-2x+5}+4x\sqrt{x^2+1}=0$$

$$\Leftrightarrow 2(x+1)+(x+1-2x)\sqrt{x^2-2x+5}+4x\sqrt{x^2+1}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left(2+\sqrt{x^2-2x+5}\right)+2x\left(2\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-2x+5}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left(2+\sqrt{x^2-2x+5}\right)+2x\frac{4(x^2+1)-(x^2-2x+5)}{2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+5}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left(2+\sqrt{x^2-2x+5}\right)+2x\frac{(x+1)(3x-1)}{2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+5}}=0$$

$\Leftrightarrow (x+1)\left(2+\sqrt{x^2-2x+5}+\dfrac{6x^2-2x}{2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+5}}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ 2+\sqrt{x^2-2x+5}+\dfrac{6x^2-2x}{2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+5}}=0(*) \end{array}\right.$

Phương trình (*) cho ta: $4\sqrt{x^2+1}+2\left(\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2+1}\right)+7x^2-4x+5=0$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{x^2+1}+2\left(\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2+1}\right)+6x^2+(x-2)^2+1=0$

Phương trình vô nghiệm vì

$4\sqrt{x^2+1}+2\left(\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2+1}\right)+6x^2+(x-2)^2+1>0,$

Do đó phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất $x=-1$. ■

-Bình luận. Phương trình này chúng tôi đưa ra lối tư duy giải phương trình bằng cách tách tích cộng với liên hợp dựa trên yếu tố nhận biết $x=-1$ là nghiệm duy nhất của phương trình. Tuy nhiên, phương pháp giải toán thì không có gì là ưu việt nhất, vì đôi lúc với bài toán này nó là ưu việt nhưng với bài toán khác thì nó chưa chắc được vì có nhiều lí do khách quan. Cụ thể, khi sử dụng phương pháp liên hợp thì thường ta có ưu thế về nghiệm nhưng lại vướng phải một điều đó là đánh giá phương trình còn lại vô nghiệm thế nào cũng là một điều đáng quan tâm, chưa kể có đôi lúc phương trình ấy lại có nghiệm "ngầm" mà ta không biết. Bài toán trên khi xử lí phương trình còn lại vô nghiệm là một hình thức xử lí đơn giản về sau chúng tôi sẽ có những bài toán đánh giá phức tạp hơn cũng như có nghiệm "ngầm" để độc giả có thể hiểu hết vấn đề.

Ví dụ 8. Giải phương trình $16x^4-72x^3+81x^2-28+16\left(x-\sqrt{x-2}\right)=0$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích hướng giải. Với mọi phương trình vô tỷ, thì hầu hết ta phải nhẩm nghiệm trước khi đưa ra vấn đề suy xét là giải nó như thế nào? Sử dụng máy tính ta có ngay $x=\dfrac{9}{4}$ là nghiệm của phương trình. Như vậy, theo lẽ tự nhiên ta cần xuất hiện nhân tử $4x-9$ bằng những phương pháp tách nhân tử. Tuy nhiên, với bài toán này nếu ta đi tách tích bằng nhóm hạng tử đại số liên hợp như ví dụ 5 ta sẽ gặp trở ngại ngay tức khắc.

Thật vậy, không khó để biến đổi phương trình về phương trình sau:

$[x(4x-9)]^2+4(4x-9)+8\left(1-2\sqrt{x-2}\right)=0$

$\Leftrightarrow (4x-9)\left[x^2(4x-9)+4-\dfrac{8}{1+2\sqrt{x-2}}\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x-9=0 \\ x^2(4x-9)+4-\dfrac{8}{1+2\sqrt{x-2}}=0(*) \end{array}\right.$

Vấn đề bây giờ là phương trình (*) chúng ta giải quyết thế nào? Kinh nghiệm cho thấy nghiệm của phương trình đang xét thu được là $x=\dfrac{9}{4}$ ta thử xem với nghiệm này phương trình (*) có thỏa mãn hay không?

Và thật may mắn ta có ngay $x=\dfrac{9}{4}$ thỏa mãn phương trình (*) cùng với máy tính ta biết được ngay phương trình này chỉ có mỗi nghiệm $x=\dfrac{9}{4}$. Vậy chứng tỏ phương trình (*) không vô nghiệm như chúng ta mong muốn. Do đó, ta cần giải quyết phương trình (*).

Quan sát thấy phương trình (*) chỉ chứa một căn thức nên ta hoàn toàn loại căn thức bằng ẩn phụ hóa.

Nhận thấy rằng $x=2$ không thỏa phương trình do đó ta chỉ cần xét $x>2$.

Đặt $t=\sqrt{x-2}$, $t>0$. Ta có $t^2+2=x$. Thế vào phương trình (*) ta thu được phương trình: $\left(t^2+2\right)^2\left(4t^2-1\right)(1+2t)+4(1+2t)-8=0\,(*')$

Phương trình $(*')$ cho ta thấy sự xuất hiện rất nhiều lần của $2t+1$ nên thay vì khai triển trực tiếp ra

phương trình bậc 7 hơi ái ngại, ta có thể ẩn phụ hóa thêm 1 lần nữa. Và tới đây bài toán hoàn toàn được giải quyết.
Cụ thể lời giải như sau:
Điều kiện: $x \geq 2$. Nhận xét $x = 2$ không thỏa phương trình đã cho. Xét $x > 2$ phương trình đã cho được biến đổi thành:
$[x(4x-9)]^2 + 4(4x-9) + 8\left(1 - 2\sqrt{x-2}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow (4x-9)\left[x^2(4x-9) + 4 - \frac{8}{1+2\sqrt{x-2}}\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x-9=0 \\ x^2(4x-9)+4-\dfrac{8}{1+2\sqrt{x-2}} = 0(*) \end{array}\right.$$

Với phương trình (*)
-Cách 1: Đặt $t = \sqrt{x-2}$, $t > 0$. Ta có: $x = t^2 + 2$.
Lúc đó phương trình (*) trở thành:
$(t^2+2)^2(4t^2-1)(1+2t) + 4(1+2t) - 8 = 0(1)$
Đặt $u = 2t+1$, $u > 1$. Ta có: $t = \dfrac{u-1}{2}$. Lúc đó phương trình (1) trở thành:
$$\left[\left(\frac{u-1}{2}\right)^2 + 2\right]\left[4\left(\frac{u-1}{2}\right)^2 - 1\right] + 4(u-2) = 0$$
$\Leftrightarrow u(u^2-2u+9)(u-2) + 16(u-2) = 0 \Leftrightarrow (u-2)\left\{u\left[(u-1)^2+8\right]+16\right\} = 0$
$\Leftrightarrow u = 2$ do $\left\{u\left[(u-1)^2+8\right]+16\right\} > 0, \forall u > 1$
Từ $u = 2 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{9}{4}$.
Vậy phương trình có một nghiệm duy nhất $x = \dfrac{9}{4}$.
Tuy nhiên, ở phương trình thứ hai nếu ta tinh ý một chút cùng với sự xuất hiện nghiệm duy nhất $x = \dfrac{9}{4}$ thì ta có thể liên hợp tiếp một lần nữa như sau:
-Cách 2: Phương trình (*) tương đương với phương trình sau:
$$x^2(4x-9) + 4 - \frac{8\left(1+2\sqrt{x-2}\right)}{\left(1+2\sqrt{x-2}\right)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2(4x-9)\left(1+2\sqrt{x-2}\right)^2 + 4(4x-9) = 0$$
$$\Leftrightarrow (4x-9)\left[x^2\left(1+2\sqrt{x-2}\right)^2 + 4\right] = 0 \Leftrightarrow 4x-9 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9}{4}.$$
Và qua đây, ta thấy bài toán này nếu dùng phương án liên hợp tách nhân tử ưu thế về nghiệm thật sự không ưu việt và khá dài. Tuy nhiên, nếu quan sát kỉ bài toán dưới cách nhìn khác ta sẽ có một lời giải rất đẹp cho bài toán.
Ta bắt đầu bằng việc để ý đại lượng $x - \sqrt{x-2}$ là một đại lượng được xem như "thiếu hụt" hằng đẳng thức.
Mà nghiệm của phương trình lúc này là $x = \dfrac{9}{4}$, mà phương tình vô tỷ thì cần thoát căn do đó khi cho $x = \dfrac{9}{4}$ ta có ngay được $\sqrt{x-2} = \dfrac{1}{2}$ và lúc này ta đã biết hướng đi tới hằng đẳng thức chính là: $\left(\sqrt{x-2} - \dfrac{1}{2}\right)^2$.
Và tới đây nhiệm vụ của chúng ta là có biến đổi sau:
$$16\left(x - \sqrt{x-2}\right) = 16\left(x - 2 - \sqrt{x-2} + \frac{1}{4} + \frac{7}{4}\right) = 16\left(\sqrt{x-2} - \frac{1}{2}\right)^2 + 28(2)$$
Tiếp theo đã để ý phương trình bậc 4 đề bài cho giúp cho ta hoàn toàn tách được một bậc hai cộng (trừ) lẻ 1 hằng số. Thật vậy, ta có:
$$16x^4 - 72x^3 + 81x^2 - 28 = 16x^2\left(x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{81}{16}\right) - 28 = 16x^2\left(x - \frac{9}{4}\right)^2 - 28(3)$$
Từ (2) và (3) gợi cho ta một suy nghĩ đó là ta dùng biện pháp so sánh: $f(x) \leq a \leq g(x)$. Thật vậy, ta

đi vào lời giải cụ thể như sau:
-Cách 3: Điều kiện: $x \geq 2$.
Phương trình đã cho được biến đổi thành phương trình sau:
$16\left(x-\sqrt{x-2}\right)=-16x^4+72x^3-81x^2+28$
Ta có: $VP=16\left(x-\sqrt{x-2}\right)=16\left(x-2-\sqrt{x-2}+\frac{1}{4}+\frac{7}{4}\right)=16\left(\sqrt{x-2}-\frac{1}{2}\right)^2+28\geq 28$
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $\sqrt{x-2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{9}{4}$.
Lại có: $VT=-16x^4+72x^3-81x^2+28=-16x^2\left(x^2-\frac{9}{2}x+\frac{81}{16}\right)+28=-16x^2\left(x-\frac{9}{4}\right)^2+28\leq 28$
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $x\left(x-\frac{9}{4}\right)=0\Leftrightarrow x=0\vee x=\frac{9}{4}$.
Vậy ta có: $VT\leq 28\leq VP$. Đối chiếu điều kiện của bài toán và để có được phương trình đã cho thì nghiệm duy nhất thỏa bài toán đó là $x=\frac{9}{4}$. ■

Ví dụ 9. Giải phương trình $\left(1+\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{2x^2-2x+1}+x-1\right)=x\sqrt{x}$. (1)

✍ **Lời giải.**

-Phân tích hướng giải. Ở bài toán này, quan sát bài toán ta thấy rằng bài toán chứa khá nhiều căn thức và xem chừng chúng không liên quan gì đến nhau nhiều. Với mong muốn thoát căn thì việc nâng lũy thừa thì tính khả thi không cao, còn đặt ẩn phụ thì cũng khó nhìn thấy. Nhưng có một điều chúng ta dễ nhận thấy nhất đó là vế trái của phương trình chứa tích của hai tổng chứa căn, đặc biệt sự xuất hiện đối lập của -1 và 1 ở hai tổng và bên vế phải phương trình lại không chứa bất kì một hệ số nào nên điều tự nhiên ta nghĩ ngay đến giá trị $x=0$ có liên quan gì đến phương trình đã cho không?
Với $x=0$, ta thấy ngay được phương tình đã cho thỏa.
Mặt khác với hy vọng thoát căn thì rõ ràng ta "gỡ" được căn thức bớt đi bên vế trái bao nhiêu thì ta được lợi bấy nhiêu. Quan sát ta thấy được hai đánh giá sau:
$1-(1+x)=-x$
$(2x^2-2x+1)-(x-1)^2=x^2$
Điều này, giúp ta nghĩ đến liên hợp "kiểu ngang" cho phương trình đã cho hai lần, mỗi lần cho một tổng ta sẽ thu gọn được hết căn thức bên vế trái và bớt ẩn số x cho vế phải. Thật vậy, ta biến đổi như sau:
$-x\left(\sqrt{2x^2-2x+1}+x-1\right)=x\sqrt{x}\left(1-\sqrt{1+x}\right)$
Tiếp tục liên hợp cho tổng thứ hai, ta thu được:
$-x^3=x\sqrt{x}\left(1-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{2x^2-2x+1}-x+1\right)$
Với điều kiện của bài toán, ta thu gọn ta có được biến đổi:
$-x\sqrt{x}=\left(1-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{2x^2-2x+1}-x+1\right)\,(*)$
Ta thấy ở phương trình (*) và phương trình ban đầu có tổng hai vế cộng lại bằng 0 và có các số hạng có thể rút gọn với nhau nên ta thực hiện phép cộng ta thu được một biến đổi đơn giản sau:
$\sqrt{2x^2-2x+1}=(1-x)\sqrt{1+x}$
Đây là một phương trình vô tỷ hoàn toàn có thể nâng lũy thừa giải đơn giản.
Bây giờ, ta cụ thể hóa lại lời giải của bài toán này như sau:
-Cách 1: Điều kiện: $x\geq 0$
Nhận xét $x=0$ thỏa phương trình đã cho. Vậy ta chỉ cần xét với $x>0$.
Với $x>0$ ta luôn có: $\sqrt{2x^2-2x+1}-x+1\neq 0$ và $1-\sqrt{1+x}\neq 0$
Do đó phương trình đã cho được biến đổi thành phương trình:
$-x\left(\sqrt{2x^2-2x+1}+x-1\right)=x\sqrt{x}\left(1-\sqrt{1+x}\right)$
$\Leftrightarrow -x^3=x\sqrt{x}\left(1-\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{2x^2-2x+1}-x+1\right)$
$\Leftrightarrow \left(1-\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{2x^2-2x+1}-x+1\right)=-x\sqrt{x}(2)$
Lấy (1)+(2) vế theo vế ta th được phương trình:

$$\sqrt{2x^2-2x+1}=(1-x)\sqrt{1+x} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x\geq 0 \\ x>0 \\ 2x^2-2x+1=(1-x)^2(1+x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0<x\leq 1 \\ x\left(x^2-3x+4\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x\leq 1 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy phương tình đã cho có hai nghiệm: $x=0$; $x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Như đã chỉ ra ở phần phân tích hướng giải, chúng tôi có đề cập đến việc đặt ẩn phụ là khó thấy nhưng điều đó không có khả năng là chúng ta không đặt được. Nếu quan sát tinh ý một chút ta thấy rằng các hệ số trong phương trình đã cho sẽ xuất hiện đại lượng $\dfrac{1}{x}$ nếu chúng ta chia và sắp xếp đại lượng chia hợp lí. Thật vậy nếu với tổng thứ nhất trong tích ta chia cho $\sqrt{x}$ ta sẽ thu được một biến đổi sau:

$\dfrac{1+\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{\dfrac{1}{x}+1}$

Với tổng thứ hai ta chia cho x ta sẽ thu được một biến đổi sau:

$\dfrac{\sqrt{2x^2-2x+1}+x-1}{x}=\sqrt{2-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1-\dfrac{1}{x}$

Điều này dẫn đến cho ta thuận lợi đó là: khai thác hết đại lượng $x\sqrt{x}$ ở vế phải và làm xuất hiện được đại lượng $\dfrac{1}{x}$.

Với việc khai thác này, ta sẽ chuyển hóa bài toán về ẩn phụ cho hình thức bài toán được đơn giản hóa hình thức của nó. Với $a=\dfrac{1}{x}$, ta sẽ đưa bài toán về phương trình sau:$\left(\sqrt{a}+\sqrt{a+1}\right)\left(\sqrt{2-2a+a^2}+1-a\right)=1$

Lúc này với nhận xét rằng:

$\left(\sqrt{a}+\sqrt{a+1}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{a-1}\right)=1$ và $\sqrt{1+(a-1)^2}-(a-1)$

Nên ta có tiếp biến đổi sau: $\sqrt{1+(a-1)^2}-(a-1)=\sqrt{a+1}-\sqrt{a}(*)$

Ở phương trình (*) ta thấy vế trái và vế phải về hình thức có sự giống nhau chỉ khác về biến số nên ta sẽ nghĩ ngay đến việc xét một hàm số đặc trưng để từ đó giải bài toán bằng phương pháp hàm số.

Từ đó ta có tiếp một cách giải sau:

-Cách 2: Điều kiện $x\geq 0$

Với $x=0$ phương trình đã cho được nghiệm đúng.

Với $x>0$ ta chia hai vế phương trình cho $x\sqrt{x}$, ta thu được phương trình:

$\dfrac{1+\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}}.\dfrac{\sqrt{2x^2-2x+1}+x-1}{x}=1$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{\dfrac{1}{x}+1}\right).\left(\sqrt{2-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1-\dfrac{1}{x}\right)=1(3)$

Đặt $a=\dfrac{1}{x}$, $a>0$, ta có phương trình (3) trở thành phương trình:

$\left(\sqrt{a}+\sqrt{a+1}\right)\left(\sqrt{2-2a+a^2}+1-a\right)=1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{a}+\sqrt{a+1}\right)\left(\sqrt{1+(a-1)^2}-(a-1)\right)=1$

Nhận xét với $a>0 \Rightarrow \sqrt{a+1}-\sqrt{a}\neq 0$ nên ta có được biến đổi sau:

$\sqrt{1+(a-1)^2}-(a-1)=\sqrt{a+1}-\sqrt{a} \Leftrightarrow \sqrt{1+(a-1)^2}-(a-1)=\sqrt{1+(\sqrt{a})^2}-\sqrt{a}(4)$
Xét hàm số $f(t)=\sqrt{1+t^2}-t,\, t>0$
Ta có: $f'(t)=\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}-1=\dfrac{t-\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+t^2}}<0,\, t>0.$
Vậy hàm số $f(t)$ luôn nghịch biến với mọi $t>0$. Do đó từ phương trình (4) ta có: $f(a-1)=f(\sqrt{a})$

$$\sqrt{a}=a-1 \Leftrightarrow \begin{cases} a-1\geq 0 \\ a^2-3a+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\geq 1 \\ a=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Từ đó ta có: $\dfrac{1}{x}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}.$

Do đó phương trình đã cho có hai nghiệm: $x=0;\, x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}.$ ■

-Bình luận. Qua bài toán này, ta thấy cả hai cách giải đều có nét hay riêng. Nhưng rõ ràng ứng với mỗi cách giải ta đã thấy được thêm tầm quan trọng khi đoán hướng giải cho bài toán vô tỷ rất quan trọng. Theo nhận xét chủ quan của chúng tôi thì ở cách 1 lời giải bài toán cho hướng tự nhiên hơn, còn lời giải 2 mang đậm tính chất tư duy và kỉ thuật. trong cách hai được xem là một lời giải phối hợp nhiều phương pháp điển hình để giải một bài toán vô tỷ mà độc giải sẽ được thấy hết nét đẹp của nó trong chương tiếp theo mà chúng tôi khai thác các bài toán được giải như cách 2.

Ví dụ 10. Giải phương trình $\sqrt{48-8x-x^2}=\dfrac{28-x}{x+3}.$

✍ Lời giải.

-Phân tích hướng giải. Đối với phương trình này hình thức đơn giản, nhưng thông qua bài toán này chúng tôi muốn gửi đến độc giả một cách giải phương trình bậc bốn có nghiệm không phải là nghiệm nguyên.
Thật vậy, với hình thức của phương trình để thoát căn ta dùng phép nâng lũy thừa để thu được một phương trình bậc bốn. Cụ thể ta có phương trình được biến đổi thành:
$(48-8x-x^2)(x+3)^2=(28-x)^2 \Leftrightarrow x^4+14x^3+10x^2-272x+352=0(*)$
Phương trình (*) là một phương trình có nghiệm mà nghiệm không phải là nghiệm nguyên. Điều này gây khó khăn khá nhiều cho học sinh. Để giải phương trình này, ta sẽ đi tìm hểu một phương pháp giải phương trình bậc bốn theo phương pháp Ferrari, phương pháp này mục đích chính quy về phương trình bậc ba và đưa phương trình bậc bốn về tích hai phương trình bậc hai. Xét bài toán tổng quát: $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$
Ta biến đổi phương trình trở thành: $x^4+ax^3=-bx^2-cx-d$.
Ta thêm ẩn m vào phương trình mới biến đổi sao cho vế trái là một bình phương như sau: $\left(x+\dfrac{a}{2}x+\dfrac{m}{2}\right)^2=\left(\dfrac{a^2}{4}-b+m\right)x^2+\left(\dfrac{am}{2}-c\right)x+\left(\dfrac{m^2}{4}-d\right)(i)$
Ta sẽ tìm m sao cho vế phải của (i) cũng là một bình phương. Điều đó có nghĩa rằng phương trình bậc hai có nghiệm kép nên:
$\Delta=m^3-bm^2+(ac-4d)m+(4bd-a^2d-c^2)=0$
Giải phương trình này ta sẽ tìm được m_0 và lúc đó phương trình (i) sẽ được biến đổi thành phương trình:
$\left(x^2+\dfrac{a}{2}x+\dfrac{m_0}{2}\right)^2=(ux+v)^2$
Áp dụng kết quả này vào phương trình (*) ta có biến đổi sau:
$x^4+14x^3=-10x^2+272x-352$
$\Leftrightarrow \left(x^2+7x+\dfrac{m}{2}\right)^2=(39+m)x^2+(7m+272)x+\left(\dfrac{m^2}{4}-352\right)$

Ta cần tìm m để: $\Delta = 0 \Leftrightarrow (7m+272)^2 - 4(39+m)\left(\frac{m^2}{4} - 352\right) = 0 \Leftrightarrow m = -38$.

Khi đó, ta sẽ có phương trình:
$(x^2+7x-19)^2 = x^2+6x+9 \Leftrightarrow (x^2+7x-19)^2 = (x+3)^2$
Tới đây, ta có hướng giải cụ thể:

-Cách 1: Ta có: $\sqrt{48-8x-x^2} = \frac{28-x}{x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{28-x}{x+3} \geq 0 \\ (x+3)^2(48-8x-x^2) = (28-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x \leq 28 \\ x^4+14x^3+10x^2 - \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x \leq 28 \\ (x^2+7x-19)^2 = (x+3)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x \leq 28 \\ (x^2+8x-16)(x^2+6x-22) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x \leq 28 \\ \left[\begin{array}{l} x = -4+4\sqrt{2} \\ x = -4-4\sqrt{2} \\ x = -3+\sqrt{31} \\ x = -3-\sqrt{31} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4+4\sqrt{2} \\ x = -3+\sqrt{31} \end{array}\right.$$

Tuy nhiên, nếu chúng ta nghĩ một cách tự nhiên theo lối khác rằng phương trình chứa duy nhất một căn thức mà khi dùng nâng lũy thừa sẽ gặp chướng ngại phương trình bậc bốn thì ta có thể thoát căn thức bằng cách sử dụng đặt ẩn phụ. Cụ thể ta đặt: $t = \sqrt{48-8x-x^2}$ khi đó $t^2 = 48-8x-x^2$. Nhưng lúc này, trong phương trình không có chứa x^2 nên ta cần phải thêm bớt, nếu thêm bớt như thế thì rõ ràng ẩn x ban đầu không khử triệt để được bằng ẩn phụ t nên khi đó ta sẽ có một phương trình hai ẩn. Như thế chúng ta sẽ cảm thấy khó khăn, tuy vậy lúc này cả ẩn x và t đều có bậc cao nhất là bậc 2 nên hoàn toàn có thể tham số phương trình để đưa về tích thông qua biệt thức Δ là một số chính phương. Và như thế ta đẩy bài toán về phương pháp giải gọi là đặt ẩn phụ không hoàn toàn.
Muốn đạt được điều đó ta cần phân tích:
$28 - x = a(48-8x-x^2) + ax^2 + (8a-1)x - 48a + 28.$
Khi đó phương trình đã cho được biến đổi thành:
$at^2 - (x+3)t + ax^2 + (8a-1)x - 48a + 28 = 0(*)$
Phương trình (*) có biệt thức : $\Delta = (1-4a^2)x^2 + 2(3-16a+2a)x + 9 - 112a + 192a^2$
Ta cần tìm a sao cho Δ là một bình phương tức là ta cần tìm a sao cho phương trình bậc hai theo x có biệt thức bằng 0. Điều đó có nghĩa là ta có:
$\Delta_x = (3-16a^2-2a)^2 - (1-4a^2)(9-112a+192a^2) = 0.$
Giải phương trình này ta tìm được $a = \frac{1}{2}$. Tới đây, ta đưa ra lời giải khác cho bài toán như sau:

-Cách 2: Điều kiện: $\begin{cases} 48-8x-x^2 \geq 0 \\ x+3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12 \leq x \leq 4 \\ x \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -12 \leq x \leq 4 \\ 3 < x \leq 4 \end{array}\right.$

Phương trình được biến đổi thành phương trình:
$28 - x - (x+3)\sqrt{48-8x-x^2} = 0$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(48-8x-x^2) - (x+3)\sqrt{48-8x-x^2} + \frac{1}{2}x^2 + 3x + 4 = 0(1)$
Đặt $t = \sqrt{48-8x-x^2}$, $t \geq 0$. Khi đó $t^2 = 48-8x-x^2$. Lúc đó phương trình (1) trở thành: $t^2 - 2(x+3)t + x^2 + 6x + 8 = 0(2)$

Xem phương trình (2) là phương trình bậc hai theo t thì ta có biệt thức $\Delta' = (x+3)^2 - (x^2+6x+8) = 1$
Suy ra phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt:

$$\left[\begin{array}{l} t = x+4 \\ t = x+2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{48-8x-x^2} = x+4 \\ \sqrt{48-8x-x^2} = x+2 \end{array}\right.$$

Với: $\sqrt{48-8x-x^2} = x+4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x^2+8x-16=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -4+4\sqrt{2}.$

Với : $\sqrt{48-8x-x^2} = x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2+6x-22=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3+\sqrt{31}$

Đối chiếu điều kiện ta thu được hai nghiệm của phương trình: $x = -3+\sqrt{31}$, $x = -4+4\sqrt{2}$. ■

-Bình luận. Bài toán chúng ta đang xét về hình thức thì thực sự không cồng kềnh nhưng chất chứa bên trong là những bài hoặc tư duy đánh giá cần có là những kỉ năng hết sức chú ý. Ở cách 1 tuy chỉ áp dụng phương pháp rất đơn giản đó là nâng lũy thừa nhưng lại có sự khó khăn khi giả phương trình bậc bốn không có nghiệm nguyên và chúng ta nên nhớ rằng, đối với bài thi đại học thì thường khi gặp phương trình bậc bốn chúng ta chỉ có hai khả năng là phương trình đó vô nghiệm hoặc có nghiệm phải tường minh (nghiệm nguyên, nghiệm vô tỷ) chứ không bao giờ gặp nghiệm dưới dạng tổng quát hay lượng giác. Về cách khắc phục thì bài toán tổng quát ở cách 1 là chìa khóa vô cũng quan trọng để đạt được hiệu quả. Ở cách 2, tuy cũng sử dụng phương pháp ẩn phụ đơn giản nhưng lại khó khăn trong việc không khai thác hết được ẩn ban đầu theo ẩn phụ thì lúc đó ta sẽ nghĩ ngay đến sự đồng bậc giữa hai biến hoặc xem chừng như đó là một phương tình thường gặp (bậc 2, bậc 3, bậc 4) ở định dạng có thể phân tích nhân tử. nếu bậc hai ta dùng biệt thức có số chính phương, bậc 3 (bậc 4) ta tách nhân tử dựa trên đoán nghiệm đặc biệt. Cái khó ở cách hai là việc chọn hệ số để tách cho được đại lượng đặt ẩn phụ và kéo theo là một phương trình bậc hai có biệt thức là số chính phương một cách logic không sử dụng mò mẫm, cụ thể như trong bài toán chúng tôi đã nêu ra hướng phân tích và việc vì sao chúng tôi chọn được hệ số $a = \frac{1}{2}$. Trên thực tế ở cách 2 chúng ta có tìm được 4 giá trị a trong đó có $a = 0$ (chính là trường hợp giải theo cách 1) và còn hai giá trị a không đẹp nên không được ưu tiên sử dụng. Vậy qua bài toán này, một lần nữa giúp các độc giả khắc sâu thêm đường lối các phương pháp trong chương I và hình thức áp dụng nó được thì ta cần tư duy và sắp xếp thế nào cho chính xác.

Ví dụ 11. Giải phương trình $\sqrt{2x+3}.\sqrt[3]{x+5} = x^2+x-6$

✍ **Lời giải.**

-Phân tích hướng giải. Bài toán đưa ra có hình thức khá lạ và đặc biệt, để giải quyết với phương trình này ta sẽ đặt ra một chiều hướng điều kiện không đơn thuần có nghĩa nữa mà sẽ là một điều kiện mạnh hơn đó chính là điều kiện để phương trình đã cho có nghiệm luôn. Với hình thức đặc biệt của phương trình này, trước khi giải quyết ta sẽ cố gắng đi tìm nghiệm của phương trình trước để từ đó có thể tư duy xem liệu hướng giải quyết nào là thuận lợi. Không quá khó, bằng máy tính hoặc trực giác cho ta có nghiệm $x = 3$ là nghiệm duy nhất của phương trình. Từ đó ta có thể đưa ra hai hướng tư duy là dùng phương pháp liên hợp để tách nhân tử $x-3$ hoặc dùng hàm số chỉ rõ sự đơn điệu để kết luận nghiệm của phương trình. Với hướng tách nhân tử $x-3$ ta dùng phương pháp liên hợp ta đưa ra các đánh giá sau:

-Với đại lượng $\sqrt{2x+3}$ để có nhân tử $x-3$ ta cần thêm đại lượng như sau:

$\sqrt{2x+3} - a = 0$ cho $x = 3 \Rightarrow a = 3$

-Với đại lượng $\sqrt[3]{x+5}$ để có nhân tử $x-3$ ta cần thêm đại lượng như sau:

$\sqrt[3]{x+5} - b = 0$ cho $x = 3 \Rightarrow b = 2$

-Tuy nhiên do ta có: $\sqrt{2x+3}.\sqrt[3]{x+5}$ nên khi thêm bớt hai đại lượng $a=3$; $b=2$ ta cần phải biến đổi như sau: $\left(\sqrt{2x+5}-3\right).\sqrt[3]{x+5}+3\left(\sqrt[3]{x+5}-2\right)$.
-Khi đó, phương trình đã cho được biến đổi thành:
$\left(\sqrt{2x+5}-3\right).\sqrt[3]{x+5}+3\left(\sqrt[3]{x+5}-2\right)=x^2+x-12$
Từ đó, ta có hướng giải như sau:

-Cách 1: Điều kiện để phương trình có nghiệm là: $\begin{cases} 2x+3\geq 0 \\ x^2+x-6\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\geq 2.$

Với điều kiện đó ta luôn có: $\sqrt{2x+5}+3>0$; $\sqrt[3]{(x+5)^2}+2\sqrt[3]{x+5}+4>0$
Phương trình đã cho được biến đổi thành phương trình:
$\left(\sqrt{2x+5}-3\right).\sqrt[3]{x+5}+3\left(\sqrt[3]{x+5}\right)=x^2+x-12$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x+5}.\frac{2x+3-9}{\sqrt{2x+3}+3}+3.\frac{(x+5)-8}{\sqrt[3]{(x+5)^2}+2\sqrt[3]{x+5}+4}=(x+3)(x+4)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x+5}.\frac{2(x+3)}{\sqrt{2x+3}+3}+3.\frac{x-3}{\sqrt[3]{(x+5)^2}+2\sqrt[3]{x+5}+4}=(x+3)(x+4)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ \dfrac{2\sqrt[3]{x+5}}{\sqrt{2x+3}+3}+\dfrac{3}{\sqrt[3]{(x+5)^2}+2\sqrt[3]{x+5}+4}=x+4(*) \end{array}\right.$$

Với phương trình (*) ta chú ý rằng với $x\geq 2$, ta luôn có:
$2x+3=(x+5)+(x-2)\geq x+5>1$

$$\Rightarrow \sqrt{2x+3}\geq\sqrt{x+5}>\sqrt[3]{x+5}\Rightarrow \frac{2\sqrt[3]{x+5}}{\sqrt{2x+3}+2}<2$$

$$\frac{3}{\sqrt[3]{(x+5)^2}+2\sqrt[3]{x+5}+4}<\frac{3}{4}<1$$

Từ đó ta có: $\dfrac{2\sqrt[3]{x+5}}{\sqrt{2x+3}+2}+\dfrac{3}{\sqrt[3]{(x+5)^2}+2\sqrt[3]{x+5}+4}<3<x+4$. Do đó (*) vô nghiệm. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.
Tuy nhiên, nếu ta tinh tế hơn một chút trong phép biến đổi về đại lượng cần liên hợp ta có thể đưa bài toán về đánh giá đơn giản hơn như phép biến đổi sau:

-Cách 2: Điều kiện để phương trình có nghiệm là: $\begin{cases} 2x+3\geq 0 \\ x^2+x-6\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\geq 2.$

Phương trình đã cho được biến đổi thành phương trình:
$2(x-3)+\left(x-\sqrt{2x+3}\right)\sqrt[3]{x+5}+x\left(x-1-\sqrt[3]{x+5}\right)=0(1)$
Với điều kiện $x\geq 2$ ta luôn có: $x+\sqrt{2x+3}>0$; $x-1+\sqrt[3]{x+5}>0$

Do đó (1) $\Leftrightarrow (x-3)\left[2+\dfrac{(x+1)\sqrt[3]{x+5}}{x+\sqrt{2x+3}}+\dfrac{x(x^2+2)}{(x-1)^2+(x-1)\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{(x+5)^2}}\right]=0$

Ta có: $\left[2+\dfrac{(x+1)\sqrt[3]{x+5}}{x+\sqrt{2x+3}}+\dfrac{x(x^2+2)}{(x-1)^2+(x-1)\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{(x+5)^2}}\right]>0,\ x\geq 2$

Nên: $x=3$ là nghiệm duy nhất thỏa phương trình.
Từ hai cách biến đổi trên cộng với việc phương trình đã cho có nghiệm duy nhất nên ta có thể dùng hàm số để giải quyết bài toán này. Từ đó ta có cách giải sau:

-Cách 3: Điều kiện để phương trình có nghiệm là : $\begin{cases} 2x+3 \geq 0 \\ x^2+x-6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2.$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{2x+3}.\sqrt[3]{x+5} - x^2 - x + 6, \forall x \geq 2.$

Ta có: $f'(x) = \dfrac{3x+8}{3\sqrt{2x+3}.\sqrt[3]{x+5}} - 2x - 1.$

Lại có: $\forall x \geq 2.$

Suy ra: $f'(x) \leq f'(2) = 0$. Vậy hàm số $f(x)$ liên tục và luôn nghịch biến với $x \geq 2$.

Do đó phương trình $f(x) = 0$ có tối đa một nghiệm.

Mà: $f(3) = 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 3$. ■

-Bình luận. Bài toán trên là một bài toán khá hay, về đường lối đi thì chúng ta đã thấy như phân tích. Tuy nhiên, qua bài toán này, chúng ta thấy được tính chất quan trọng của bài toán dùng phương pháp liên hợp nó cũng có cái hay riêng, nếu biến đổi khéo ta sẽ được một lời giải gọn nhẹ hơn nếu ta biến đổi không khéo lắm thì chúng ta có chút vấn đề ở phần đánh giá. Ngoài ra khi gặp phương trình có nghiệm duy nhất và hình thức phương trình có thể gợi tả một hàm số mà khi xét tính đơn điệu của nó có sự khả thi thì việc ứng dụng nó vào đường lối giải cũng là một lối đi đẹp. Tuy vậy, nếu chúng ta dùng hàm số để giải quyết một bài toán ta cần để ý tính liên tục của hàm số nếu không chúng ta sẽ phạm sai lầm. Cụ thể ta có thể xét ví dụ sau để hiểu rõ hơn.

Ví dụ 12. Giải phương trình $(2x-1)\left(\sqrt{x+2} + \sqrt[3]{3x+2}\right) = 4(x+1)$

✍ **Lời giải.**

-Phân tích hướng giải. Bài toán này, về hình thức có thể nghĩ ngay đến việc đặt ẩn phụ để giải quyết hoặc hàm số để giải quyết. Thật vậy, ta có thể biến đổi phương trình về phương trình sau với điều kiện của bài toán là $x \geq -2$: $\sqrt{x+2} + \sqrt[3]{3x+2} = \dfrac{4(x+1)}{2x-1}$

Tới đây, rất nhiều học sinh sẽ kết luận một số điều tưởng chừng như có lý sau:

Ta có vế trái phương trình là một hàm số đồng biến, vế phải của phương trình là một hàm số nghịch biến.

Do đó phương trình đã cho nếu có một nghiệm thì đó là nghiệm duy nhất. Nhẩm thấy $x = -1$ thỏa phương trình.

Vậy $x = -1$ là nghiệm duy nhất của phương trình. trên đã có một sai lầm nghiêm trọng vì ta không thể kết luận được vế phải của phương trình là một hàm số nghịch biến với $x \geq -2$ vì hàm số bị gián đoạn tại $x = \dfrac{1}{2}$ vẫn nằm trong điều kiện cho phép của bài toán.

Điều đó dẫn đến lời giải trên sai hoàn toàn.

Để giải tốt bài toán này, ta cần phân định rõ giới hạn cho phép để khi xét hàm số phải bảo đảm tính liên tục thì khi đó ta mới có thể kết luận được nghiệm của phương trình đã cho. Cụ thể ta đi vào lời giải bằng hàm số cho phương trình trên như sau:

Điều kiện: $x \geq -2$.

Do $x = \dfrac{1}{2}$ không thỏa phương trình đã cho nên với $x \neq \dfrac{1}{2}$ ta biến đổi phương trình về phương trình:

$\sqrt{x+2} + \sqrt[3]{3x+2} = \dfrac{4(x+1)}{2x-1} (1)$

Đặt: $f(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt[3]{3x+2}$; $g(x) = \dfrac{4(x+1)}{2x-1}$

Ta có: $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{(3x+2)^2}}$; $g(x) = \dfrac{-12}{(2x-1)^2}$

Mặt khác $x = -2$ không thỏa phương trình nên ta xét hai trường hợp:

-Với $-2 < x < \dfrac{1}{2}$ thì ta có: $f'(x) > 0, \forall x \in \left(-2; \dfrac{1}{2}\right)$, $g'(x) < 0, \forall x \in \left(-2; \dfrac{1}{2}\right)$

Do đó trên khoảng $\left(-2;\dfrac{1}{2}\right)$ ta có $f(x)$ là hàm số liên tục và đồng biến, $g(x)$ là hàm số liên tục và nghịch biến.
Từ đó ta có: $f(x)=g(x)$ nếu có nghiệm thì có tối đa một nghiệm.
Nhận thấy: $f(-1)=g(-1)$ nên từ (1) ta có $x=1$ là nghiệm của phương trình.
-Với $x>\dfrac{1}{2}$ thì ta có: $f'(x)>0,\ \forall x\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$, $g'(x)<0,\ \forall x\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$
Do đó trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ ta có $f(x)$ là hàm số liên tục và đồng biến, $g(x)$ là hàm số liên tục và nghịch biến.
Từ đó ta có: $f(x)=g(x)$ nếu có nghiệm thì có tối đa một nghiệm.
Nhận thấy: $f(2)=g(2)$ nên từ (1) ta có $x=2$ là nghiệm của phương trình.
Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=-1;\ x=2$. ■

Ví dụ 13. Giải phương trình $4\sqrt{2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}=27(x-1)^2\sqrt{x-1}$.

Lời giải.
-Phân tích hướng giải. Bài toán này chứa rất nhiều căn thức và mỗi căn thức lại chẳng có liên quan gì đến nhau, nên để thoát căn thức ta chỉ còn một phương án duy nhất là nâng lũy thừa với điều kiện cho phép của bài toán.
Cụ thể sau khi nâng lũy thừa ta đưa phương trình về phương trình:
$32\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=729(x-1)^5$
Tới đây ta nhận xét rằng: $\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=1$ và $x-\sqrt{x^2-1}\neq 0,\ \forall x$ nên ta có tiếp một biến đổi nữa: $32=729(x-1)^5\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$ $(*)$
Phương trình (*) gợi cho lối thoát cần thiết nhất lúc này là hàm số, để sử dụng được điều đó ta cần suy nghiệm phương trình trước xem ta cần phải làm gì với hàm số. Không khó bằng máy tính ta có nghiệm duy nhất của phương trình là $x=\dfrac{5}{3}$. Vậy điều này sẽ gợi đường cho chúng ta khẳng định hàm số cần xét sẽ liên tục và hoặc đơn điệu tăng hoặc đơn điệu giảm. Từ đây ta đưa ra cách giải cho bài toán như sau:
Điều kiện: $x\geq 1$.
Do $x=1$ không thỏa phương trình đã cho nên ta chỉ cần xét điều kiện $x>1$.
Bình phương hai vế phương trình đã cho ta được một phương trình tương đương như sau: $32\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=729(x-1)^5\Leftrightarrow 32=729(x-1)^5\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$ $(*)$ do $x-\sqrt{x^2-1}\neq 0,\ x>1\Leftrightarrow 729(x-1)^5\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)-32=0$
Xét hàm số: $f(x)=729(x-1)^5\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)-32,\ \forall x>1$.
Ta có: $f'(x)=3645(x-1)^4\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)+729(x-1)^5\left(1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)=729(x-1)^4\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\left(5\sqrt{x^2\right.$
Nhận xét rằng $\forall x>1$ ta có: $x-\sqrt{x^2-1}>0$.
Lại có: $5\sqrt{x^2-1}>x-1\ (\forall x>1)\Leftrightarrow 25\left(x^2-1\right)>x^2-2x+1\ (\forall x>1)$
$\Leftrightarrow 24x^2+2x-24>0\ (\forall x>1)$ (luôn đúng)
Suy ra $f'(x)>0$, vậy hàm số $f(x)$ liên tục và đồng biến với mọi $x>1$.
Do đó phương trình $f(x)=0$ có tối đa một nghiệm. Mặt khác $f\left(\dfrac{5}{3}\right)=0$.
Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{5}{3}$ là nghiệm duy nhất của phương trình. ■
-Bình luận. Bài toán trên là một bài toán khá hay, vì đường lối giải nó có điều mà khi gặp phương trình vô tỷ ta vẫn thường tính đến. Cái quan trọng chính là thông qua những đánh giá cơ bản chúng ta sẽ thu được những điều tưởng chừng như rất khó thành đơn giản bởi những phép toán cơ bản.

Ví dụ 14. Giải phương trình $\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}+\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}}=2(x-1)^4\left(2x^2-4x+1\right)$.

✍ **Lời giải.**
-Phân tích hướng giải. Bài toán chúng ta đang xét về hình thức cũng chứa nhiều căn như ví dụ 11. Tuy nhiên ở ví dụ 11 các căn thức lại không gắn kết với nhau, ở bài toán này nếu chúng ta tinh ý sẽ thấy các đại lượng trong căn và ngoài căn có liên quan với nhau. Thật vậy, ta hãy để ý đến các "hằng đẳng thức hụt" và "hằng đẳng thứ dư" sau đây:
-Ta có: $2x - x^2 = 1 - (x^2 - 2x + 1) = 1 - (x-1)^2$
-Ta có: $2x^2 - 4x + 1 = 2\left(x^2 - 2x + 1\right) - 1 = 2\left(x-1\right)^2 - 1$
Tới đây, ta đã hình dung được để đơn giảm hóa bớt hình thức bài toán ta sẽ ẩn phụ hóa $u = (x-1)^2$
Lúc đó phương trình sẽ được viết lại: $\sqrt{1+\sqrt{1-u}} + \sqrt{1-\sqrt{1-u}} = 2u^2\left(2u-1\right).$
Với hình thức của phương trình vừa biến đổi cộng với nhận xét $\left(1+\sqrt{1-u}\right)\left(1-\sqrt{1-u}\right) = u$ giúp chúng ta có thể mạnh dạng thoát căn thức bằng phương pháp nâng lũy thừa.
Bây giờ, ta cụ thể hóa lời giải bài toán như sau:
Điều kiện: $2x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$.
Phương trình đã cho được biến đổi thành phương trình:
$\sqrt{1+\sqrt{1-(x-1)^2}} + \sqrt{1-\sqrt{1-(x-1)^2}} = 2\left(x-1\right)^4\left[2\left(x-1\right)^2 - 1\right]$ (1)
Đặt $u = (x-1)^2$, với $0 \leq x \leq 2 \Rightarrow -1 \leq x - 1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq (x-1)^2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq u \leq 1$
Lúc đó phương trình (1) trở thành phương trình:

$$\sqrt{1+\sqrt{1-u}}+\sqrt{1-\sqrt{1-u}} = 2u^2\left(2u-1\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2u - 1 \geq 0 \\ 1 + \sqrt{u} = 2u^4\left(2u-1\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u \geq \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{u^4} + \dfrac{1}{u^3\sqrt{u}} = 2\left(2u-1\right)^2 \end{cases}$$

Nhận xét rằng với $\dfrac{1}{2} \leq u \leq 1 \Rightarrow 2\left(2u-1\right)^2 \leq 2$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $u = 1$.
Lại có với $\dfrac{1}{2} \leq u \leq 1 \Rightarrow \dfrac{1}{u^4} + \dfrac{1}{u^3\sqrt{u}} \geq 2$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $u = 1$.

Từ đó ta có: $\dfrac{1}{u^4} + \dfrac{1}{u^3\sqrt{u}} = 2\left(2u-1\right)^2 \Leftrightarrow u = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của phương trình là $x = 0$; $x = 2$. ■
-Bình luận. Đây là một bài toán hay, lời giải trên cho bài toán này là một lời giải tự nhiên không quá kỉ thuật chỉ cần sự quan sát và ghi nhớ các hằng đẳng thức cộng với việc nhận biết đánh giá cơ bản là chúng ta sẽ có một đường lối giải bài toán rất gọn gàng.

Ví dụ 15. Giải phương trình $(3x+1)\sqrt{x^2+3} = 3x^2 + 2x + 3$

✍ **Lời giải.**
-Phân tích hướng giải. Trước tiên các bạn hãy thử tư duy phân tích bài toán này theo hướng giải đặt ẩn phụ không hoàn toàn để giải phương trình này xem sao nhé? Bây giờ chúng ta sẽ phân tích bài giải này theo hướng phương pháp nhân liên hợp. Thông qua các ví dụ vừa qua, chắc các bạn cũng đã tích lũy cho mình được một số kỉ năng liên hợp nhất định. Tuy nhiên, thông qua bài toán này chúng tôi đưa đến tiếp cho các bạn một kỷ năng nhân lượng liên hợp nữa. Cụ thể không quá khó để nhận biết phương trình này có hai nghiệm $x = 1$, tức là ta cần có nhân tử $(x-1)$.
Điều đó dẫn đến ta cần thêm hệ số hoặc biểu thức dạng $ax + b$ để đạt được như mong muốn. Tuy vậy, hình thức bài toán chưa cho phép chúng ta đánh liều để thêm bớt.
Nhận xét thấy $x = -\dfrac{1}{3}$ không thỏa phương trình nên với $x \neq -\dfrac{1}{3}$ ta đưa phương trình đã cho về phương trình: $\sqrt{x^2+3} = \dfrac{3x^2+2x+3}{3x+1}$(1)
Bây giờ nếu ta thêm bớt ngay cho đại lượng căn để xuất hiện nhân tử $(x-1)$ thì khả năng bên vế phải (1) cũng xuất hiện nhân tử $(x-1)$ thì điều đó cũng xảy ra nhưng có khi ta sẽ gặp trở ngại sau khi đưa

được nhân tử $(x-1)$. Vì vậy, để thuận tiện và chắc chắn hơn ta sẽ thêm bớt cả hai vế để cân bằng cho bài toán. Cụ thể, ta thêm bớt như sau:

$\sqrt{x^2+3}-(ax+b)=\dfrac{3x^2+2x+3}{3x+1}-(ax+b)$

$\Leftrightarrow \dfrac{(1-a^2)\,x^2-2abx+3-b^2}{\sqrt{x^2+3}+ax+b}=\dfrac{(3-3a)\,x^2+(2-a-3b)\,x+3-b}{3x+1}$

Tới đây, ta cần xác định a, b sao cho:

$(1-a^2)\,x^2-2abx+3-b^2=(3-3a)\,x^2+(2-a-3b)\,x+3-b$

Đồng nhất hệ số hai vế của phương trình dẫn đến ta giải hệ:

$$\begin{cases} 1-a^2=3-3a \\ 2ab=-2+a+3b \\ 3-b^2=3-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-3a+2=0 \\ 2ab=-2+a+3b \\ b^2-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=0 \end{cases} \vee \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$$

Vậy ta có hai cách thêm bớt. Cụ thể:

-Cách 1: Do $3x^2+2x+3>0,\ \forall x$ nên điều kiện để phương trình có nghiệm là:

$3x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -\dfrac{1}{3}$.

Nhận xét $x=-\dfrac{1}{3}$ không thỏa phương trình. Do đó $x>-\dfrac{1}{3}$ ta biến đổi phương trình đã cho trở thành:

$\sqrt{x^2+3}-2x=\dfrac{3x^2+2x+3}{3x+1}-2x \Leftrightarrow \dfrac{3\,(1-x^2)}{\sqrt{x^2+3}+2x}=\dfrac{3\,(1-x^2)}{3x+1}$

$$\Leftrightarrow (1-x^2)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+3}+2x}-\frac{1}{3x+1}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-x^2=0 \\ \sqrt{x^2+3}=x+1 \end{array}\right.$$

Với: $1-x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Với: $\sqrt{x^2+3}=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1\geq 0 \\ x^2+3=(x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$.

Đối chiếu với điều kiện ta thu được $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

-Cách 2: Do $3x^2+2x+3>0$, $\forall x$ nên điều kiện để phương trình có nghiệm là:

$3x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -\dfrac{1}{3}$.

Nhận xét $x=-\dfrac{1}{3}$ không thỏa phương trình. Do đó $x>-\dfrac{1}{3}$ ta biến đổi phương trình đã cho trở thành:

$\sqrt{x^2+3}-(x+1)=\dfrac{3x^2+2x+3}{3x+1}-(x+1) \Leftrightarrow \dfrac{2\,(1-x)}{\sqrt{x^2+3}+x+1}=\dfrac{2\,(1-x)}{3x+1}$

$$\Leftrightarrow (1-x)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+3}+x+1}-\frac{1}{3x+1}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \sqrt{x^2+3}=2x \end{array}\right.$$

Với $\sqrt{x^2+3}=2x \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ 3\,(1-x^2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$

Đối chiếu điều kiện ta có $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình. ■

-Bình luận. Thông qua bài toán này, một lần nữa chúng ta lại biết thêm một kỉ năng nữa trong việc tạo nhân tử chung nhờ vào phương pháp nhân lượng liên hợp. Và thông thường các kỷ năng này nó cần có sự trau dồi và tạo một phản xạ nhất định khi chúng ta cần áp dụng tới. Ví dụ hai cách giải trên chúng ta thấy sự linh hoạt trong việc thêm bớt và hướng đi của nó trong bài toán. Chúng ta có thể sử dụng phương pháp này cho một bài toán tổng quát sau: $ax^2+bx+c=(mx+n)\sqrt{a_1x^2+b_1x+c_1}$. Vậy vấn đề đặt ra là nếu lỡ đứng trước một phương trình có dạng: $ax^3+bx^2+cx+d=(mx+n)\sqrt{a_1x^3+b_1x^2+c_1x+d_1}$ thì ta còn có thể tư duy giải bài toán này theo hướng đó không? Vấn đề sẽ được giải quyết thông qua ví dụ tiếp theo sau đây.

Ví dụ 16. Giải phương trình $x^3+6x^2-2x+3=(5x-1)\sqrt{x^3+3}$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích hướng giải. Tương tự như ví dụ vừa phân tích ở trên, bây giờ chúng ta sẽ đi tìm các hệ số như đã phân tích ở ví dụ trên như sau:

$$\frac{x^3+6x^2-2x+3}{5x-1}-(ax+b)=\sqrt{x^3+3}-(ax+b)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3+(6-5a)x^2+(a-5b-2)x+3+b}{5x-1}=\frac{x^3-a^2x^2-2abx+3-b^2}{\sqrt{x^3+3}+ax+b}$$

Ta đi xác định a, b sao cho:

$x^3+(6-5a)x^2+(a-5b-2)x+3+b=x^3-a^2x^2-2abx+3-b^2$

Đồng nhất hệ số hai vế phương trình đã cho ta hệ phương trình sau:

$$\begin{cases}6-5a=-a^2\\ a-5b-2=-2ab\\ 3+b=3-b^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\vee a=3\\ a-5b-2=2ab\\ b=0\vee b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=0\end{cases}$$

Từ đây, ta đưa ra hướng giải quyết như sau: Điều kiện: $x\ge-\sqrt[3]{3}$.

Nhận xét $x=\dfrac{1}{5}$ không thỏa phương trình đã cho. Do đó $x\neq\dfrac{1}{5}$ ta biến đổi phương trình về phương trình:

$$\frac{x^3+6x^2-2x+3}{5x-1}=\sqrt{x^3+3}\Leftrightarrow\frac{x^3+6x^2-2x+3}{5x-1}-2x=\sqrt{x^3+3}-2x(1)$$

Với điều kiện $x\ge-\sqrt[3]{3}$, ta chưa biết chắc $\sqrt{x^3+3}+2x\neq0$ nên để nhân lượng liên hợp ta cần xét:

$$\sqrt{x^3+3}+2x=0\Leftrightarrow\begin{cases}-2x\ge0\\ x^3-4x^2+3=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{3-\sqrt{21}}{2}\text{ thỏa }x\ge-\sqrt[3]{3}$$

Với $x=\dfrac{3-\sqrt{21}}{2}$ ta có phương trình đã cho nghiệm đúng. Do đó $x=\dfrac{3-\sqrt{21}}{2}$ là một nghiệm của phương trình.

Với $x\neq\dfrac{3-\sqrt{21}}{2}\Rightarrow\sqrt{x^3+3}+2x\neq0$ nên (1) tương đương với phương trình:

$$\frac{x^3+6x^2-2x+3-2x(5x-1)}{5x-1}=\frac{x^3+3-4x^2}{\sqrt{x^3+3}+2x}\Leftrightarrow\frac{x^3-4x^2+3}{5x-1}=\frac{x^3-4x^2+3}{\sqrt{x^3+3}+2x}$$

$$\Leftrightarrow(x^3-4x^2+3)\left(\frac{1}{5x-1}-\frac{1}{\sqrt{x^3+3}+2x}\right)=0\left[\begin{array}{l}x^3-4x^2+3=0\\ \sqrt{x^3+3}=3x-1\end{array}\right.$$

$$\text{Với: }x^3-4x^2+3=0\Leftrightarrow(x-1)(x^2-3x-3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{21}}{2}\end{array}\right.$$

Với: $\sqrt{x^3+2} = 3x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{3} \\ x^3 - 9x^2 + 6x + 2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{3} \\ (x-1)(x^2 - 8x - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 + 3\sqrt{2} \end{array} \right.$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của phương trình:
$x = 1;\ x = 4 + 3\sqrt{2};\ x = \dfrac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$.

Ví dụ 17. Giải phương trình $45x^3 - 17x^2 - 37x + 25 = 4\sqrt{(x+1)(5x-3)^3}$.

Lời giải.

-Phân tích hướng giải. Bài toán này, ta có thể sử dụng cách trên để tìm hệ số và nhân lượng liên hợp. Tuy nhiên, ở đây chúng tôi xin đưa ra một phân tích tư duy tự nhiên để giải bài toán trên như sau:
Nhìn vào hình thức của phương trình, chúng ta nghĩ ngay đến hai biểu thức đặc biệt $x+1$; $5x-3$. Điều đó làm ta nghĩ đến việc kiểm tra phương trình với hai giá trị $x = -1$; $x = \dfrac{3}{5}$.
Không khó để ta thấy $x = -1$ thỏa phương trình đã cho. Dẫn đến phương trình bậc ba vế phải của phương trình cũng có một nghiệm $x = -1$.
Bây giờ, ta chú ý rằng: $\sqrt{(x+1)(5x-3)^3} = (5x-3)\sqrt{5x^2+2x-3}$. Với sự chú ý này, ta sẽ có hai hướng để vạch ra hướng giải quyết.
-Hướng 1: Ta lấy phương trình bậc ba chia cho phương trình bậc hai trong căn với điều kiện là hệ số của x^3 chia cho hệ số x^2 tốt nhất phải là một hệ số nguyên. Cụ thể: $(45x^3 - 17x^2 - 37x + 25) : (5x^2 + 2x - 3)$ được thương là $9x^2 - 7$ và số dư là $4 - 10x$.
Khi đó phương trình đã cho sẽ trở thành:
$(9x^2 - 7)(5x^2 + 2x - 3) + 4 - 10x = 4(5x-3)\sqrt{5x^2+2x-3}(1)$
Với (1) ta nghĩ ngay đến việc ẩn phụ hóa $t = \sqrt{5x^2+2x-3}$, khi đó ta biến đổi (1) thành phương trình:
$(9x^2 - 7)t^2 - 4(5x-3)t + 4 - 10x = 0(2)$
Rõ ràng phương trình (2) hai ẩn t, x có mũ cao nhất là 2 nên ta hoàn toàn có thể xem phương trình (2) là phương trình baach hai theo t và phương trình này có biệt thức là: $\Delta' = 4(5x-3)^2 - (4-10x)(9x^2-7) = 8[(x-1)]^2$.
Tới đây xem như hướng 1 được giải quyết hoàn toàn.
-Hướng 2: Lấy phương trình bậc ba đem chia cho đại lượng bậc nhất ngoài căn (chính là đại lượng bậc nhất chứa mũ 3 trong căn) cũng với lưu ý là hệ số x^3 chia cho x tốt nhất là số nguyên. Sau hai lần chia phần dư còn lại sẽ là một đại lượng bậc nhất, ta đem đại lượng bậc nhất này cùng với việc chọn hệ số bất định phân tích đại lượng còn dư này theo hai đại lượng bậc nhất có trong bài toán. Cụ thể ta có: $45x^3 - 17x^2 - 37x + 25 : 5x - 3$ được thương là $9x^2 + 2x$ và số dư là $-31x + 25$.
Bây giờ ta sẽ tìm hai hệ số a, b sao cho:
$-31x + 25 = a(5x-3) + b(x+1) = (5a+b)x + b - 3a$.

Đồng nhất hệ số hai vế của phương trình ta được: $\begin{cases} 5a + b = -31 \\ -3a + b = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -7 \\ b = 4 \end{cases}$

Khi đó ta có: $45x^3 - 17x^2 - 37x + 25 = (5x-3)(9x^2+2x) - 31x + 25$
$= (5x-3)(9x^2+2x) - 7(5x-3) + 4(x+1) = (5x-3)(9x^2+2x-7) + 4(x+1)$.
Với sự phân tích này, ta đưa phương trình về phương trình:
$(5x-3)(9x^2+2x-7) + 4(x+1) = 4(5x-3)\sqrt{(x+1)(5x-3)}$

$\Leftrightarrow 4\left(\dfrac{x+1}{5x-3}\right)-4\left(5x-3\right)\sqrt{\dfrac{x+1}{5x-3}}+9x^2+2x-7=0.$

Tới đây, cũng như hướng đi 1 ta ẩn phụ hóa $t=\sqrt{\dfrac{x+1}{5x-3}}$, khi đó ta có phương trình: $4t^2-4\left(5x-3\right)t+9x^2+2x-7=0$

Nhận xét tương tự như hướng đi 1, phương trình này là phương trình bậc 2 ẩn t có biệt thức: $\Delta'=\left[8\left(x-1\right)\right]^2$.

Bây giờ ta đi vào giải quyết cụ thể bài toán theo hướng 2 như sau:

Do: $45x^3-17x^2-37x+25=\left(x+1\right)\left(45x^2-62x-25\right)$

Từ đó ta có $x=-1$ thỏa mãn phương trình đã cho.

Điều kiện: $x\geq\dfrac{3}{5}$. Nhận xét với $x=\dfrac{3}{5}$ không thỏa mãn phương trình.

Phương trình đã cho được biến đổi về phương trình:

$\left(5x-3\right)\left(9x^2+2x-7\right)+4\left(x+1\right)=4\left(5x-3\right)\sqrt{\left(x+1\right)\left(5x-3\right)}$

$\Leftrightarrow 4\left(\dfrac{x+1}{5x-3}\right)-4\left(5x-3\right)\sqrt{\dfrac{x+1}{5x-3}}+9x^2+2x-7=0(1)$

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x+1}{5x-3}}$, $t\geq 0$. Lúc đó $t^2=\dfrac{x+1}{5x-3}$. Khi đó (1) trở thành:

$4t^2-4\left(5x-3\right)t+9x^2+2x-7=0(2)$

Xem phương trình (2) là phương trình bậc hai theo ẩn t có biệt thức:

$\Delta'=4\left(5x-3\right)^2-4\left(9x^2+2x-7\right)=8\left[\left(x-1\right)\right]^2$

Suy ra phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt:

$$\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{2\left(5x-3\right)+8\left(x-1\right)}{4}=\dfrac{18x-14}{4}\\ t=\dfrac{2\left(5x-3\right)-8\left(x-1\right)}{4}=\dfrac{2x+2}{4}\end{array}\right.$$

Với: $t=\dfrac{18x-14}{4}\Leftrightarrow\sqrt{\dfrac{x+1}{5x-3}}=\dfrac{9x-7}{2}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}9x-7\geq 0\\ \dfrac{x+1}{5x-3}=\left(\dfrac{9x-7}{2}\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq\dfrac{7}{9}\\ 4\left(x+1\right)=\left(9x-7\right)^2\left(5x-3\right)\end{cases}\Leftrightarrow x=1$$

Với $t=\dfrac{2x+2}{4}\Leftrightarrow\sqrt{\dfrac{x+1}{5x-3}}=\dfrac{x+1}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1\geq 0\\ \dfrac{x+1}{5x-3}=\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -1\\ \left(x+1\right)\left(\dfrac{1}{5x-3}-\dfrac{x+1}{2}\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\pm 1$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của phương trình là: $x=1$; $x=-1$. ■

-Bình luận. Bài toán trên ta có thể khái quát hóa về bài toán sau:

$ax^3+bx^2+cx+d=k\sqrt{\left(ex+d\right)\left(px+q\right)^3}$

Khi đó ta có hai hướng giải quyết theo lối ẩn phụ (vì ta có thể giải bằng phương pháp nhân lượng liên hợp), tất nhiên trong nhu cầu cần thiết giải quyết bài toán không tính toán quá phức tạp vì thế khi đặt ẩn phụ ta nên giải theo hướng 2 như trong phân tích để có thể đưa bài toán gọn gàng hơn hướng đi 1.

Ví dụ 18. Giải phương trình $\sqrt{3-x}+\sqrt{2+x}=x^3+x^2-4x-4+|x|+|x-1|$

✍ **Lời giải.**

-Phân tích hướng giải. Bài toán này về hình thức có chứa dấu giá trị tuyệt đối nên thường đẩy cho chúng ta hướng giải khó phán đoán. Thông thường, chúng ta hãy chia khoảng để bỏ dấu giá trị tuyệt đối sau đó mới tính đến các phương án khác để thoát căn. Tuy nhiên, nếu ta khéo léo một chút trong tư duy thì đôi lúc một bài toán mà chúng ta cảm thấy khó có thể đưa cho chúng ta một lời giải đẹp. Với phương trình này bằng cách nhẩm nghiệm chúng ta có hai nghiệm của phương trình là $x=-1$; $x=2$. Từ hai nghiệm này, chúng ta đã biết là chúng ta cần có nhân tử $(x+1)(x-2)=x^2-x-2$. Và rõ ràng không có hướng đi nào hiệu quả hơn lúc này, bằng cách tạo liên hợp. Thật vậy:
Quan sát ngay phương trình: $x^3+x^2-4x-4=0$ thay $x=-1$; $x=2$ vào ta thấy nghiệm đúng. Do đó ta có: $x^3+x^2-4x-4=(x+1)(x-2)(x+2)$.
Bây giờ ta chỉ cần đi chọn hệ số a, b sao cho hai đại lượng căn thức như sau:

$$\sqrt{3-x}-(ax+b)=0 \text{ cho } x=-1;\ x=2 \Rightarrow \begin{cases} a-b=-2 \\ -2a-b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{1}{3} \\ b=\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

$$\sqrt{x+2}-(cx+d)=0 \text{ cho } x=-1;\ x=2 \Rightarrow \begin{cases} c-d=-1 \\ -2c-d=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=\dfrac{1}{3} \\ d=\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Tới đây, nếu ta cứ thế thay vào phương trình đã cho mà không để ý tới bước ta phân tích trước đó ta sẽ thấy khó khăn ngay lập tức. Thật vậy, vì phương trình bậc ba đề bài cho đã hiển nhiên xuất hiện nhân tử cần có cho chúng ta, bây giờ thêm bớt đại lượng vừa tìm vào hai căn thức ở vế trái phương trình tức là đã cần thêm bớt vào đại lượng như thế bên vế phải, thế thì không những không làm giảm độ khó của bài toán mà còn làm tăng sự phức tạp của bài toán lên. Như ta biết, bài toán này nó khó ở chỗ những đại lượng chứa dấu giá trị tuyệt đối, vậy nên khi thêm đại lượng mới vào thì rõ ràng hướng đi này cũng chẳng giải quyết được gì cả.
Nhưng nếu ta tinh ý một chút và không máy móc thì ta thử xoay chuyển tình hình thế này xem sao? Mục đích của chúng ta là làm đơn giản hóa căn thức và dấu giá trị tuyệt đối nên thôi thì hai cái khó ta thử nhập vào xem biết đâu "cái khó ló cái khôn".
Để ý thấy được rằng, mối quan hệ sắp xếp sau đây là hoàn toàn thích hợp với nhu cầu nhân tử của chúng ta:
-Xếp: $\sqrt{3-x}-|x-1|=0$ cho $x=-1$; $x=2$ thỏa.
-Xếp: $\sqrt{x+2}-|x|=0$ cho $x=-1$; $x=2$ thỏa.
Điều đó chứng minh được rằng, bài toán này khi tạo nhân tử liên hợp thì tự trong bài toán đã có sẵn mà chúng ta không cần đi chọn hệ số. Đó chính là cái hay của bài toán mà chúng ta đang xét.

Cụ thể lời giải như sau. Điều kiện: $\begin{cases} 3-x\ge 0 \\ x+2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2\le x\le 3.$

Phương trình đã cho được biến đổi thành phương trình sau:

$\sqrt{3-x}-|x|+\sqrt{x+2}-|x-1|=x^3+x^2-4x-4$

$\Leftrightarrow \dfrac{3-x-(x-1)^2}{\sqrt{3-x}+|x-1|}+\dfrac{x+2-x^2}{\sqrt{x+2}+|x|}=(x+1)(x+2)(x-2)$

$\Leftrightarrow \dfrac{-x^2+x+2}{\sqrt{3-x}+|x-1|}+\dfrac{-x^2+x+2}{\sqrt{x+2}+|x|}=-\left(-x^2+x+2\right)(x+2)$

$\Leftrightarrow \left(-x^2+x+2\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{3-x}+|x-1|}+\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+|x|}+x+2\right)=0(1)$

Nhận xét với $\forall x\in[-2;3] \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{3-x}+|x-1|}+\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+|x|}+x+2>0$

Vì $x+2\ge 0$, $\forall x\in[-2;3]$
Do đó phương trình (1) $\Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=2$.
Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của phương trình là $x=-1$; $x=2$. ■

-Bình luận. Qua bài toán này, lại một lần nữa thấy được sự tìm tòi đánh giá ban đầu để chọn giải pháp tốt nhất để giải bài toán phương trình vô tỷ, đôi lúc nếu chỉ sử dụng đơn giản máy móc một việc làm cụ thể nào đó sẽ không dẫn đến hiệu quả dù đã có thể định hình được đường lối đi, mà đôi lúc ta cần chút tinh tế hơn để có nhuần nhuyễn và thực tiễn được đường lối mà chúng ta đã vạch ra ngay từ ban đầu.

Ví dụ 19. Giải phương trình $x\left(2x+7\right)-4\sqrt{2x^2+9x+10}+10=\left(3x+2\right)\left(2\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+5}\right)$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích hướng giải. Quan sát bài toán ta hãy để ý ngay đến phương trình bậc hai trong căn ở vế trái phương trình hình như có liên quan gì đến hai đại lượng bậc nhất trong căn ở vế phải phương trình.
Thật vậy ta có: $\left(x+2\right).\left(2x+5\right)=2x^2+9x+10$
Tiếp theo ta để ý rằng sự xuất hiện của hệ số 4 trong đại lượng $4\sqrt{2x^2+9x+10}$ và hệ số 2 và 1 trước hai đại lượng $2\sqrt{x+2}$, $\sqrt{2x+5}$ làm ta nghĩ ngay đến hằng đẳng thức, ta có: $\left(2\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+5}\right)^2=6x+13-4\sqrt{2x^2+9x+10}$.
Tới đây, ta đã có thể hình dung được mối liên hệ giữa các căn thức với nhau, đồng thời có thể gợi cho ta hai ý tưởng chính để tối giản hóa bài toán đó chính là ẩn phụ. Ta có hai hướng ẩn phụ như sau:
-Hướng 1: Đặt hai ẩn phụ cho hai căn bậc nhất và kéo x và hệ số tự do theo hai ẩn phụ đó.
-Hướng 2: Đặt một ẩn phụ cho hiệu hai căn thức và kéo đại lượng căn bậc hai chứa phương trình bậc hai theo ẩn phụ và ẩn x để đưa phương trình ẩn phụ không triệt để kéo được biệt thức và số chính phương.
Nếu ta giải quyết theo hướng 1, ta có thể định hình về ý tưởng như sau:

Đặt: $\begin{cases} a=2\sqrt{x+2} \\ b=\sqrt{2x+5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=4x+8 \\ b^2=2x+5 \end{cases} \Rightarrow 2x=a^2-b^2-3\ ,\ 2ab=4\sqrt{2x^2+9x+10}\ ,\ a^2-2b^2=-2$

Khi đó phương trình đã cho sẽ trở thành phương trình sau:
$2x\left(2x+7\right)-8\sqrt{2x^2+9x+10}+20=\left(6x+4\right)\left(2\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+5}\right)$
$\Leftrightarrow\left(a^2-b^2-3\right)\left(a^2-b^2+4\right)-4ab+20=\left(3a^2-3b^2-5\right)\left(a-b\right)$
$\Leftrightarrow\left(a^2-b^2-3\right)\left(a^2-b^2+4\right)-4ab+20=3\left(a-b\right)\left(a^2-b^2\right)-5\left(a-b\right)$
$\Leftrightarrow\left(a^2-b^2\right)^2+\left(a^2-b^2\right)+8-4ab=3\left(a-b\right)\left(a^2-b^2\right)-5\left(a-b\right)$
$\Leftrightarrow\left(a^2-b^2\right)^2+\left(a^2-b^2\right)-4\left(a^2-2b^2\right)-4ab=3\left(a-b\right)\left(a^2-b^2\right)-5\left(a-b\right)$
$\Leftrightarrow\left(a-b\right)^2-3a^2+7b^2-4ab-3\left(a-b\right)\left(a^2-b^2\right)+5\left(a-b\right)=0(1)$
Ở phương trình (1) sự xuất hiện của $4ab$ và các đại lượng $a-b$, a^2-b^2 lập lại liên tục nên ta có quyền suy nghĩ là đẩy một hằng đẳng thức liên quan đến $4ab$ và là bình phương của một hiệu liên quan đến a, b.
Do đó, ta tiếp tục tách phương trình (1) như sau:
$\left(a^2-b^2\right)^2+2a^2-4ab+2b^2-5\left(a^2-b^2\right)-3\left(a-b\right)\left(a^2-b^2\right)+5\left(a-b\right)=0$
$\Leftrightarrow\left(a^2-b^2\right)^2+2\left(a-b\right)^2+5\left(a-b\right)-3\left(a-b\right)\left(a^2-b^2\right)-5\left(a^2-b^2\right)=0$
$\Leftrightarrow 2\left(a-b\right)^2-\left(a-b\right)\left(a^2-b^2\right)+5\left(a-b\right)-2\left(a-b\right)\left(a^2-b^2\right)+\left(a^2-b^2\right)^2-5\left(a^2-b^2\right)=0$
$\Leftrightarrow\left(a-b\right)\left[2\left(a-b\right)-\left(a^2-b^2\right)+5\right]-\left(a^2-b^2\right)\left[2\left(a-b\right)-\left(a^2-b^2\right)+5\right]=0$
$\Leftrightarrow\left[2\left(a-b\right)-\left(a^2-b^2\right)+5\right].\left[\left(a-b\right)-\left(a^2-b^2\right)\right]=0$
Tới đây, xem như hướng đi 1 thành công, từ đó ta hoàn chỉnh cách giải bài toán như sau:

-Cách 1: Điều kiện: $\begin{cases} x+2\geq 0 \\ 2x+5\geq 0 \\ 2x^2+9x+10\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\geq -2$

Đặt: $\begin{cases} a = 2\sqrt{x+2} \\ b = \sqrt{2x+5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 4x+8 \\ b^2 = 2x+5 \end{cases}, (a \geq 0, b \geq 0)$

Từ điều kiện ta có các kết quả sau:

$2x = a^2 - b^2 - 3$; $2ab = 4\sqrt{2x^2+9x+10}$; $a^2 - 2b^2 = -2$.

Nhân hai vế phương trình đã cho với 2 ta được phương trình:

$2x(2x+7) - 8\sqrt{2x^2+9x+10} + 20 = (6x+4)\left(2\sqrt{x+2} - \sqrt{2x+5}\right)$

$\Leftrightarrow (a^2-b^2-3)(a^2-b^2+4) - 4ab + 20 = (3a^2-3b^2-5)(a-b)$

$\Leftrightarrow (a^2-b^2)^2 + (a^2-b^2) + 8 - 4ab = 3(a-b)(a^2-b^2) - 5(a-b)$

$\Leftrightarrow (a^2-b^2)^2 + (a^2-b^2) - 4(a^2-2b^2) - 4ab = 3(a-b)(a^2-b^2) - 5(a-b)$

$\Leftrightarrow (a-b)^2 - 3a^2 + 7b^2 - 4ab - 3(a-b)(a^2-b^2) + 5(a-b) = 0$

$\Leftrightarrow (a^2-b^2)^2 + 2(a-b)^2 + 5(a-b) - 3(a-b)(a^2-b^2) - 5(a^2-b^2) = 0$

$\Leftrightarrow 2(a-b)^2 - (a-b)(a^2-b^2) + 5(a-b) - 2(a-b)(a^2-b^2) + (a^2-b^2)^2 - 5(a^2-b^2) = 0$

$\Leftrightarrow (a-b)[2(a-b) - (a^2-b^2) + 5] - (a^2-b^2)[2(a-b) - (a^2-b^2) + 5] = 0$

$\Leftrightarrow [2(a-b) - (a^2-b^2) + 5].[(a-b) - (a^2-b^2)] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a - b = a^2 - b^2 \\ a - b = \dfrac{a^2-b^2-5}{2} \end{array}\right.$.

Với: $a - b = a^2 - b^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+2} - \sqrt{2x+5} = 2x+3 (*)$

Ta nhận xét thấy rằng:

$\left(2\sqrt{x+2} - \sqrt{2x+5}\right)\left(2\sqrt{x+2} + \sqrt{2x+5}\right) = 4(x+2) - (2x+5) = 2x+3$

Do đó ta có phương trình (*) tương đương với phương trình sau:

$2x+3 = (2x+3)\left(2\sqrt{x+2} + \sqrt{2x+5}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+3 = 0 \\ 2\sqrt{x+2} + \sqrt{2x+5} = 1 \end{array}\right.$

Với: $2x+3 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$ (thỏa điều kiện)

Với: $2\sqrt{x+2} + \sqrt{2x+5} = 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+2} = 1 - \sqrt{2x+5} \Rightarrow 4(x+2) = 2x+6 - 2\sqrt{2x+5}$

$\Rightarrow x + 1 = \sqrt{2x+5} \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$.

Thử lại ta có $x = -2$ là nghiệm của phương trình.

Với: $a - b = \dfrac{a^2-b^2-5}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{x+2} - \sqrt{2x+5} = x - 1$

$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x+2} - 2\right) - \left(\sqrt{2x+5} - 3\right) = x - 2$

$\Leftrightarrow \dfrac{2(x-2)}{\sqrt{x+2}+2} - \dfrac{2(x-2)}{\sqrt{2x+5}+3} = x - 2 \Leftrightarrow (x-2)\left(\dfrac{2}{\sqrt{x+2}+2} - \dfrac{2}{\sqrt{2x+5}+3} - 1\right) = 0 (i)$

Nhận xét với $x \geq -2$ ta có $\dfrac{2}{\sqrt{x+2}+2} - \dfrac{2}{\sqrt{2x+5}+3} - 1 < 0$ nên từ (i) ta có $x = 2$.

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm: $x = -2$; $x = -\dfrac{3}{2}$; $x = 2$.

Nếu ta giải quyết theo hướng 2 thì ta sẽ có sự phân tích sau:

Đặt $t = 2\sqrt{x+2} - \sqrt{2x+5} \Rightarrow t^2 = 6x + 13 - 4\sqrt{2x^2+9x+10}$

$\Rightarrow 4\sqrt{2x^2+9x+10} = t^2 - 6x - 13$

Lúc đó phương trình sẽ trở thành: $t^2 - (3x+2)t + 2x^2 + x - 3 = 0$.

Xem đây là phương trình bậc hai theo t có biệt thức

$\Delta = (3x+2)^2 - 4(2x^2+x-3) = (x+4)^2$.

Tới đây xem như hướng 2 đã được giải quyết. Từ đó ta có cách giải thứ 2 như sau:

-Cách 2: Điều kiện: $\begin{cases} x+2\geq 0 \\ 2x+5\geq 0 \\ 2x^2+9x+10\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\geq -2$

Đặt $t=2\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+5}\Rightarrow t^2=6x+13-4\sqrt{2x^2+9x+10}\Rightarrow 4\sqrt{2x^2+9x+10}=t^2-6x-13$
Lúc đó phương trình sẽ trở thành: $t^2-(3x+2)\,t+2x^2+x-3=0(1)$
Xem đây là phương trình bậc hai theo t có biệt thức
$\Delta=(3x+2)^2-4\left(2x^2+x-3\right)=(x+4)^2$.
Suy ra phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt:
$\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{3x+2+x+4}{2}=2x+3 \\ t=\dfrac{3x+2-x-4}{2}=x-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+5}=2x+3 \\ 2\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+5}=x-1 \end{array}\right.$
Với: $2\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+5}=2x+3$ ta giải như cách 1.
Với: $2\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+5}=x-1$ ngoài lời giải như cách 1 ta còn có thể sử dụng hàm số để giải quyết nó dựa trên yếu tố có nghiệm duy nhất $x=2$ như sau:
Ta có: $2\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+5}=x-1\Leftrightarrow 2x+3=(x-1)\left(2\sqrt{x+2}+\sqrt{x+5}\right)$
Do $x=1$ và $x=-2$ không thỏa nên với $x\neq 1$ và $x>-2$ ta có phương trình trở thành: $2\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+5}-\dfrac{2x+3}{x-2}=0$
+Xét hàm số $f(x)=2\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+5}-\dfrac{2x+3}{x-1}$ liên tục trên khoảng $(-2;1)$
Ta có: $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2x+5}}+\dfrac{5}{(x-1)^2}>0,\ \forall x\in(-2;1)$
Do đó hàm số $f(x)$ liên tục và đồng biến trên khoảng $(-2;1)$ nên phương trình $f(x)=0$ có tối đa một nghiệm.
Mà $f(-2)>0$ nên phương trình $f(x)=0$ vô nghiệm trên khoảng $(-2;1)$.
+Xét hàm số $f(x)=2\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+5}-\dfrac{2x+3}{x-1}$ liên tục trên khoảng $(1;+\infty)$
Ta có: $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2x+5}}+\dfrac{5}{(x-1)^2}>0,\ \forall x\in(1;+\infty)$
Do đó hàm số $f(x)$ liên tục và đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ nên phương trình $f(x)=0$ có tối đa một nghiệm.
Mà $f(2)=0$ nên phương trình $f(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x=2$.
Do đó phương trình đã cho có ba nghiệm: $x=-2;\ x=-\dfrac{3}{2};\ x=2$. ■

-Bình luận. Qua bài toán trên, ta thấy hai cách giải ẩn phụ cho bài toán đều là những hướng giải khá tự nhiên. Tuy nhiên ở cách 1 bài toán đòi hỏi sự vận dụng khéo léo trong việc tách nhân tử một cách tinh ý và hợp lý. Ở cách 2, tuy bài toán khi giải có vẻ như đơn giản hơn nhưng thật chất là nhờ cách 1 có thể tách nhân tử thành công nên việc phương trình bậc 2 có biệt thức là số chính phương là điều tất yếu tức là không cần quá nhiều kĩ năng phân tích để chọn hệ số tách được phương trình có biệt thức chính phương như ta từng giải ở các ví dụ trước. Và đến ví dụ này, ta có thể thấy rằng phương trình giải bằng phương pháp ẩn phụ không hoàn toàn là một bước tiến khá nét và gọn của bài toán đặt hai ẩn phụ tách được tích các nhân tử mà đòi hỏi sự biến đổi đại số phải linh hoạt, đôi khi gây nhiều trở ngại cho những ai không thuần thục kĩ năng đại số.

Ví dụ 20. Giải phương trình $\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x-1}=\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2-2x+3}$

✍ **Lời giải.**
-Phân tích hướng giải. Quan sát bài toán ta thấy chỉ có duy nhất một căn bậc 4, đồng thời đại lượng

$x-1$ xuất hiện tới ba lần vì $x^2-2x+3=(x-1)^2+2$. Do đó ta sẽ biến đổi luôn đại lượng $x+1$ theo đại lượng $x-1$ như sau: $x+1=(x-1)+2$
Vì căn bậc 4 quá lẻ loi nên ta tự nhiên nghĩ ngay đến việc ẩn phụ hóa nó ngay lập tức. Cụ thể: $t=\sqrt[4]{x-1}\Rightarrow t^4=x-1$. Khi đó phương trình đã cho sẽ trở thành: $\sqrt{t^4+2}+t=t^2+\sqrt{(t^2)^4+2}(1)$
Ở phương trình (1) gợi ý cho ta sử dụng phương pháp xét hàm số đặc trưng để giải là hướng đi nhanh nhất. Ta đi vào giải bài toán như sau:
Điều kiện: $x\geq 1$. Phương trình đã cho được biến đổi như sau:
$\sqrt{(x-1)+2}+\sqrt[4]{x-1}=\sqrt{x-1}+\sqrt{(x-1)^2+2}(*)$
Đặt: $t=\sqrt[4]{x-1}$, $t\geq 0$. Lúc đó ta có: $t^4=x-1$.
Phương trình (*) tương đương với phương trình: $\sqrt{t^4+2}+t=t^2+\sqrt{(t^2)^4+2}(1)$
Xét hàm số $f(u)=\sqrt{u^4+2}+u$ liên tục trên nữa khoảng $[0;+\infty)$.
Ta có: $f'(u)=\dfrac{2u^3}{\sqrt{u^4+2}}+1>0, \forall\in[0;+\infty)$.
Do đó hàm số $f(u)$ liên tục và đồng biến $\forall x\in[0;+\infty)$. Do đó từ (1) ta có:

$$f(t)=f\left(t^2\right)\Leftrightarrow t=t^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\ t=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt[4]{x-1}=0\\ \sqrt[4]{x-1}=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=2\end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của phương trình đã cho là $x=1$; $x=2$.
-Bình luận. Cách đi trên chỉ là chúng tôi cố gắng khai thác tư duy về hướng giải theo hướng logic nhất với bài toán. Tuy nhiên, nếu ta tinh ý thì ta có thể biến đổi trực tiếp phương trình trên về phương trình: $\sqrt{(x-1)+2}+\sqrt[4]{x-1}=\sqrt[4]{(x-1)^2}+\sqrt{(x-1)^2+2}$.
Từ đó ta đưa hướng giải như lời giải ở trên.

Ví dụ 21. Giải phương trình $4x^2+(2x-5)\sqrt{4x+2}+17=4x+(2x+3)\sqrt{6-4x}$

✍ **Lời giải.**
-Phân tích hướng giải. Quan sát bài toán ta thấy có chứa hai căn thức không liên quan đến nhau nên một điều tự nhiên ta nghĩ ngay đến việc ẩn phụ hóa hai căn thức để thoát căn.

Cụ thể, ta đặt: $\left\{\begin{array}{l}a=\sqrt{6-4x}\\ b=\sqrt{4x+2}\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}a^2=6-4x\\ b^2=4x+2\end{array}\right.$

Vấn đề tiếp theo ta để ý rằng trước hai căn thức thì mỗi căn thức chứa một đại lượng bậc nhất, nên ta thuần hóa bài toán theo ẩn phụ thì ta sẽ kéo hai đại lượng bậc nhất đó theo hai ẩn phụ bằng cách ta chọn hai hệ số m, n sao cho:
$2x-5=m(6-4x)+n(4x+2)=(-4m+4n)x+(6m+2n)$ (1)

Đồng nhất hệ số hai vế của (1) ta thu được: $\left\{\begin{array}{l}-4m+4n=2\\ 6m+2n=-5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m=-\dfrac{3}{4}\\ n=-\dfrac{1}{4}\end{array}\right.$

Tức là: $2x-5=-\dfrac{3}{4}a^2-\dfrac{1}{4}b^2$
$2x+3=m(6-4x)+n(4x+2)=(-4m+4n)x+(6m+2n)$ (2)

Đồng nhất hệ số hai vế của (2) ta thu được: $\left\{\begin{array}{l}-4m+4n=2\\ 6m+2n=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m=\dfrac{1}{4}\\ n=\dfrac{3}{4}\end{array}\right.$

Tức là: $2x-5=\dfrac{1}{4}a^2+\dfrac{3}{4}b^2$.

Với các hệ số có sự đan chéo đối xứng như vậy và đặc biệt các hệ số 1, 3, 3, 1 gợi cho chúng ta cái gì đó khá quen thuộc nên ta thử liên kết hai biểu thức lại với nhau xem điều gì xảy ra?

Ta có: $(2x+3)\sqrt{6-4x}-(2x-5)\sqrt{4x+2}=\frac{1}{4}\left(a^2+3b^2\right)a+\frac{1}{4}\left(3a^2+b^2\right)b$

$=\frac{1}{4}\left(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\right)=\frac{1}{4}(a+b)^3$

Từ nhận xét đặc biệt này, ta nghĩ ngay đến việc thay gì đặt hai ẩn phụ ta quay về đặt một ẩn phụ.

Vậy ta sẽ chuyển hướng đặt: $t=\sqrt{6-4x}+\sqrt{4x+2}$.

Quan sát lại phương trình lần nữa, ta lại thấy trong phương trình có chứa $4x^2$, $4x$ mà điều này từ tích hai đại lượng $(6-4x)(4x+2)=-16x^2+16x+12$, ta thấy ngay hoàn toàn có thể biểu diễn phương trình bậc hai còn lại theo t một cách dễ dàng.

Cụ thể, ta có: $t^2=8+2\sqrt{-16x^2+16x+12}\Rightarrow 16x^2-16x=\left(\frac{8-t^2}{2}\right)^2+12$.

Mặt khác sử dụng máy tính ta biết được phương trình có một nghiệm duy nhất $x=\frac{1}{2}\Rightarrow t=4$.

Tới đây ta hoàn toàn có thể tiến hành các bước phân tích trên vào lời giải như sau:

-Cách 1: Điều kiện: $-\frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{2}$.

Phương trình đã cho được biến đổi tương đương với phương trình:

$4x^2-4x+17=(2x+3)\sqrt{6-4x}-(2x-5)\sqrt{4x+2}$

$\Leftrightarrow 4x^2-4x+17=\frac{1}{4}\left(\sqrt{6-4x}+\sqrt{4x+2}\right)^3\Leftrightarrow 16x^2-16x+68=\left(\sqrt{6-4x}+\sqrt{4x+2}\right)^3\ (3)$

Đặt $t=\sqrt{6-4x}+\sqrt{4x+2}$, $t\ge 0$.

Lúc đó ta có: $t^2=8+2\sqrt{6-4x}+\sqrt{4x+2}\Rightarrow 16x^2-16x=\left(\frac{t^2-8}{2}\right)^2+12$.

Khi đó phương trình (3) trở thành:

$\left(\frac{t^2-8}{2}\right)^2+12+68=t^3\Leftrightarrow t^4+4t^3-16t^2-256=0$

$\Leftrightarrow (t-4)\left(t^3+8t^2+16t+64\right)=0\Leftrightarrow t=4$

$\Leftrightarrow \sqrt{6-4x}+\sqrt{4x+2}=4\Leftrightarrow\sqrt{6-4x}-2+\sqrt{4x+2}-2=0$

$$\Leftrightarrow\frac{2(1-2x)}{\sqrt{6-4x}+2}+\frac{2(2x-1)}{\sqrt{4x+2}+2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-1=0\\ \sqrt{6-4x}=\sqrt{4x+2}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của phương trình là $x=\frac{1}{2}$.

Tuy nhiên, nếu ta có hướng suy nghĩ khác ngay từ đầu dựa vào hình thức của phương trình sau khi nhóm các căn thức lại gần nhau và những gì không liên quan đến căn thức gần nhau ta sẽ có một hướng đi khác lời giải trên. Cụ thể, ta biến đổi phương trình về phương trình:

$4x^2-4x+17=(2x+3)\sqrt{6-4x}+(5-2x)\sqrt{4x+2}(4)$

Từ nhận xét liên quan đến "hằng đẳng thức dư" sau:

$4x^2-4x+17=(2x-1)^2+16\ge 16$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $2x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

Mặt khác vế phải của (4) có hình thức: $ab+cd$ làm ta liên quan đến bất đẳng thức B.C.S như sau: ", ta có: $ab+cd\le\sqrt{\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+d^2\right)}$ "

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Tuy vậy đó chỉ là cách nhìn của chúng ta, nhưng để áp dụng được trong bài toán ta cần xác định được rằng dấu bằng xảy ra ở đánh giá vừa tìm được phải xảy ra cho bất đẳng thức này.

Muốn vậy ta lập tỉ lệ: $\frac{\sqrt{6-4x}}{2x+3}=\frac{\sqrt{4x+2}}{5-2x}$ cho $x=\frac{1}{2}$ ta có hai vế bằng nhau

Đồng thời khi $x=\frac{1}{2}$ ta lại có giá trị của biểu thức

$(2x+3)\sqrt{6-4x}+(5-2x)\sqrt{4x+2}$ bằng 16.
Vậy xem như sự linh cảm của chúng ta có lý và đồng thời lúc đó có dấu của bất đẳng thức B.C.S nên ta sẽ có biểu thức $(2x+3)\sqrt{6-4x}+(5-2x)\sqrt{4x+2} \le 16$ nên bài toán chuyển về bài toán so sánh như sau: $VP \le 16 \le VT$.
Tuy nhiên, đó chỉ là sự linh cảm chính xác về hướng tư duy đi, nhưng còn một vấn đề nữa chúng ta cần chú ý là cần kiểm tra lại xem điều chúng ta linh cảm có thật sự là chính xác dấu đẳng thức có thật sự xảy ra hay không hay bị ngược dấu, vấn đề này hết sức quan trọng. Cụ thể, nếu ta tiến để dấu đẳng thức xảy ra ta sẽ áp dụng bất đẳng thức như sau:
$(2x+3)\sqrt{6-4x}+(5-2x)\sqrt{4x+2} \le \sqrt{\left[(2x+3)^2+(5-2x)^2\right](6-4x+4x+2)} \le \sqrt{8(8x^2-8x+34)} \le$
$\sqrt{16(4x^2-4x+17)} \le \sqrt{16(2x-1)^2+16^2}$
Rõ ràng tới đây, bài toán không giải quyết được vì bất đẳng thức bị ngược dấu, phải chăng linh cảm hướng đi của ta bị phá sản?
Hãy bình tĩnh, chúng ta xem thử chúng ta có vấn đề gì? Vấn đề ở chỗ là chỗ dấu bằng xảy ra ở phía trên tuy có xảy ra nhưng lại không cho kết quả đúng.
Lại thấy khi $x=\dfrac{1}{2}$ ta lại có: $(2x+3)\sqrt{6-4x}=(5-2x)\sqrt{4x+2}$.
Mặt khác: $(2x+3)^2(6-4x)+(5-2x)^2(4x+2)=-96x^2+96x+104$.
Dấu $(-)$ này là một sự khả thi khá rõ trong lúc chúng ta cần vế phải bé hơn 16. Từ đó, ta có thêm cách giải sau:
-Cách 2: Điều kiện: $-\dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{3}{2}$.
Phương trình đã cho được biến đổi thành phương trình:
$4x^2-4x+17=(2x+3)\sqrt{6-4x}+(5-2x)\sqrt{4x+2}(5)$
Ta có: $4x^2-4x+17=(2x-1)^2+16 \ge 16$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $2x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.
Lại áp dụng bất đẳng thức B.C.S ta có:
$(2x+3)\sqrt{6-4x}+(5-2x)\sqrt{4x+2} \le \sqrt{\left[(2x+3)^2(6-4x)+(5-2x)^2(4x+2)\right](1+1)} \le \sqrt{2(-96x^2+96}$
$\sqrt{2.\left[-24(4x^2-4x+1+128)\right]} \le \sqrt{-48(2x-1)^2+16^2} \le 16$.
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:
$(2x+3)\sqrt{6-4x}=(5-2x)\sqrt{4x+2} \Rightarrow (2x+3)^2(6-4x)=(5-2x)^2(4x+2) \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.
Từ đó ta có: $4x^2-4x+17 \ge 16 \ge (2x+3)\sqrt{6-4x}+(5-2x)\sqrt{4x+2}$
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=\dfrac{1}{2}$ và cũng chính là ngiệm của phương trình.
Qua sự phát hiện ra: $4x^2-4x+17=(2x-1)^2+16 \ge 16$ ta có thể đưa bài toán theo hướng tư duy khác đó là ta sẽ đưa bài toán giải phương trình như đề bài đã cho về bất phương trình với sự cảm nhận là phương trình có một nghiệm duy nhất nên bất phương trình cần xét sẽ có tính đúng nhất định để suy ra nghiệm của phương trình. Cụ thể ta có cách giải tiếp theo sau đây:
-Cách 3: Điều kiện: $-\dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{3}{2}$. Do: $4x^2-4x+17=(2x-1)^2+16 \ge 16$.
Ta sẽ chứng minh: $(2x+3)\sqrt{6-4x}+(5-2x)\sqrt{4x+2} \le 16$
$\Leftrightarrow \dfrac{1}{4}\left(\sqrt{6-4x}+\sqrt{4x+2}\right)^3 \le 16$
$\Leftrightarrow \left(\sqrt{6-4x}+\sqrt{4x+2}\right)^3 \le 64 \Leftrightarrow \sqrt{6-4x}+\sqrt{4x+2} \le 4$
$\Leftrightarrow 8+2\sqrt{-16x^2+16x+12} \le 16 \Leftrightarrow \sqrt{-16x^2+16x+12} \le 4$
$\Leftrightarrow -16x^2+16x-4 \le 0 \Leftrightarrow -4(4x^2-4x+1) \le 0 \Leftrightarrow -4(2x-1)^2 \le 0$ (luôn đúng)
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $2x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.
Thử lại ta có ngay $x=\dfrac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho. ■

-Bình luận. Qua ba cách giải này, nhìn về bài gải có lẽ độc giả dễ cảm nhận lời giải cách ba hay và gọn hơn, tuy nhiên cách giải thứ 2 và thứ 3 đòi hỏi một sự tư duy và tỉnh táo nhất định mới có thể triển khai thành công, còn cách 1 tuy có vẻ khó nhận ra về điều đặc biệt ở lập phương một tổng nhưng để đi đến được điều đó chúng ta lại bắt đầu bằng những tư duy tự nhiên và đó chính là nét trong sáng ở cách giải thứ nhất.

Ví dụ 22. Giải phương trình $(3x^2+11)\sqrt{x^2+1} = 3\sqrt{3}x^3 - 8x^2 + 11\sqrt{3}x + 4$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích hướng giải. Quan sát phương trình điều dễ nhận thấy nhất là bên vế phải phương trình tuy là một phương trình bậc ba khá rắc rối, tuy nhiên có hai hạng tử khi nhóm lại sẽ bắt được nhân tử chung với bên vế trái của phương trình.

Thật vậy, ta có: $3\sqrt{3}x^3 - 8x^2 + 11\sqrt{3}x + 4 = \left(3\sqrt{3}x^3 + 11\sqrt{3}x\right) - 4\left(2x^2-1\right) = \sqrt{3}x\left(3x^2+11\right) - 4\left(2x^2-1\right)$

Khi đó ta sẽ biến đổi phương trình về phương trình:

$\left(3x^2+11\right)\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{3}x\right) = 4\left(1-2x^2\right)$.

Tới đây ta tinh ý một chút ta sẽ có nhận xét:

$\left(\sqrt{x^2+1} - x\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x^2+1} + x\sqrt{3}\right) = 1-2x^2$

Như vậy, rõ ràng sử dụng nhân lượng liên hợp ta lại tiếp tục bắt nhân tử chung một lần nữa và đưa phương trình thành:

$\left(3x^2+11\right)\left(1-2x^2\right) = 4\left(1-2x^2\right)\left(\sqrt{x^2+1} + x\sqrt{3}\right)$

$\Leftrightarrow \left(1-2x^2\right)\left(3x^2+11-4\sqrt{x^2+1}-4x\sqrt{3}\right) = 0$

Hãy để ý trong biểu thức $3x^2+11-4\sqrt{x^2+1}-4x\sqrt{3}$ có chứa hệ số 4 trước các biểu thức $\sqrt{x^2+1}$, $x\sqrt{3}$ làm ta có liên tưởng đến hằng đẳng thức. Do đó ta biến đổi sau:

$3x^2+11-4\sqrt{x^2+1}-4x\sqrt{3} = x^2+1-4\sqrt{x^2+1}+4+2x^2-4x\sqrt{3}+6$

$= \left(\sqrt{x^2+1}-2\right)^2 + 2\left(x-\sqrt{3}\right)^2$

Và tới đây ta đã xem như bài toán được giải quyết trọn vẹn. Từ đó ta đi đến lời giải chi tiết như sau:

-Điều kiện: $3\sqrt{3}x^3 - 8x^2 + 11\sqrt{3}x + 4 \geq 0 (*)$

Phương trình đã cho được biến đổi thành:

$\left(3x^2+11\right)\sqrt{x^2+1} = \left(3\sqrt{3}x^3 + 11\sqrt{3}x\right) - 4\left(2x^2-1\right)$

$\Leftrightarrow \left(3x^2+11\right)\sqrt{x^2+1} = \sqrt{3}x\left(3x^2+11\right) - 4\left(2x^2-1\right)$

$\Leftrightarrow \left(3x^2+11\right)\left(\sqrt{x^2+1} - x\sqrt{3}\right) = 4\left(1-2x^2\right)$

$\Leftrightarrow \left(3x^2+11\right)\left(1-2x^2\right) = 4\left(1-2x^2\right)\left(\sqrt{x^2+1} + x\sqrt{3}\right)$

$\Leftrightarrow \left(1-2x^2\right)\left(3x^2+11-4\sqrt{x^2+1}-4x\sqrt{3}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(1-2x^2\right)\left[\left(\sqrt{x^2+1}-2\right)^2 + 2\left(x-\sqrt{3}\right)^2\right] = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-2x^2=0 \\ \left\{\begin{array}{l} \sqrt{x^2+1}-2=0 \\ x-\sqrt{3}=0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \left\{\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{3} \\ x=\sqrt{3} \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x=\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện (*) ta có nghiệm của phương trình là: $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $x = \sqrt{3}$. ■

-Bình luận. Bài toán này, các bạn dễ mắc sai lầm ở bước $\left(\sqrt{x^2+1}-2\right)^2 + 2\left(x-\sqrt{3}\right)^2 = 0$ nếu khẳng định vô nghiệm do thấy tổng hai số dương. Các bạ chú ý ta chỉ khẳng định được nó vô nghiệm khi mà tổng đó dương thật sự với mọi giá trị.

Ví dụ 23. Giải phương trình $2x^2+4x=\sqrt{\dfrac{x+3}{2}}$.

✍ Lời giải.

-Phân tích hướng giải. Với bài toán này, chúng ta có thể đưa ra các lời giải như nâng lũy thừa, đặt ẩn phụ liên hợp,... Tuy nhiên, chúng tôi đưa ra ví dụ này, để chuẩn bị cho một lớp bài toán mà khi giải ta sẽ đưa về hệ phương trình đối xứng hay hệ phương trình gần đối xứng thông qua đặt ẩn phụ đặc biệt. Và đường lối nào cho ta cách tìm ẩn phụ đặc biệt đó? Để trả lời câu hỏi này cũng chính là lý do mà chúng tôi trình bày cho các bạn hướng suy nghĩ và cách đi tìm ẩn phụ đó bằng nhiều đường lối khác nhau sau đây.

Với phương trình đang xét, các bạn quan sát thấy vế phải phương trình chứa căn bậc hai còn vế trái phương trình là một phương trình bậc nhất. Đây được xem là một phép toán ngược và bài toán phép toán ngược thường đưa được hệ phương trình đối xứng hoặc gần đối xứng. Vậy làm cách nào để có thể dưa phương trình đã cho về hệ đối xứng hay gần đối xứng. Ta có những định hướng sau:

+Hướng 1: Khai thác triệt để hệ số x^2 và hệ số của x bên vế phải của phương trình để có được hằng đẳng thức:

Ta có: $2x^2+4x=2\left(x^2+2x+1\right)-2=2\left(x+1\right)^2-2$. Khi đó: $\sqrt{\dfrac{x+3}{2}}=\sqrt{\dfrac{(x+1)+2}{2}}$.

Lúc đó phương trình đã cho trở thành:

$2\left(x+1\right)^2-2=\sqrt{\dfrac{(x+1)+2}{2}}\Leftrightarrow\left(x+1\right)^2-1=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x+1}{2}+1}$

Đặt: $a=x+1$; $b=\sqrt{\dfrac{x+1}{2}+1}=\sqrt{\dfrac{a}{2}+1}$. Khi đó phương trình trở thành hệ phương trình:

$$\begin{cases}a^2-1=\dfrac{1}{2}b\\ b^2=\dfrac{a}{2}+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a^2-b=1\\ 2b^2-a=1\end{cases}\quad(*)$$

Hệ $(*)$ là một hệ đối xứng loại 2 và ta hoàn toàn giải quyết được.

+Hướng 2: Do hai vế chứa hai phép toán ngược nhau liên quan đến bậc 2 nên ta có thể đưa phương trình về hệ đối xứng loại 2 hoặc gần đối xứng loại 2.

Đặt: $my+n=\sqrt{\dfrac{x+3}{2}}$. Do ta cần đưa hệ phương trình đối xứng (gần đối xứng) loại 2 nên ta xét hệ phương trình: $\begin{cases}\left(mx+n\right)^2=\dfrac{x+3}{2}\\ 2x^2+4x=mx+n\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2m^2x^2+4mnx+2n^2=x+3\\ 2x^2+4x=mx+n\end{cases}$

Ta tìm m, n sao cho: $\dfrac{2m^2}{2}=\dfrac{4mn}{4}=\dfrac{1}{m}=\dfrac{3-2n^2}{n}\Rightarrow\begin{cases}m=1\\ n=1\end{cases}$.

Khi đó ta đặt: $y+1=\sqrt{\dfrac{x+3}{2}}$. Lúc đó kết hợp với phương trình ta được hệ phương trình: $\begin{cases}2x^2+4x=y+1\\ y+1=\sqrt{\dfrac{x+3}{2}}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2+4x=y+1\\ 2y^2+4y=x+1\end{cases}\quad(*')$$

Hệ phương trình $(*')$ là một hệ đối xứng loại 2.

+Hướng 3: Do trong phương trình ta có: $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}.0=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 4}{2}(1+2)$ nên ta có thể sử dụng phương pháp hàm số để đạo hàm tìm ra ẩn phụ (bậc 2 thì chỉ cần đạo hàm cấp một) với hàm số có biểu thức là vế phải của phương trình. Cụ thể:
Xét hàm số $f(x)=x^2+2x$ có $f'(x)=2x+2$ và $f'(x)=0\Leftrightarrow 2x+2=0\Leftrightarrow x=-1$.
Khi đó ta đặt: $\sqrt{\frac{x+3}{2}}=y+1$. Kết hợp với phương trình ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+2x=\frac{1}{2}(y+1) \\ \sqrt{\frac{x+3}{2}}=y+1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2x^2+4x=y+1 \\ 2y^2+4y=x+1 \end{cases}$$

Hệ này giống hệ $(*)$.
-Chú ý: Để sử dụng được đạo hàm vào việc đặt ẩn phụ đưa về hệ đối xứng loại 2 ta cần chú ý là đối phương trình tổng quát: $\sqrt{ax+b}=px^2+cx+d$ thì ta có hai trường hợp.
-Trường hợp 1: $p=\frac{1}{a}$; $b+ad=\frac{a^2c}{2}\left(1+\frac{c}{2}\right)$ thì đặt $\sqrt{ax+b}=y+\frac{ac}{2}$ với $\frac{ac}{2}$ là số đối của $x=-\frac{ac}{2}$ là nghiệm của đạo hàm cấp 1 của hàm số $f(x)=\frac{1}{a}x^2+cx+d$.
-Trường hợp 2: $p\neq\frac{1}{a}$; $a\neq\frac{1}{c}$ thì đặt với $\frac{p}{2c}$ là số đối của $x=-\frac{p}{2c}$ là nghiệm của đạo hàm cấp 1 của hàm số $f(x)=px^2+cx+d$.
+Hướng 4: Sử dụng một biến thể của phương pháp Ferrari (nhắc đến trong ví dụ 8). Cụ thể ta sẽ biến đổi như sau:
Xét phương trình: $\sqrt{ax+b}=px^2+cx+d$.
Ta thêm hệ số m sao cho vế trái phương trình là bình phương một tổng.
Biến đổi như sau: $m\left(\sqrt{ax+b}+\frac{1}{2m}\right)^2=px^2+(c+ma)x+d+bm+\frac{1}{4m}(1)$
Ta cần tìm m sao cho vế phải của (1) có dạng bình phương một tổng hoặc bình phương một hiệu là xem như được giải quyết. Tức là ta cần tìm m sao cho vế phải của phương trình (1) có biệt thức $\Delta=0$ $\Leftrightarrow a^2m^3+(2ac-4bp)m^2+(c^2-4dp)m-p=0$.
Sau khi tìm được m thì ta có: $m\left(\sqrt{ax+b}+\frac{1}{2m}\right)^2=(ux+v)^2$, xét các khả năng xảy ra sau:
+Khả năng 1: $m\leq 0\Rightarrow x=-\frac{u}{v}$.
+Khả năng 2: $m\geq 0\Rightarrow\sqrt{ax+b}=\frac{u}{\sqrt{m}}y+\frac{v}{\sqrt{m}}-\frac{1}{2m}$ ta thu được hệ đối xứng.
+Khả năng 3: $m\geq 0\Rightarrow -\sqrt{ax+b}=\frac{u}{\sqrt{m}}y+\frac{v}{\sqrt{m}}-\frac{1}{2m}$ ta thu được hệ gần đối xứng.
-Áp dụng vào bài toán đang xét ta có:
Thêm m và biến đổi: $m\left(\sqrt{\frac{x+3}{2}}+\frac{1}{2m}\right)^2=2x^2+\left(4+\frac{m}{2}\right)x+\frac{3}{2}m+\frac{1}{4m}$
Phương trình bậc hai bên vế phải của phương trình có biệt thức:
$\Delta=\left(4+\frac{m}{2}\right)^2-8\left(\frac{3}{2}m+\frac{1}{4m}\right)=0\Rightarrow m=2$
Ta đây ta đưa phương trình đã cho về phương trình:

$$2\left(\sqrt{\frac{x+3}{2}}+\frac{1}{4}\right)^2=2x^2+5x+\frac{25}{8}\Leftrightarrow\left(\sqrt{\frac{x+3}{2}}+\frac{1}{4}\right)^2=\left(x+\frac{5}{4}\right)^2\ (*'')$$

Đặt: $\sqrt{\frac{x+3}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}y+\frac{5}{4\sqrt{2}}-\frac{1}{4}$. Khi đó kết hợp với phương trình ta thu được hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(y+\dfrac{5}{4}\right)^2 = \left(x+\dfrac{5}{4}\right)^2 \\ \left(\sqrt{\dfrac{x+3}{2}}+\dfrac{1}{4}\right)^2 = \dfrac{1}{2}\left(y+\dfrac{5}{4}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(y+\dfrac{5}{4}\right)^2 = \left(x+\dfrac{5}{4}\right)^2 \\ \left(x+\dfrac{5}{4}\right)^2 = \dfrac{1}{2}\left(y+\dfrac{5}{4}\right)^2 \end{cases}$$

Hệ thu được là hệ đối xứng, đó là do chúng tôi cố tình ép cho được hình thức hệ đối xứng như lí thuyết đã phân tích. Trên thực tế thì với phương trình tổng quát này thì ngay từ chúng ta hoàn toàn giải quyết được nhanh chóng và điều đó có nghĩa rằng phương trình tổng quát đang xét hoàn toàn giải quyết được về dạng phương trình $A^2 = B^2$ như ngay từ ví dụ 1 chúng tôi có nêu ra hướng giải trong trường hợp m là số nguyên tìm được. Chú ý hướng đi 4 chỉ được áp dụng cho hình thức phương trình $\sqrt{ax+b} = px^2 + cx + d$.

Bây giờ, ta đi vào giải cụ thể bài toán như sau:

Điều kiện: $x \geq -3$. Đặt: $y + 1 = \sqrt{\dfrac{x+3}{2}} \Rightarrow y \geq -1$. Kết hợp với phương trình đã cho ta thu được hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + 2x = \dfrac{1}{2}(y+1) \\ \sqrt{\dfrac{x+3}{2}} = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 4x = y + 1 (1) \\ 2y^2 + 4y = x + 1 (2) \end{cases}$$

Lấy (1) − (2) vế theo vế ta có:

$$2\left(x^2 - y^2\right) + 4(x-y) = y - x \Leftrightarrow (x-y)(2x+2y+5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ y = \dfrac{-5-2x}{2} \end{array}\right.$$

Với $x = y$ thay vào (1) ta có: $2x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-3-\sqrt{17}}{4} \\ x = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{4} \end{array}\right.$

Đối chiếu cả điều kiện của x, y ta thu được $x = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{4}$.

Với $y = \dfrac{-5-2x}{2}$ thay vào (1) ta có: $4x^2 + 10x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-5-\sqrt{13}}{4} \\ x = \dfrac{-5+\sqrt{13}}{4} \end{array}\right.$

Đối chiếu cả điều kiện của x, y ta thu được: $x = \dfrac{-5-\sqrt{13}}{4}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{4}$; $x = \dfrac{-5-\sqrt{13}}{4}$. ■

-Bình luận. Thông qua bài toán này, chúng ta đã có thể hình dung được vì sao chúng ta có thể đặt ẩn phụ đặc biệt như vậy trong bài toán đưa phương trình vô tỷ về hệ đối xứng. Theo ý kiến chủ quan của chúng tôi thì đối với bài toán này lối đi đưa về hệ không tự nhiên lắm, tuy vậy chúng ta cần phải mở cho chúng ta nhiều hướng đi để tiếp cận với một bài toán vô tỷ cho dù lối đi đó nó không được tự nhiên và nhanh gọn. Nhưng thông qua đó ta có thể thấy sự phong phú trong cách tiếp cận một bài toán phương trình vô tỷ tùy theo hướng tư duy mà chúng ta rèn luyện được. Để nối tiếp hướng đi này, chúng ta tiếp tục khai thác một số phương trình nữa để có cái nhìn tổng quan hơn.

Ví dụ 24. Giải phương trình $\sqrt[3]{81x-8} = x^3 - 2x^2 + \dfrac{4}{3}x - 2$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích hướng giải. Quan sát phương trình ta có vế phải chứa một phương trình bậc ba và vế trái chứa một căn bậc ba nên bài toán chứa hai vế có phép toán ngược nhau nên ta có thể đưa về hệ phương

trình đối xứng hoặc gần đối xứng để giải quyết. Ta sẽ chọn một số hướng đi như ví dụ trên để xem đối với phương trình này xem sao?
Trước tiên ta viết phương trình đã cho gọn lại như sau: $3\sqrt[3]{81x-8} = 3x^3 - 6x^2 + 4x - 6$.
+Hướng 1: Khai thác triệt để hết hệ số của x^3 và hệ số của x^2 để vế phải của phương trình chứa hằng đẳng thức. Muốn vậy, ta đưa phương trình về phương trình: $27\sqrt[3]{81x-8} = 27x^3 - 54x^2 + 36x - 54$
$\Leftrightarrow 27\sqrt[3]{81x-8} = (3x)^3 - 3.(3x)^2.2 + 3.3x2^2 - 2^3 - 46$
$\Leftrightarrow 27\sqrt[3]{81x-8} = (3x-2)^3 - 46 \Leftrightarrow 27\sqrt[3]{27(3x-2)+46} = (3x-2)^3 - 46(1)$
Đặt: $a = 3x-2$; $b = \sqrt[3]{27(3x-2)+46} = \sqrt[3]{27a+46}$.
Khi đó kết hợp với phương trình (1) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 27b = a^3 - 46 \\ b^3 = 27a + 46 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - 27b = 46 \\ b^3 - 27a = 46 \end{cases} \quad (*)$$

Hệ $(*)$ là một hệ đối xứng loại 2.
+Hướng 2: Ta sử dụng tìm hệ số ẩn phụ dựa vào điều kiện đối xứng của hệ loại 2:
Đặt: $my + n = 3\sqrt[3]{81x-8}$. Do ta cần đưa về hệ đối xứng loại 2 nên ta xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} my + n = 3\sqrt[3]{81x-8} \\ 3x^3 - 6x^2 + 4x - 6 = mx + y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^3y^3 + 3m^2ny^2 + 3mn^2y + n^3 = 3^7x - 3^3.8 \\ 3x^3 - 6x^2 + 4x - 6 = my + n \end{cases}$$

Ta cần tìm hệ số m, n thỏa mãn hệ thức:

$$\frac{m^3}{3} = \frac{3m^2n}{-6} = \frac{3mn^2}{4} = \frac{3^7}{m} = \frac{-3^3.8 - n^3}{n+6} \Rightarrow \begin{cases} m = 9 \\ n = -6 \end{cases}$$

Từ đó ta có cách đặt: $9y - 6 = 3\sqrt[3]{81x-8} \Leftrightarrow 3y - 2 = \sqrt[3]{81x-8}$
Khi đó kết hợp với phương trình đã cho ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} 9y - 6 = 3x^3 - 6x^2 + 4x - 6 \\ (3y-2)^3 = 81x - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^3 - 6x^2 + 4x = 9y \\ 3y^3 - 6y^2 + 4y = 9x \end{cases} \quad (*')$$

Hệ $(*')$ là hệ đối xứng loại 2.
+Hướng 3: Quan sát phương trình đã cho ta để ý thấy $81 \neq \frac{1}{1}$ nên ta có thể sử dụng đạo hàm để tìm ẩn phụ với lưu ý do xét hàm bậc ba nên ta sẽ đạo hàm tới cấp 2 để tìm ẩn phụ thích hợp.
Xét hàm số: $f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - 2$ ta có
$f'(x) = 3x^2 - 4x + \frac{4}{3}, \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$.
Từ đó ta đưa ra cách đặt: $\sqrt[3]{81x-8} = 3y - 2$.
Khi đó kết hợp với phương trình đã cho ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3y - 2 = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - 2 \\ \sqrt[3]{81x-8} = 3y - 2 \end{cases}$$

Hệ là một hệ đối xứng loại 2.
Bây giờ ta đi vào lời giải cụ thể của bài toán: Đặt: $\sqrt[3]{81x-8} = 3y - 2$.
Khi đó kết hợp với phương trình đã cho ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3y-2=x^3-2x^2+\dfrac{4}{3}x-2 \\ \sqrt[3]{81x-8}=3y-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-2x^2+\dfrac{4}{3}x=3y(I) \\ y^3-2y^2+\dfrac{4}{3}y=3x\,(II) \end{cases}$$

Lấy $(I)-(II)$ vế theo vế ta có: $3\left(x^3-y^3\right)-6\left(x^2-y^2\right)+13\left(x-y\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-y\right)\left(3x^2+3xy+3y^2-6x-6y+13\right)=0(2)$

Xét phương trình: $3x^2+3\left(y-2\right)x+3y^2-6y+13=0(3)$

Xem phương trình (3) là phương trình bậc hai theo biến x thì ta có:

$$\Delta=9\left(y-2\right)^2-12\left(3y^2-6y+13\right)=-27y^2+36y-120=-\left[27\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+108\right]<0$$

Do đó phương trình (3) vô nghiệm nên từ (2) ta có $x=y$.

Thay vào (I) ta có: $x^3-2x^2+\dfrac{4}{3}x=x \Leftrightarrow x\left(x^2-2x+\dfrac{4}{3}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-2x+\dfrac{4}{3}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{3\pm2\sqrt{6}}{3}. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm: $x=0$; $x=\dfrac{3\pm2\sqrt{6}}{3}$. ■

-Bình luận. Qua cách giải trên chúng ta lưu ý rằng với phương trình: $\sqrt[3]{ax+b}=cx^3+dx^2+ex+f$. Để đưa được về hệ đối xứng bằng đạo hàm ta cần chú ý tới những lưu ý trong hướng hai ở ví dụ số 20 và ta cũng có cách đặt tương tự giống vậy. Tiếp theo, ta tiếp tục khai thác một phương trình vô tỷ nữa mà lời giải của chúng ta nhắm đến hướng đưa về hệ phương trình đối xứng.

Ví dụ 25. Giải phương trình $8x^2-13x+7=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\sqrt[3]{3x^2-2}$

✍ Lời giải.

-Phân tích hướng giải. Bài toán này vì sao mà chúng ta có thể nghĩ đến việc biến đổi phương trình về hệ đối xứng được? Câu trả lời cũng nằm ở hai vế phương trình chứa hai phép toán ngược nhau. Cái khó của bài toán này chính là ở trước đại lượng căn thức ta còn một đại lượng bậc nhất. Thật vậy, ta biến đổi phương trình đã cho về phương trình sau:

$8x^3-13x^2+7x=\left(x+1\right)\sqrt[3]{3x^2-2}$.

Bây giờ trong các hướng đưa về hệ phương trình mà ta đã xét đến trong các ví dụ trước thì liệu rằng hướng đi nào có thể giúp chúng ta đưa phương trình này về hệ phương trình đối xứng hoặc gần đối xứng.

Câu trả lời có vẻ hiệu quả nhất chính là ta khai thác triệt để hệ số của x^3 và hệ số của x^2 trong phương trình để tạo ra một hằng đẳng thức.

Dựa vào phương trình bậc ba bên vế trái của phương trình ta thấy hệ số của x^3 là $8=2^3$ có vẻ như là một kết quả đẹp như vậy ta chỉ cần làm cho hệ số của x^2 sẽ theo một hệ số có thể đưa về hằng đẳng thức bậc ba liên quan đến 2x. Do đó ta có sự phân tích sau:

$8x^3-13x^2+7=8x^3-12x^2+6x+1-x^2+x-1=\left(2x-1\right)^3-\left(x^2-x-1\right)$

Đại lượng vừa xuất hiện trong lúc tìm hằng đẳng thức bậc ba chính là x^2-x-1 nên ta cần phải cho nó xuất hiện lại trong căn bậc 3. Vì sao có suy nghĩ này? Câu trả lời cũng nằm ở chỗ hai vế của phương trình là một phép toán ngược.

Vậy còn đại lượng $(x+1)$ thì sao? Sẽ giải quyết nó thế nào đây?

Câu trả lời vẫn nằm ở phép toán ngược của hai vế phương trình trong bài toán, tức là hễ ngoài đại lượng căn có gì thì ta cũng trả về trong căn đại lượng đó cộng với trong căn bậc ba là một tam thức bậc hai.

Điều này cũng có nghĩa là ta cần xử lí đại lượng $3x^2-2$ theo ba đại lượng $x+1$; $2x-1$; x^2-x-1.

Lại để ý đại lượng $x+1$ là đại lượng tích với căn thức bậc ba, còn đại lượng $2x-1$ là một biểu thức có

được khi lấy căn bậc ba và cuối cùng đại lượng $x^2 - x - 1$ là phần dư bị trừ ra khi tách hằng đẳng thức.
Tất cả những nhận xét này dẫn đến sự phân tích như sau: $3x^2 - 2 = (x+1)(2x-1) + (x^2 - x - 1)$
Với sự phân tích này, lúc đó phương trình đã cho được biến đổi thành phương trình:
$(2x-1)^3 - (x^2 - x - 1) = (x+1)\sqrt[3]{(x+1)(2x-1) + (x^2 - x - 1)}(1)$
Từ hình thức phương trình (1) ta có ngay phép đặt:
$u = 2x - 1$; $v = \sqrt[3]{(x+1)(2x-1) + (x^2 - x - 1)}$
Kết hợp phép đặt và phương trình (1) ta thu được một hệ phương trình:

$$\begin{cases} u^3 - (x^2 - x - 1) = (x+1)v \\ v^3 = (x+1)(2x-1) + (x^2 - x - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 - (x^2 - x - 1) = (x+1)v \\ v^3 - (x^2 - x - 1) = (x+1)u \end{cases} (*)$$

Hệ (∗) là một hệ đối xứng loại 2. Vậy xem như bài toán đã được giải quyết, bây giờ ta đi vào lời giải cụ thể của bài toán như sau:
-Điều kiện: $x \neq 0$
Phương trình đã chó được biến đổi thành phương trình:
$8x^3 - 13x^2 + 7x = (x+1)\sqrt[3]{3x^2 - 2}$
$\Leftrightarrow (2x-1)^3 - (x^2 - x - 1) = (x+1)\sqrt[3]{(x+1)(2x-1) + (x^2 - x - 1)}(1)$
Đặt $u = 2x - 1$; $v = \sqrt[3]{(x+1)(2x-1) + (x^2 - x - 1)}$. Kết hợp phép đặt và phương trình (1) ta thu được một hệ phương trình:

$$\begin{cases} u^3 - (x^2 - x - 1) = (x+1)v \\ v^3 = (x+1)(2x-1) + (x^2 - x - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 - (x^2 - x - 1) = (x+1)v(2) \\ v^3 - (x^2 - x - 1) = (x+1)u(3) \end{cases}$$

Lấy (2) − (3) vế theo vế ta được:
$u^3 - v^3 = (x+1)(v-u) \Leftrightarrow (u-v)(u^2 + uv + v^2 + x + 1) = 0(4)$
Ta có: $u^2 + uv + v^2 + x + 1 = \left(v + \frac{u}{2}\right)^2 + (x+1)(2x-1) + x^2 - (3x^2 - 2) + \frac{3}{4}u^2$
$= \left(v + \frac{u}{2}\right)^2 + (x+1)(2x-1) + x^2 - (3x^2 - 2) + \frac{3}{4}(2x-1)^2$
$= \left(v + \frac{u}{2}\right)^2 + 2x^2 + (x-1)^2 + \frac{3}{4} > 0.$

Do đó từ (4) ta có: $u = v \Leftrightarrow 2x - 1 = \sqrt[3]{3x^2 - 2} \Leftrightarrow 8x^3 - 15x^2 + 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\frac{1}{8} \end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của phương trình là: $x = 1$; $x = -\frac{1}{8}$. ■

-Bình luận. Qua ví dụ này, một lần nữa chúng ta thấy nếu chúng ta có sự tính toán kỹ lưỡng trước hướng đi và vì sao nghĩ đến được hướng giải quyết đó sẽ giúp chúng ta gỡ rối bài toán khá đơn giản. Tuy nhiên không phải bài toán nào ngược có thể đưa về hệ đối xứng loại 2 hoàn chỉnh như vậy. Quan sát ví dụ sau chúng ta sẽ thấy được điều đó.

Ví dụ 26. Giải phương trình $\frac{2}{3}\sqrt{4x+1} = 9x^2 - 26x + \frac{37}{3}$.

✍ Lời giải.
-Phân tích hướng giải. Bài toán này một lần nữa ta thấy hai vế phương trình chứa hai phép toán ngược nhau và theo suy nghĩ tự nhiên ta sẽ đưa bài toán về hệ đối xứng. Và vẫn như những gì đã phân tích các hướng chuyển đổi từ phương trình có hình thức này về hệ đối xứng, ta tiến hành như sau:
+Hướng 1: Khử triệt để hệ số của x^2 và hệ số của x để tạo hằng đẳng thức:
Ta có: $9x^2 + 26x + \frac{37}{3} = (3x)^2 - 2.3x.4 + 4^2 - 2x - \frac{11}{3} = (3x-4)^2 - 2x - \frac{11}{3}$
Với sự phân tích để khử triệt để các hệ số cần thiết, thì ta chỉ có thể khử được ở kiểu "gần triệt để"

(ví dụ trong bài ta chỉ khử được triệt để hệ số -26). Điều này mách bảo cho chúng ta thấy được nếu phương trình này có đưa được về hệ đối xứng thì đó chỉ là hệ gần hệ đối xứng.
Thật vậy, từ sự phân tích ta đưa ra phép đặt: $\sqrt{4x+1} = 3y-4$. Lúc đó ta sẽ được hệ phương trình sau: $\begin{cases} (3x-4)^2 = 2x+2y+1 \\ (3y-4)^2 = 4x+1 \end{cases} \quad (*)$
Hệ $(*)$ chỉ được xem là hệ gần đối xứng.
Tuy nhiên, giả sử như ta không phân tích theo hướng 1 mà ta đẩy luôn cách phân tích theo hướng cho hệ số để được hệ đối xứng thì liệu trở ngại nào đang chờ ta phía trước? Để trả lời câu hỏi này ta chuyển sang hướng phân tích thứ hai như sau:
+Hướng 2: Ta đi tìm hệ số ẩn phụ thông qua hệ đối xứng loại 2:
Đặt $my+n = \sqrt{4x+1}$. Khi đó ta xét hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} my+n = \sqrt{4x+1} \\ 9x^2 - 26x + \dfrac{37}{3} = \dfrac{2}{3}(my+n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2y^2 + 2mny + n^2 = 4x+1 \\ 9x^2 - 26x + \dfrac{37}{3} = \dfrac{2}{3}(my+n) \end{cases}$$

Ta cần tìm m, n sao cho: $\dfrac{m^2}{9} = \dfrac{2mn}{-26} = \dfrac{4}{\dfrac{2}{3}m} = \dfrac{1-n^2}{\dfrac{2}{3}n - \dfrac{37}{3}}$.
Và thật không may mắn là ta sẽ không tìm được cặp số (m,n) thỏa hệ thức này, điều này linh cảm cho ta thấy được phương trình này không thể đưa về hệ đối xứng. Vậy, câu hỏi đặt ra liệu có phải chăng phương trình này chỉ được đưa về hệ gần đối xứng? Muốn trả lời được câu hỏi này thì ta phải tìm cách tìm bộ số (m,n) thỏa mãn hệ thức đã cho như thế nào đây? Ta bắt đầu đi tìm câu trả lời như sau:
Bây giờ ta hãy xét tới biểu thức tìm m: $\dfrac{m^2}{9} = \dfrac{4}{\dfrac{2}{3}m} \Leftrightarrow m^3 = 54$. Rõ ràng kết quả này không hề có lợi.
Vậy ta cần tạo ra một hệ số α để 54α là lập phương của một số, khi đó $m^3 = (A)^3$ mà: $A = 3^2.6.\alpha$ $\Rightarrow \alpha = \dfrac{1}{2}$

Điều này cũng có nghĩa là $54\alpha = 3^3$ nên lúc đó ta có hệ thức điều chỉnh lại là: $\dfrac{m^2}{9} = \dfrac{4\alpha}{\dfrac{2}{3}m} \Leftrightarrow \dfrac{m^2}{9} = \dfrac{4.\dfrac{1}{2}}{\dfrac{2}{3}m}$
$\Leftrightarrow m = 3$

Nên hệ đang xét cần điều chỉnh như sau: $\begin{cases} m^2y^2 + 2mny + n^2 = 2x+2x+1 \\ 9x^2 - 26x + \dfrac{37}{3} = \dfrac{2}{3}(my+n) \end{cases}$

Mặt khác với $m = 3 \Rightarrow \dfrac{3^2}{9} = \dfrac{2}{3.\dfrac{2}{3}} = 1$ nên ta cần điều chỉnh cho hệ số ở phương trình thứ hai trong hệ như sau: $\begin{cases} m^2y^2 + 2mny + n^2 = 2x+2x+1 \\ 9x^2 - 24x + \dfrac{37}{3} = \dfrac{2}{3}my + 2x + \dfrac{2}{3}n \end{cases}$

Với sự cân bằng ta vừa tạo ra, tiếp theo ta sẽ đi tìm n dựa vào hệ thức sau:
$\dfrac{2mn}{-24} = \dfrac{2}{\dfrac{2}{3}m} \Rightarrow n = -4$

Khi đó ta lại có: $\dfrac{1-n^2}{\dfrac{2}{3}n - \dfrac{37}{3}} = \dfrac{1-(-4)^2}{\dfrac{2}{3}(-4) - \dfrac{37}{3}} = 1$. Điều đó có nghĩa ta đã tìm được $(m,n) = (3;-4)$. Từ

đó dẫn đến cách đặt: $3y-4=\sqrt{4x+1}$ và ta sẽ giải quyết bài toán gọn nhẹ như sau:
-Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{4}$. Đặt: $3y-4=\sqrt{4x+1} \Rightarrow y \geq \frac{4}{3}$. Khi đó kết hợp phép đặt và phương trình đã cho ta có hệ phương trình: $\begin{cases} (3x-4)^2 = 2x+2y+1(1) \\ (3y-4)^2 = 4x+1(2) \end{cases}$
Lấy $(1)-(2)$ vế theo vế ta có được phương trình:

$$(3x-4)^2-(3y-4)^2 = 2(y-x) \Leftrightarrow (x-y)(9x+9y-22)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ y=-x+\frac{22}{9} \end{array}\right.$$

Với $x=y$ thay vào (1) ta có: $9x^2-28x+15=0 \Leftrightarrow x=\frac{14\pm\sqrt{61}}{9}$
Với $y=-x+\frac{22}{9}$ thay vào (1) ta có: $81x^2-216x+91=0 \Leftrightarrow x=\frac{10\pm\sqrt{53}}{9}$.
Đối chiếu điều kiện của cả x, y ta có nghiệm của phương trình:
$x=\frac{14+\sqrt{61}}{9}$; $x=\frac{10-\sqrt{53}}{9}$. ■

-Bình luận. Đây là một bài toán kết thúc trong chuỗi các ví dụ về các phương trình vô tỷ giải bằng cách đưa hệ phương trình đối xứng hoặc gần đối xứng. Tuy nhiên, các bài toán này đều có thể bắt gặp một lối đi khác như chúng tôi đã nói ở trên. Các bạn hãy cố gắng tạo cho mình một thói quen biến đổi dựa vào những hướng đi mà chúng tôi đã nêu ra, tất nhiên các hướng nêu ra không phải là con đường duy nhất để tìm ra lời giải nhưng thiết nghĩ đó là những dấu hiệu đơn giản dễ nhớ và tự nhiên.

Ví dụ 27. Giải phương trình $x^3-2=3\sqrt[3]{3x+2}$.

✍ **Lời giải.**
-Phân tích hướng giải. Bài toán có hình thức khá đơn giản và ta không khó để đưa ra các hướng giải cơ bản có thể nghĩ đến như nâng lũy thừa, đặt ẩn phụ đưa về phương trình hoặc hệ phương trình đối xứng và một số hướng khác. Tuy nhiên, chúng tôi đưa phương trình này, để bắt đầu cho một loạt bài toán dùng tính đơn điệu của hàm số dưới dạng xét hàm số đặc trưng của hàm số để giải một phương trình vô tỷ. Với định hướng giải phương trình vô tỷ theo hướng này cái khó nhất là làm sao biến đổi được về dấu hiệu có thể xét hàm đặc trưng và hàm đặc trưng là một hàm số có "mặt mũi" như thế nào? Để mở đầu các vấn đề đó ta bắt đầu đi phân tích bài toán đang xét. Không khó từ phương trình đã cho ta có thể biến đổi về phương trình:
$x^3+3x=3x+2+\sqrt[3]{3x+2} \Leftrightarrow x^3+3x=\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^3+3\sqrt[3]{3x+2}(1)$
Hình thức phương trình (1) cho ta nghĩ đến xét hàm số đặc trưng: $f(t)=t^3+3t$,
Ta có: $f'(t)=3t^2+3>0$, . Do đó từ (1) ta có: $f(x)=f\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)$. Từ đó ta có lời giải chi tiết như sau:
-Phương trình đã cho được biến đổi về phương trình:
$x^3+3x=3x+2+\sqrt[3]{3x+2} \Leftrightarrow x^3+3x=\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^3+3\sqrt[3]{3x+2}(1)$
Xét hàm số $f(t)=t^3+3t$, . Ta có: $f'(t)=3t^2+3>0$, .
Vậy hàm số $f(t)$ liên tục và luôn đồng biến trên . Do đó từ (1) ta có:

$$f(x)=f\left(\sqrt[3]{3x+2}\right) \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{3x+2} \Leftrightarrow x^3-3x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x=-1$; $x=2$. ■

-Bình luận. Phương trình đã cho không khó để biến đổi về phương trình có dấu hiệu xét hàm đặc trưng. Tuy nhiên, không phải lúc nào ta cũng có thể biến đổi dễ dàng như vậy để đạt được điều ta cần có, mà ta cần có sự phân tích nhất định để đi tìm lối thoát một cách logic nhất. Ví dụ tiếp theo sẽ làm rõ điều đó.

Ví dụ 28. Giải phương trình $8x^3 - 36x^2 + 53x - 25 = \sqrt[3]{3x-5}$.

Lời giải.

-Phân tích hướng giải. Ta quan sát phương trình thấy vế phải phương trình chứa phương trình bậc ba còn vế trái chứa căn bậc ba nên ta nghĩ đến việc nếu có xét hàm số đặc trưng ta sẽ hàm số $f(t) = at^3 + bt$. Vấn đề còn lại là tìm hai hệ số a, b. Trước tiên ta viết vế phải về hình thức:
$a\left(\sqrt[3]{3x-5}\right) + b.\sqrt[3]{3x-5} = \sqrt[3]{3x-5} \Rightarrow b = 1$.
Lúc đó ta viết vế trái của phương trình về hình thức:
$8x^3 - 36x^2 + 53x - 25 = a(mx+n)^3 + (mx+n)$
Bây giờ ta chỉ cần tìm ba hệ số a, m, n sao cho:
$a(mx+n)^3 + (mx+n) = a\left(\sqrt[3]{3x-5}\right)^3 + \sqrt[3]{3x-5}$.

Do $8x^3 = (2x)^3 \Rightarrow am^3 = 8 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1; m = 2 \\ a = 8; m = 1 \end{array}\right.$

Nếu $a = 1; m = 2$ Khi đó ta có: $(2x+n)^3 + (2x+n) = 3x - 5 + \sqrt[3]{3x-5}$
$\Leftrightarrow 8x^3 + 12nx^2 + (6n^2-1)\,x + n^3 + n + 5 = \sqrt[3]{3x-5}(1)$
Kết hợp (1) với phương trình đã cho ta có: $\Leftrightarrow 8x^3 + 12nx^2 + (6n^2-1)\,x + n^3 + n + 5 = 8x^3 - 36x^2 + 53x - 25$

Đồng nhất hệ số ở hai vế của phương trình này ta thu được hệ phương trình: $\begin{cases} 12n = -36 \\ 6n^2 - 1 = 53 \\ n^3 + n + 5 = -25 \end{cases}$

$\Leftrightarrow n = -3$
Điều này có nghĩa là ta sẽ xét hàm số đặc trưng là: $f(t) = t^3 + t$ đồng thời phương trình đã cho được biến đổi: $(2x-3)^3 + (2x-3) = \left(\sqrt[3]{3x-5}\right)^3 + \sqrt[3]{3x-5}$.
Ta đi vào lời giải chi tiết cho bài toán
-Điều kiện:
Phương trình đã cho được biến đổi thành phương trình:
$(2x-3)^3 + (2x-3) = \left(\sqrt[3]{3x-5}\right)^3 + \sqrt[3]{3x-5}(2)$
Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$, . Ta có: $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0$, .
Vậy hàm số $f(t)$ liên tục và luôn đồng biến trên . Do đó từ (2) ta có:
$f(2x-3) = f\left(\sqrt[3]{3x-5}\right) \Leftrightarrow 2x - 3 = \sqrt[3]{3x-5}$
$\Leftrightarrow (2x-3)^2 = 3x - 5 \Leftrightarrow 8x^3 - 36x^2 + 51x - 22 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)\left(8x^2 - 20x + 11\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \dfrac{5 \pm \sqrt{3}}{4}. \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm: $x = 2$; $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{3}}{4}$. ■

-Bình luận. Các bạn sẽ thắc mắc vì sao cặp số $(a;m) = (8;1)$ không được trình bày. Lí do đơn giản vì với cặp số $(a;m) = (1;2)$ ta đã tìm được các hệ số thỏa mãn yêu cầu trong quá trình biến đổi phương trình để xét hàm.

Ví dụ 29. Giải phương trình $x^3 - 6x^2 + 12x - 7 = \sqrt[3]{-x^2 + 9x^2 - 19x + 11}$.

Lời giải.

-Phân tích hướng giải. Cũng như ví dụ trên ta cũng sẽ nghĩ đến việc xét hàm số đặc trưng $f(t) = at^3 + bt$. Ta viết vế phải về hình thức:

$a\left(\sqrt[3]{-x^2+9x^2-19x+11}\right)^3 + b\left(\sqrt[3]{-x^2+9x^2-19x+11}\right) = \sqrt[3]{-x^2+9x^2-19x+11}$

Từ phương trình này ta suy ra $b = 1$. Lúc này ta viết phương trình về hình thức biến đổi:

$a(mx+n)^3 + (mx+n) = a\left(\sqrt[3]{-x^2+9x^2-19x+11}\right)^3 + \sqrt[3]{-x^2+9x^2-19x+11}(1)$

Do hệ số của x^3 là 1 nên ta có: $am^3 = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ m = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 8 \\ m = \dfrac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} a = -1 \\ m = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} a = -8 \\ m = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Với $(a; m) = (1; 1)$ ta có:

$2x^3 + (3n-9)x^2 + (3n^2+20)x + n^3 + n - 11 = \sqrt[3]{-x^2+9x^2-19x+11}$.

Khi đó kết hợp với phương trình đã cho ta cần tìm n sao cho:

$2x^3 + (3x-9)x^2 + (3n^2+20)x + n^3 + n - 11 = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$

Điều này không thể thực hiện được vì hệ số của x^3 ở hai vế đã khác nhau.

Tương tự cho trường hợp cặp số $(a; m) = \left\{\left(8; \dfrac{1}{2}\right); (1; -1); \left(-8; -\dfrac{1}{2}\right)\right\}$ ta cũng không tìm được n.

Vậy ta cần tìm n như thế nào đây? Câu trả lời nằm ở phương trình (1) ta có:

$(1) \Leftrightarrow (am^3+a)x^3 + (3anm^2-9a)x^2 + (3n^2am+m+19a)x + am^3 + n - 11a = \sqrt[3]{-x^3+9x^2-19x+11}$

Kết hợp với phương trình đã cho ta có:

$(am^3+a)x^2 + (3anm^2-9a)x^2 + (3n^2am+m+19a)x + am^3 + n - 11a = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$

Đồng nhất hệ số hai vế phương trình này ta có:

$$\begin{cases} am^3 + a = 1 \\ 3anm^2 - 9a = -6 \\ 3n^2am + m + 19a = 12 \\ an^3 + n - 11a = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ m = 1 \\ n = -1 \end{cases}$$

Khi đó ta sẽ xét hàm số $f(t) = \dfrac{1}{2}t^3 + t$ và phương trình đã cho sẽ được biến đổi thành: $\dfrac{1}{2}(x-1)^3 + (x-1) = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{-x^3+9x^2-19x+11}\right)^3 + \sqrt[3]{-x^3+9x^2-19x+11}$.

Cụ thể ta đi vào lời giải cho bài toán như sau:

-Điều kiện:

Phương trình đã cho được biến đổi như sau:

$\dfrac{1}{2}(x-1)^3 + (x-1) = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{-x^3+9x^2-19x+11}\right)^3 + \sqrt[3]{-x^3+9x^2-19x+11}(*)$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{1}{2}t^3 + t$, . Ta có: $f'(t) = \dfrac{3}{2}t^2 + 1 > 0,$.

Vậy hàm số $f(t)$ liên tục và luôn đồng biến trên . Do đó từ $(*)$ ta có:

$f(x-1) = f\left(\sqrt[3]{-x^3+9x^2-19x+11}\right) \Leftrightarrow (x-1)^3 = -x^3+9x^2-19x+11 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{array}\right.$$

Do đó phương trình có ba nghiệm: $x = 1$; $x = 2$; $x = 3$. ■

Ví dụ 30. Giải phương trình $2x^3 + x^2 - 3x + 1 = 2(3x-1)\sqrt{3x-1}$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích hướng giải. Thoạt nhìn bài toán ta thấy vế trái có bậc là 3, vế phải có bậc là $\frac{3}{2}$ thì có vẻ khó dùng tính đơn điệu để giải quyết bài toán được. Tuy nhiên nếu ta xem $u = \sqrt{3x-1}$ thì lập tức vế phải sẽ trở thành $2u^3$ và như thế thì bài toán có thể giải quyết bằng tính đơn điệu. Việc tìm ra hàm số đặc trưng cho phương trình này là đơn giản. Các bạn độc giải hãy thực hành việc tìm hàm đặc trưng như hai ví dụ mà chúng tôi vừa phân tích ở trên. cụ thể của bài toán như sau:

-Điều kiện: $x \geq \frac{1}{3}$. Phương trình đã cho được biến đổi như sau:

$2x^3 + x^2 = 2\left(\sqrt[3]{3x-1}\right)^3 + \left(\sqrt{3x-1}\right)^2$ (1)

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + t^2$, $t > 0$. Ta có: $f'(t) = 6t^2 + 2t > 0$, $\forall t > 0$

Vậy hàm số $f(t)$ liên tục và luôn đồng biến trong khoảng $(0; +\infty)$. Do đó từ (1) ta có: $f(x) = f\left(\sqrt{3x-1}\right) \Leftrightarrow x = \sqrt{3x-1} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của phương trình là $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. ■

Ví dụ 31. Giải phương trình $7x^2 - 13x + 8 = 2x^2.\sqrt[3]{x\left(1 + 3x - 3x^2\right)}$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích hướng giải. Quan sát thấy vế phải của phương trình có chứa ẩn x ngoài căn nên một lẻ tự nhiên ta nghĩ ngay đến việc xét các trường hợp $x = 0$ và $x \neq 0$.

Với $x = 0$ ta không khó để thấy phương trình đã cho không thỏa.

Với $x \neq 0$ ta chia hai vế phương trình cho x^3 ta thu được phương trình:

$\frac{7}{x} - \frac{13}{x^2} + \frac{8}{x^3} = 2.\sqrt[3]{\frac{1}{x^3} + \frac{3}{x} - 3}(1)$

Ở phương trình (1) để đơn giản hóa hình thức bài toán ta nghĩ ngay đến việc đặt $t = \frac{1}{x}$.

Lúc đó phương trình (1) trở thành: $8t^3 - 13t^2 + 7t = 2\sqrt[3]{t^2 + 3t - 3}(2)$

Phương trình (2) có thể giải được bằng cách đưa về hệ gần đối xứng (các bạn độc giả hãy tìm hiểu xem?)

Bây giờ chúng tôi chọn giải bằng cách sử dụng tính đơn điệu, các bạn độc giả hãy thực hiện việc tìm hàm số đặc trưng như đã phân tích để lấy kinh nghiệm thực hành.

-Không khó để thấy $x = 0$ không thỏa phương trình.

Với $x \neq 0$ ta biến đổi phương trình về phương trình:

$7x^2 - 13x + 8 = 2x^2\sqrt[3]{x^3\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} - 3\right)} \Leftrightarrow \frac{7}{x} - \frac{13}{x^2} + \frac{8}{x^3} = 2\sqrt[3]{\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} - 3}(2)$

Đặt $t = \frac{1}{x}$, $t \neq 0$. Lúc đó (2) trở thành: $8t^3 - 13t^2 + 7t = 2\sqrt[3]{t^2 + 3t - 3}$

$\Leftrightarrow (2t-1)^3 + 2(2t-1) = \left(\sqrt[3]{t^2+3t-3}\right)^3 + 2\sqrt[3]{t^2+3t-3}(3)$

Xét hàm số $f(u) = u^3 + 2u$, . Ta có: $f'(u) = 3u^2 + 2 > 0$,.

Do đó hàm số $f(u)$ luôn đồng biến trên Do đó từ (3) ta có:

$f(2t-1) = f\left(\sqrt[3]{t^2+3t-3}\right) \Leftrightarrow 2t - 1 = \sqrt[3]{t^2+3t-3}$

$\Leftrightarrow (2t-1)^3 = t^2 + 3t - 3 \Leftrightarrow 8t^3 - 13t^2 + 3t + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (t-1)\left(8t^2 - 5t - 2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \frac{5 \pm \sqrt{89}}{16} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{16}{5 \pm \sqrt{89}} \end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của phương trình là: $x = 1$; $x = \frac{16}{5 \pm \sqrt{89}}$. ■

-Bình luận. Bài toán trên là bài toán kết thúc phần phân tích và hướng giải cho lớp bài toán phương trình vô tỷ giải bằng hàm số đặc trưng. Tuy nhiên, ngoài lời giải trên chúng ta vẫn hoàn toàn có thể giải bài toán này bằng cách đặt ẩn phụ và sử dụng hằng đẳng thức. Các bạn chú ý các bài từ ví dụ 21 đến ví dụ 28 nếu chúng ta khéo léo trong tư duy và biến đổi chúng ta có thể giải các bài toán đó theo một trong hai hướng là đưa về hệ hoặc dùng hàm số. Một ghi nhớ quan trọng trước khi chúng ta giải bài cần phải tư duy trước xem liệu bài toán ta đang xét có thể thực hiện, chuyển hóa về hệ hoặc hàm số không? Vì các bài toán này đôi lúc hình thức có thể gần giống như hai hướng đi vừa nhắc đến lại không thể áp dụng được hoặc nếu có thì quá phức tạp. Và đó cũng chính là cái hay của việc tìm ra được tư duy giải toán nói chúng và phương trình vô tỷ nói riêng.

Ví dụ 32. Giải phương trình $2\sqrt{2}\left(\sqrt{x-\frac{1}{2}}+\frac{x+1}{4}\right)=\sqrt{x^2+18x-7}$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích hướng giải. Quan sát bài toán này, thì suy tính thoát căn của phương trình chính là biện pháp ẩn phụ. Tuy nhiên, ở trong bài toán có chứa hai căn thức, một căn là chứa đại lượng bậc nhất và một căn chứa đại lượng bậc hai nên việc đầu tiên ta cần suy tính đến đó là liệu phương trình bậc hai đó có thể kéo theo được căn thức bậc nhất hay không? Câu trả lời có thể thấy ngay được là nếu chỉ dùng đại lượng bậc nhất kéo theo thì khả năng tìm ra hy vọng là mong manh nên ta liên tưởng đến đại lượng không chứa căn thức còn lại xem thế nào?
Do cần biến đổi đại lượng bậc hai nên ta sẽ tìm hệ số thỏa mãn:
$x^2+18x-7=m\left(x-\frac{1}{2}\right)+n\left(\frac{x+1}{4}\right)^2 \Leftrightarrow x^2+18x-7=\frac{n}{16}x^2+\left(m+\frac{n}{8}\right)x+\frac{n}{16}-\frac{m}{2}$

Đồng nhất hệ số ở hai vế phương trình ta thu được: $\begin{cases}\frac{n}{16}=1\\ m+\frac{n}{8}=18\\ \frac{n}{16}-\frac{m}{2}=-7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}n=16\\ m=16\end{cases}$

Lúc đó phương trình đã cho được viết lại là:
$2\sqrt{2}\left(\sqrt{x-\frac{1}{2}}+\frac{x+1}{4}\right)=\sqrt{16\left(x-\frac{1}{2}\right)+16\left(\frac{x+1}{4}\right)^2}$

Đặt: $\begin{cases}a=\sqrt{x-\frac{1}{2}}\\ b=\frac{x+1}{4}\end{cases}$, ta có phương trình: $a+b=\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}$
Tới đây, ta có hai hướng đi.
-Hướng 1: Nâng lũy thừa gặp ngay hằng đẳng thức.
-Hướng 2: Áp dụng bất đẳng thức quen thuộc: $a+b\leq\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}$
Tới đây, ta sẽ đi lời giải chi tiết cho bài toán theo đường hướng ngắn gọn nhất như sau:

-Điều kiện: $\begin{cases}x-\frac{1}{2}\geq 0\\ x^2+18x-7\geq 0\end{cases} \quad (*)$

Phương trình đã cho được biến đổi: $\sqrt{x-\frac{1}{2}}+\frac{x+1}{4}=\sqrt{2\left[\left(\sqrt{x-\frac{1}{2}}\right)^2+\left(\frac{x+1}{4}\right)^2\right]}(1)$

Ta có với mọi số thực a, b luôn có: $a+b\leq\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b$. Do đó từ (1) cho ta:

$$\sqrt{x-\frac{1}{2}}=\frac{x+1}{4} \Leftrightarrow \sqrt{16x-8}=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1\geq 0 \\ x^2-14x+9=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=7\pm 2\sqrt{10}$$

Đối chiếu điều kiện $(*)$ ta có nghiệm của phương trình là: $x=7\pm 2\sqrt{10}$.

-Bình luận. Bài toán này thoạt đầu tiên khi định hướng giải ta nghĩ đến phép đặt ẩn phụ, tuy nhiên trong quá trình phân tích hướng đi ta lại bắt gặp bài toán chỉ cần sử dụng một đánh giá quen thuộc là có thể giải ngắn gọn bài toán. Bổ để được dùng trong bài toán rất yếu trọng nó có xuất phát điểm chính là bất đẳng thức B.C.S. Tuy vậy, ta vẫn có thể chứng minh nó bằng phép biến đổi tương đương bằng cách lũy thừa hai vế. Con đường tư duy của chúng ta đôi lúc nó sẽ dẫn chúng ta về một hướng đi mới bất ngờ hơn và đẹp hơn. Do đó ta đừng ngại tư duy và tìm tòi lời giải cho một bài toán nào đó mà ta phải đối mặt.

Ví dụ 33. Giải phương trình $\sqrt[3]{14-x^3}+x=2\left(1+\sqrt{x^2-2x-1}\right)$.

Lời giải.

-Phân tích hướng giải. Quan sát bài toán, ta thấy việc thoát căn ở phương trình này không thể có cách nào tốt hơn bằng khử liên hợp tách nhân tử. Tuy nhiên để làm được điều đó ta cần đoán trước nghiệm của phương trình. Sử dụng máy tính bấm nghiệm trong vùng cho phép của x thỏa điều kiện $x^2-2x-1\geq 0$ ta sẽ tìm được hai nghiệm $x=2,414213562=1+\sqrt{2}$; $x=-0,4142135624=1-\sqrt{2}$.
Sử dụng định lí vi ét ta có ngay được nhân tử cần tìm là x^2-2x-1
Nhận xét ta có: $(2-x)^3-\left(\sqrt[3]{14-x^3}\right)^3=6\left(x^2-2x-1\right)$.
Tới bước phân tích này, ta đã thấy được nghiệm của phương trình xảy ra ngay tại dấu bằng của điều kiện nên ta có quyền đẩy suy nghĩ liệu từ hiệu hai bậc ba đã có được đánh giá này $x^2-2x-1\leq 0$?
Muốn vậy: $2-x\leq\sqrt[3]{14-x^2}\Leftrightarrow\sqrt[3]{14-x^3}+x\geq 2$.
Điều này lại hoàn toàn xảy ra vì ta có: $2\left(1+\sqrt[3]{x^2-2x-1}\right)=2+2\sqrt[3]{x^2-2x-1}\geq 2$.
Vậy thay vì trình bày bài toán theo hướng liên hợp ta sẽ đẩy lời giải bài toán về hình thức đánh giá gọn nhẹ và đẹp mắt hơn như sau:
-Cách 1: Điều kiện $x^2-2x-1\geq 0$.
Do: $2\left(1+\sqrt[3]{x^2-2x-1}\right)=2+2\sqrt[3]{x^2-2x-1}\geq 2$
Nên từ phương trình ta suy ra: $\sqrt[3]{14-x^3}+x\geq 2\Leftrightarrow 2-x\leq\sqrt[3]{14-x^3}\Leftrightarrow(2-x)^3-\left(14-x^3\right)\leq 0$
$\Leftrightarrow x^2-2x-1\leq 0$
Kết hợp với điều kiện ta có: $x^2-2x-1=0\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{2}$
Vậy nghiệm của phương trình là: $x=1\pm\sqrt{2}$
Tuy vậy, ngoài lời giải liên hợp hoặc như lời giải đã trình bày ta có thể giải bài toán này theo hướng ẩn phụ hóa. Cụ thể ta có lời giải 2 như sau:
-Cách 2: Điều kiện: $x^2-2x-1\geq 0$

Đặt: $\begin{cases} u=2-x \\ v=\sqrt{x^2-2x-2} \end{cases}(v\geq 0)\Rightarrow\sqrt[3]{14-x^3}=\sqrt[3]{u^3-6u^2}$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành: $\sqrt[3]{u^3-6u^2}=u+2v\Leftrightarrow u^3-6v^2=(u+2v)^2$

$$\Leftrightarrow v\left[v^2+3(u+v)^2+3v\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} v=0 \\ \begin{cases} v=0 \\ u=0 \end{cases}\quad\text{do } v\geq 0 \end{array}\right.$$

Với $v=0\Leftrightarrow\sqrt{x^2-2x-2}=0\Leftrightarrow x^2-2x-2=0\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{2}$.

Với $\begin{cases} u=0 \\ v=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x=0 \\ \sqrt{x^2-2x-2}=0 \end{cases}$ (Hệ vô nghiệm)

Vậy phương trình có nghiệm: $x=1\pm\sqrt{2}$. ■

-Bình luận. Bài toán này lại một lần nữa cho ta thấy sự linh hoạt trong định hướng đi tìm lời giải cho một phương trình vô tỷ, có khi ý tưởng ban đầu xuất phát từ những suy nghĩ quen thuộc thường gặp như nâng lũy thừa, ẩn phụ, liên hợp, vv.. lại đẩy cho chúng ta một lối đi mới cũng quen thuộc nhưng khó nhận ra ngay từ đầu và lúc đó chúng ta sẽ có một lời giải mới đẹp hơn và gọn hơn. Ở lời giải 2 ta có cách biểu diễn $\sqrt[3]{14-x^3}$ theo u,v cũng giống như ví dụ 32.

Ví dụ 34. Giải phương trình $\sqrt{x^2-2\sqrt{3}x+51}+\sqrt{x^2+4\sqrt{3}x+87}=3\sqrt{30}$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích hướng giải. Quan sát phương trình ta thấy muốn thoát căn thức của phương trình ta chỉ có thể nghĩ các hướng nâng lũy thừa và đặt ẩn phụ. Tuy vậy, nếu nâng lũy thừa ta sẽ gặp phương trình bậc bốn có thể sẽ gây khó khăn cho chúng ta do hình thức phương trình (cố gắng thì có thể chúng ta vẫn tới đích được), còn nếu đặt ẩn phụ thì ta sẽ chọn ẩn phụ thế nào đây khi mà cả hai đại lượng trong căn bậc hai chẳng có liên quan gì đến nhau. Vậy ta thoát căn thức bài toán này bằng cách nào?

Nhận xét rằng ta có: $x^2-2\sqrt{3}x+51>0$; $x^2+4\sqrt{3}x+87>0$.

Do đó theo suy nghĩ tự nhiên ta sẽ tách hai đại lượng này về hình thức: $(ax\pm b)^2+k$.

Cụ thể ta có: $x^2-2\sqrt{3}x+51=\left(x-\sqrt{3}\right)^2+48=\left(x-\sqrt{3}\right)^2+\left(4\sqrt{3}\right)^2$

$x^2+4\sqrt{3}x+87=\left(x+2\sqrt{3}\right)^2+75=\left(x+2\sqrt{3}\right)^2+\left(5\sqrt{3}\right)^2$.

Khi đó phương trình đã cho sẽ được biến đổi thành phương trình sau:

$\sqrt{\left(x-\sqrt{3}\right)^2+\left(4\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(x+2\sqrt{3}\right)^2+\left(5\sqrt{3}\right)^2}=3\sqrt{30}(1)$

Mỗi căn thức ở vế trái của phương trình (1) gợi cho hình ảnh công thức của độ dài một véc tơ.

Thật vậy nếu ta có: $\overrightarrow{u}=(x;y)\Rightarrow|\overrightarrow{u}|=\sqrt{x^2+y^2}$

Vậy ta sẽ xét hai véc tơ: $\overrightarrow{u}=\left(x-\sqrt{3};4\sqrt{3}\right)$, $\overrightarrow{v}=\left(x+2\sqrt{3};5\sqrt{3}\right)$.

Khi đó ta có: $|\overrightarrow{u}|=\sqrt{\left(x-\sqrt{3}\right)^2+\left(4\sqrt{3}\right)^2}$; $|\overrightarrow{v}|=\sqrt{\left(x+2\sqrt{3}\right)^2+\left(5\sqrt{3}\right)^2}$

Tới đây, ta áp dụng bất đẳng thức véc tơ sau đây: $|\overrightarrow{u}|+|\overrightarrow{v}|\geq|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}|$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}$ cùng phương.

Nhưng chúng ta thấy bên vế phải của phương trình (1) không còn chứa biến x do đó ta cần $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ phải không còn chứa x và có độ dài bằng vế phải của phương trình (1) . Muốn vậy, ta cần điều chỉnh lại hai vec tơ như sau:

-Trường hợp 1:

$\overrightarrow{u}=\left(-x+\sqrt{3};4\sqrt{3}\right)$; $\overrightarrow{v}=\left(x+2\sqrt{3};5\sqrt{3}\right)\Rightarrow\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\left(3\sqrt{3};9\sqrt{3}\right)\Rightarrow|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}|=3\sqrt{30}$

-Trường hợp 2:

$\overrightarrow{u}=\left(x-\sqrt{3};4\sqrt{3}\right)$; $\overrightarrow{v}=\left(-x-2\sqrt{3};5\sqrt{3}\right)\Rightarrow\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\left(-3\sqrt{3};9\sqrt{3}\right)\Rightarrow|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}|=3\sqrt{30}$.

Vậy ta có hai trường hợp thỏa mãn. Do đó ta đi vào lời giải chi tiết sau:

+Phương trình đã cho được biến đổi thành phương trình:

$\sqrt{\left(x-\sqrt{3}\right)^2+\left(4\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(x+2\sqrt{3}\right)^2+\left(5\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{30}(*)$

Xét các vec tơ:

$\overrightarrow{u}=\left(-x+\sqrt{3};4\sqrt{3}\right)$; $\overrightarrow{v}=\left(x+2\sqrt{3};5\sqrt{3}\right)\Rightarrow\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\left(3\sqrt{3};9\sqrt{3}\right)\Rightarrow|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}|=3\sqrt{30}$

Khi đó phương trình $(*)$ trở thành: $|\overrightarrow{u}|+|\overrightarrow{v}|=|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}|$.

Ta lại có: $|\overrightarrow{u}|+|\overrightarrow{v}|\geq|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}|$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}$ cùng phương.

Từ đó ta có: $5\sqrt{3}\left(-x+\sqrt{3}\right)=4\sqrt{3}\left(x+2\sqrt{3}\right)\Leftrightarrow x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ■

-Bình luận. Hướng đi trong bài toán chính là hướng giải phương trình vô tỷ bằng bất đẳng thức hình học, hướng giải của phương pháp này cần độ khéo léo trong biến đổi véc tơ và chọn véc tơ thích hợp để dấu bằng bất đẳng thức xảy ra và nghiệm đúng phương trình đã cho.

Ví dụ 35. Giải phương trình $\sqrt[4]{3(x+5)} - \sqrt[4]{11-x} = \sqrt[4]{13+x} - \sqrt[4]{3(3-x)}$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích hướng giải. Quan sát phương trình ta nhận thấy muốn thoát căn phương trình này thì ta không thể dùng phép nâng lũy thừa được vì các căn thức đều là căn bậc cao. Vì vậy, đường hướng thoát căn hiệu quả trong lúc này chính là đặt ẩn phụ. Có hai hướng đặt ẩn phụ.
-Hướng 1: Đặt 4 ẩn phụ cho tất cả các đại lượng có trong bài toán.
Phương trình đã cho ta sẽ biến đổi phương trình về phương trình.
$\sqrt[4]{3(x+5)} + \sqrt[4]{3(3-x)} = \sqrt[4]{13+x} + \sqrt[4]{11-x}(1)$
Đặt: $a = \sqrt[4]{3(x+5)}$; $b = \sqrt[4]{3(3-x)}$; $c = \sqrt[4]{13+x}$; $d = \sqrt[4]{11-x}$, $(a,b,c,d \geq 0)$

Khi đó (1) trở thành: $\begin{cases} a+b=c+d \\ a^4+b^4=c^4+d^4 \end{cases} \quad (*)$

Sử dụng hằng đẳng thức: $(m+n)^4 = m^4 + 4m^3n + 6m^2n^2 + 4mn^3 + n^4$.
Ta có: $a^4+b^4=c^4+d^4 \Leftrightarrow (a+b)^4 - 2ab\left(2a^2+3ab+2b^2\right) = (c+d)^4 - 2cd\left(2c^2+3cd+2d^2\right)$
$\Rightarrow ab\left[2(a+b)^2 - ab\right] = cd\left[2(c+d)^2 - cd\right]$
$\Rightarrow (ab-cd)\left[(a+b)^2 - ab + (c+d)^2 - cd\right] = 0(2)$
Có được tất cả các phép biến đổi đó là nhờ sử dụng $a+b=c+d$.
Tới đây ta chú ý rằng: $(a+b)^2 \geq 4ab \geq ab$; $(c+d)^2 \geq 4cd \geq cd$.

Do đó ta có (2) tương đương với: $\left[\begin{array}{l} ab=cd \\ \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow ab=cd$ vì $\begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$ vô nghiệm

Tới đây ta có thể giải quyết trọn vẹn bài toán như sau:
+Cách 1: Điều kiện: $-5 \leq x \leq 3$.
Đặt: $a = \sqrt[4]{3(x+5)}$; $b = \sqrt[4]{3(3-x)}$; $c = \sqrt[4]{13+x}$; $d = \sqrt[4]{11-x}$, $(a,b,c,d \geq 0)$
Từ điều kiện đặt ẩn phụ ta có: $a^4+b^4=c^4+d^4$.

Kết hợp điều này với phương trình đã cho ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a+b=c+d \\ a^4+b^4=c^4+d^4 \end{cases}$

Từ: $a^4+b^4=c^4+d^4$
$\Leftrightarrow (a+b)^4 - 2ab\left(2a^2+3ab+2b^2\right) = (c+d)^4 - 2cd\left(2c^2+3cd+2d^2\right)$
$\Rightarrow ab\left[2(a+b)^2 - ab\right] = cd\left[2(c+d)^2 - cd\right]$
$\Rightarrow (ab-cd)\left[(a+b)^2 - ab + (c+d)^2 - cd\right] = 0(2)$
Ta luôn có: $(a+b)^2 \geq 4ab \geq ab$; $(c+d)^2 \geq 4cd \geq cd$.

Do đó từ (2) ta có: $\left[\begin{array}{l} ab = cd \\ \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow ab = cd$ vì $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$ vô nghiệm.

Với $ab = cd \Leftrightarrow \sqrt[4]{9(x+5)(3-x)} = \sqrt[4]{(13+x)(11-x)}$

$\Leftrightarrow -9x^2 - 18x + 135 = -x^2 + 2x + 143 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Kiểm tra lại ta thấy phương trình có nghiệm duy nhất $x = -1$.

-Hướng 2: Đặt hai ẩn phụ do có nhận thấy $(13+x) + (11-x) = 24$ hoặc $(3x+15) + (9-3x) = 24$.

Đặt: $\begin{cases} a = \sqrt[4]{15+3x} \\ b = \sqrt[4]{9-3x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 = 15+3x \\ b^4 = 9-3x \end{cases} \Rightarrow a^4 + b^4 = 24$

Ta để ý rằng: $x + 13 = \dfrac{1}{3}\left[2(15+3x) + 9 - 3x\right] = \dfrac{2a^4 + b^4}{3}$

$11 - x = \dfrac{1}{3}\left[15 + 3x + 2(9-3x)\right] = \dfrac{a^4 + 2b^4}{3}$

Kết hợp với phương trình ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a^4 + b^4 = 24 \\ a + b = \sqrt[4]{\dfrac{2a^2 + b^4}{3}} + \sqrt[4]{\dfrac{a^4 + 2b^4}{3}} \end{cases}$$

Hệ này giải trực tiếp rất không khả thi với các biến đổi đại số thông thường nên thử tìm tòi một hướng đi khác xem sao?

Bắt đầu từ nhận xét:$2a^4 + b^4 = a^4 + a^4 + b^4$; $a^4 + 2b^4 = a^4 + b^4 + b^4$

Ta liên tưởng đến một bất đẳng thức cơ bản rất quen thuộc:

$m^2 + n^2 + p^2 \geq \dfrac{1}{3}(m+n+p)^2$.

Từ đó: $a^4 + a^4 + b^4 \geq \dfrac{1}{3}(a^2 + b^2 + b^2)^2 \geq \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{1}{3}(a+a+b)^2\right]^2 = \dfrac{1}{27}(2a+b)^4$

Hay: $\dfrac{2a^4 + b^4}{3} \geq \dfrac{1}{81}(2a+b)^4 \Leftrightarrow \sqrt[4]{\dfrac{2a^4 + b^4}{3}} \geq \dfrac{1}{3}(2a+b)$

Đánh giá tương tự ta có: $\sqrt[4]{\dfrac{a^4 + 2b^4}{3}} \geq \dfrac{1}{3}(a+2b)$

Từ đó ta có: $\sqrt[4]{\dfrac{2a^4 + b^4}{3}} + \sqrt[4]{\dfrac{a^4 + 2b^4}{3}} \geq a + b$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$. Và tới đây bài toán được giải quyết, do đó ta có lời giải thứ hai như sau:

+Cách 2: Điều kiện: $-5 \leq x \leq 3$.

Đặt: $\begin{cases} a = \sqrt[4]{15+3x} \\ b = \sqrt[4]{9-3x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 = 15+3x \\ b^4 = 9-3x \end{cases} \Rightarrow a^4 + b^4 = 24$, $(a, b \geq 0)$.

Ta có: $x + 13 = \dfrac{1}{3}\left[2(15+3x) + 9 - 3x\right] = \dfrac{2a^4 + b^4}{3}$

$11 - x = \dfrac{1}{3}\left[15 + 3x + 2(9-3x)\right] = \dfrac{a^4 + 2b^4}{3}$

Kết hợp từ điều kiện và phương trình đã cho ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a^4+b^4=24 \\ a+b=\sqrt[4]{\dfrac{2a^2+b^4}{3}}+\sqrt[4]{\dfrac{a^4+2b^4}{3}} \end{cases}$$

Ta có với mọi số thực m, n, p ta luôn có: $m^2+n^2+p^2 \geq \dfrac{1}{3}(m+n+p)^2$

Thật vậy ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức:

$3\left(m^2+n^2+p^2\right) \geq (m+n+p)^2 \Leftrightarrow 2\left(m^2+n^2+p^2\right)-2\left(mn+np+mp\right) \geq 0$

$\Leftrightarrow (m-n)^2+(n-p)^2+(p-m)^2 \geq 0$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $m=n=p$

Áp dụng bất đẳng thức này ta có:

$\dfrac{2a^4+b^4}{3}=\dfrac{a^4+a^4+b^4}{3} \geq \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{3}(a^2+a^2+b^2)^2 \geq \dfrac{1}{9}\left[\dfrac{1}{3}(a+a+b)^2\right]^2=\dfrac{1}{81}(2a+b)^4$

Hay ta có: $\sqrt[4]{\dfrac{2a^4+b^4}{3}} \geq \dfrac{1}{3}(2a+b)$.

Thiết lập tương tự ta có: $\sqrt[4]{\dfrac{a^4+2b^4}{3}} \geq \dfrac{1}{3}(a+2b)$

Từ đó ta có: $\sqrt[4]{\dfrac{2a^4+b^4}{3}}+\sqrt[4]{\dfrac{a^4+2b^4}{3}} \geq a+b$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $a=b$.

Khi đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a^4+b^4=24 \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=2\sqrt{3} \\ b^2=2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{15+3x}=2\sqrt{3} \\ \sqrt{9-3x}=2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow x=-1.$$

Vậy phương trình có một nghiệm duy nhất $x=-1$.

Bây giờ ta sẽ nhìn bài toán với một cách nhìn khác ngoài ẩn phụ xem bài toán có thể đi theo hướng giải quyết nào nữa không?

Ta quan sát phương trình và để ý thấy rằng:

$13+x=15+(x-2)\,;\;11-x=9-(x-2)$

Khi đó ta biến đổi phương trình đã cho trở thành phương trình:

$\sqrt[4]{15+3x}+\sqrt[4]{9-3x}=\sqrt[4]{15+(x-2)}+\sqrt[4]{9-(x-2)}(3)$

Qua hình thức của phương trình (3) ta thấy ngay bài toán có thể sử dụng phương pháp hàm số đặc trưng để giải quyết bài toán. Từ đó ta đưa ra một lời giải khác cho bài toán như sau:

+Cách 3: Điều kiện: $-5 \leq x \leq 3$.

Phương trình đã cho được biến đổi về phương trình sau:

$\sqrt[4]{15+3x}+\sqrt[4]{9-3x}=\sqrt[4]{15+(x-2)}+\sqrt[4]{9-(x-2)}(3)$

Xét hàm số $f(t)=\sqrt[4]{15+t}+\sqrt[4]{9-t},\,\forall t\in[-15;9]$

Ta có: $f'(t)=\dfrac{1}{\left(\sqrt[4]{15+t}\right)^3}-\dfrac{1}{\left(\sqrt[4]{9-t}\right)^3},\ f'(t)=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\left(\sqrt[4]{15+t}\right)^3}=\dfrac{1}{\left(\sqrt[4]{9-t}\right)^3} \Leftrightarrow t=-3.$

Khi đó ta có: $f'(t)\leq 0,\,\forall t\in[-15;-3]$, $f'(t)\geq 0,\,\forall t\in[-3;9]$

Mặt khác: $3x$, x $-2\in[-15;-3]$ khi $x\in[-5;-1]$, $3x, x-2\in[-3;9]$ khi $x\in[-1;3]$

Từ đó từ (3) ta có: $f\left(3x\right)=f\left(x-2\right) \Leftrightarrow 3x=x-2 \Leftrightarrow x=-1$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=-1$.

-Chú ý: Ta có thể biến đổi phương trình về phương trình:

$\sqrt[4]{12+3\left(x+1\right)}+\sqrt[4]{12-3\left(x+1\right)}=\sqrt[4]{12+(x+1)}+\sqrt[4]{12-(x+1)}$

Và từ đó dẫn đến xét hàm số đặc trưng: $f(t)=\sqrt[4]{12+t}+\sqrt[4]{12-t}$ ■

-Bình luận. Đây là một phương trình vô tỷ có hình thức đẹp, lời giải cho bài toán cũng có những điểm thú vị và thường có thể gặp trong phương trình vô tỷ. Ở hai cách đặt ẩn phụ thì thông qua cách 1 chúng ta thấy có đôi lúc sử dụng hằng đẳng thức khéo cũng có thể giải quyết được bài toán phương trình vô tỷ và ý tưởng này cũng thường được dùng để giải phương trình vô tỷ. Ở cách hai thì chúng ta có sử dụng một bổ đề thông qua bất đẳng thức cơ bản quen thuộc, điều này cũng có khi xuất hiện tự nhiên trong lúc ta không thể biến đổi trực tiếp đại số vì sẽ gặp những khó khăn nhất định và trong bài toán có sự xuất hiện dấu hiệu để sử dụng các bất đẳng thức quen thuộc. Ở cách 3 thì phương hướng đi đã quen thuộc và không khó để có thể nhận thấy hàm số đặc trưng, tuy nhiên trong cách 3 nó có sự khó khăn riêng nếu ta không quen với việc chia khoảng (đoạn) để thấy rõ tính đơn diệu. Đặc biệt hình thức bài toán và dấu hiệu chỉ có nghiệm duy nhất hay đưa chúng ta về việc suy nghĩ dùng phương pháp liên hợp nhưng rõ ràng phương pháp này hoàn toàn thất bại trong phương trình này vì quá khó khăn.

Ví dụ 36. Giải phương trình $\sqrt{x+2}+\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{3x-5}=2\sqrt[5]{3x+26}$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích hướng giải. Bài toán này về hình thức thật sự ấn tượng bởi bậc của các căn thức. Cũng chính sự đặc biệt này nên để giải quyết bài toán này chúng ta không cần tính đến vệc phải thoát căn thế nào là hiệu quả. Với hình thức phương trình này, ta sẽ có bước đầu tìm nghiệm của phương trình bằng máy tính và có nghiệm duy nhất là $x=2$. Và có lẻ con đường có thể giải quyết tốt bài toán này là dùng tính đơn điệu của hàm số để giải. Do đó ta sẽ không phân tích sâu các bước giải mà trực tiếp vào lời giải cho bài toán như sau:

+Điều kiện: $x \geq \dfrac{5}{3}$.

Phương trình đã cho được biến đổi về phương trình sau:

$\sqrt{x+2}+\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{3x-5}-2\sqrt[5]{3x+26}=0$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x+2}+\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{3x-5}-2\sqrt[5]{3x+26}, \forall x \geq \dfrac{5}{3}$.

Ta có: $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}+\dfrac{3}{4\sqrt[4]{(3x-5)^3}}-\dfrac{6}{5\sqrt[5]{(3x+26)^4}}$

Tới đây ta sẽ tìm cách đánh giá cho $f'(x)$.

Quan sát thấy giữa hai đại lượng $3x+26$ và $x+2$ liên quan đến nhau và về bậc căn thức ta cũng thấy dễ kết hợp hơn nên ta sẽ xét hiệu sau:

$A=\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}-\dfrac{6}{5\sqrt[5]{(3x+26)^4}}$

Để xét dấu biểu thức A thì ta cần chuẩn quy về một căn thức để có thể tiện lợi so sánh và vì trong biểu thức A chứa căn bậc hai và căn bậc năm nên ta sẽ chuẩn quy về căn bậc mười. Do đó ta biến đổi như sau:

$A=\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}-\dfrac{6}{5\sqrt[5]{(3x+26)^4}}=\dfrac{\sqrt[10]{5^{10}(3x+26)^8}-\sqrt[10]{12^{10}(x+2)^5}}{10\sqrt{x+2}.\sqrt[5]{(3x+26)^4}}$

Vậy để xét dấu của A ta chỉ cần xét dấu của hiệu: $\sqrt[10]{5^{10}(3x+26)^8}-\sqrt[10]{12^{10}(x+2)^5}$

Ta có:$x \geq \dfrac{5}{3} \Rightarrow 3x+26 \geq 31$.

Lại có: $5^{10}(3x+26)^8=5^{10}(3x+26)^5.(3x+26)^3 \geq 5^{10}(3x+26)^5 31^3$

Từ đó ta có: $5^{10}(3x+26)^8 \geq 5^{10}3^5(x+12)^5 31^3 \geq 5^{10}3^5(x+2)^5 31^3 > 12^{10}(x+2)^5$

Do đó : $A>0 \Rightarrow f'(x)>0$. Vậy hàm số $f(x)$ liên tục và luôn đồng biến với $x \in \left[\dfrac{5}{3};+\infty\right)$. Mặt khác ta có $f(2)=0$ nên phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$. ■

-Bình luận. Đây là một bài toán hay, tuy đường lối giải quyết có sự hạn chế do đặc điểm đặc biệt của hình thức phương trình nhưng rõ ràng để giải trọn vẹn bài toán thì chúng ta sẽ không có những đánh giá nhàm chán quen thuộc mà lồng vào đó có những đánh giá khéo léo và thú vị.

Ví dụ 37. Giải phương trình $2\left(x^2+x-1\right)^2+2\left(x^2+x\right)=3+\sqrt{4x+5}$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích hướng giải. Quan sát bài toán này dùng máy tính ta bấm được nghiệm duy nhất $x=1$, ta thấy bài toán chỉ chứa một căn thức nên rõ ràng theo hướng suy nghĩ thoát căn thức của phương trình ta sẽ ẩn phụ hóa cho căn thức.

Cụ thể ta đặt $t = \sqrt{4x+5} \Rightarrow x = \dfrac{t^2-5}{4}$. Khi đó phương trình đã cho trở thành phương trình:

$2\left[\left(\dfrac{t^2-5}{4}\right)^2 + \dfrac{t^2-5}{4} - 1\right]^2 + 2\left[\left(\dfrac{t^2-5}{4}\right)^2 + \dfrac{t^2-5}{4}\right] = 3 + t(1)$

Phương trình (1) là phương trình bậc 8 đối với t thì cho dù biết trước nghiệm của $t = 3$ đi chăng nữa thì thật sự để giải nó là cả một sự liều lĩnh không cần thiết đến lúc này. Vậy ta không thể ẩn phụ hóa bài toán để thoát căn nên ta cần phải định liệu lại hướng đi khác cho bài toán.

Một điều dễ gây nhiễu cho cách nhìn của bài toán này chính là cách sắp xếp phương trình khá độc đáo. Thật vậy, bằng phép biến đổi đưa nhân tử ta có thể đưa phương trình về phương trình đẹp mắt sau:

$2\left(x^2+x-1\right)^2 + 2\left(x^2+x-1\right) = 1 + \sqrt{4x-5}(2)$

Tới phép biến đổi này ở vế trái của phương trình (2) và suy nghĩ nghiệm duy nhất dễ gây ra cho chúng ta ấn tượng là bài toán có thể giải theo hướng phương pháp hàm số bằng cách chọn một hàm số đặc trưng. Điều này là không thể vì vế phải của (2) không cho phép tạo được một dáng điệu giống vế trái. Vậy hai hướng đi xem chừng như có thể giải quyết bài toán lại cho chúng ta vào đường cụt. Tuy nhiên cái thú vị ở bài toán này vẫn còn, cụ thể ta sẽ khai triển bình phương có trong bài toán ta vẫn thu được một phương trình đẹp mắt tiếp theo như sau: $2\left[\left(x^2+x\right)-1\right]^2 + 2\left(x^2+x\right) = 3 + \sqrt{4x+5}$

$\Leftrightarrow 2\left(x^2+x\right)^2 - 2\left(x^2+x\right) = 1 + \sqrt{4x+5}(3)$

Phương trình (3) cũng gây được một ấn tượng về hướng giải giống phương trình (2) và kết quả không khả thi của hai phương trình là như nhau.

Tới đây, xem như ta chưa tìm được lối thoát của phương trình, vậy bây giờ ta bắt buộc phải tính đến việc bắt nhân tử $(x-1)$ bằng phương pháp liên hợp.

Muốn vậy ta xử lí căn thức như các ví dụ trên đã đề cập thì ta có hai hướng tách như sau:

+Hướng 1: $\sqrt{4x+5} + 3 = \dfrac{4(x-1)}{\sqrt{4x+5}-3}$

+Hướng 2: $3 - \sqrt{4x+5} = \dfrac{4(1-x)}{3+\sqrt{4x+5}}$

Rõ ràng kết quả hướng hai cho phép ta sử dụng tốt nhất vì đơn giản là $3 + \sqrt{4x+5} > 0$

Do đó ta biến đổi phương trình đã cho về phương trình:

$2\left(x^2+x\right)^2 - 2\left(x^2+x\right) - 3 - 1 + 3 - \sqrt{4x+5} = 0$

$\Leftrightarrow 2\left[\left(x^2+x\right)^2 - \left(x^2+x\right) - 2\right] + 3 - \sqrt{4x+5} = 0$

$\Leftrightarrow 2\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+x-2\right) + \dfrac{4(1-x)}{3+\sqrt{4x+5}} = 0$

Tới đây bài toán xem như được giải quyết. Bây giờ sẽ đi vào lời giải cụ thể hơn.

Điều kiện: $x \geq -\dfrac{5}{4}$.

Phương trình đã cho được biến đổi thành phương trình:

$2\left(x^2+x\right)^2 - 2\left(x^2+x\right) = 1 + \sqrt{4x+5}$

$\Leftrightarrow 2\left(x^2+x\right)^2 - 2\left(x^2+x\right) - 3 - 1 + 3 - \sqrt{4x+5} = 0$

$\Leftrightarrow 2\left[\left(x^2+x\right)^2 - \left(x^2+x\right) - 2\right] + 3 - \sqrt{4x+5} = 0$

$\Leftrightarrow 2\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+x-2\right) + \dfrac{4(1-x)}{3+\sqrt{4x+5}} = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left[(x+2)\left(x^2+x+1\right) - \dfrac{2}{\sqrt{4x+5}+3}\right] = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ (x+2)\left(x^2+x+1\right) - \dfrac{2}{\sqrt{4x+5}+3} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ (x+1)^3 + 1 - \dfrac{2}{3+\sqrt{4x+5}} = 0 \end{array}\right.$$

Ta có: $(x+1)^3+1-\dfrac{2}{\sqrt{4x+5}+3}>0,\ \forall x\geq -\dfrac{5}{4}$.

Thật vậy ta có $\forall x\geq -\dfrac{5}{4}$. thì $\begin{cases}(x+1)^3+1\geq -\dfrac{1}{64}+1>\dfrac{2}{3}\\ \dfrac{2}{\sqrt{4x+5}+3}\leq\dfrac{5}{3}.\end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$. ■

-Bình luận. Qua lời giải chính thức của bài toán các bạn độc giả sẽ có cảm nhận là phương trình vô tỷ này cách tiếp cận là đưa ra hướng giải cũng rất quen thuộc nhưng vì sao chúng tôi không đi vào trực tiếp phân tích ngay lời giải theo hướng liên hợp? Câu trả lời của chúng tôi chính là do cách sắp xếp hình thức phương trình khá độc đáo và đại lượng căn thức chỉ có một nên sẽ dễ gây tác động "ảo" cho người giải về định hướng tư duy giải bài toán này. Đó chính là mục đích chính của chương này để giúp cho cách nhìn tư duy giải một bài toán theo hướng hoàn thiện hơn và mở ra nhiều sự suy nghĩ hơn logic cũng như chưa logic khi đứng trước một lời giải cho bài toán phương trình vô tỷ. Chú ý rằng bài toán sẽ vẫn giải quyết tốt nếu ta biến đổi phương trình đã cho về phương trình (2) và nếu áp dụng liên hợp dưới hình thức $\sqrt{4x+5}+3=\dfrac{4(x-1)}{\sqrt{4x+5}-3}$ sẽ dễ sai lầm nếu không có điều kiện $\sqrt{4x+5}-3\neq 0$

Ví dụ 38. Giải phương trình $(2-x)\sqrt{1-x}+(4x-2)\sqrt{1+x}=3x\sqrt{x}$.

✍ Lời giải.

-Phân tích hướng giải. Quan sát bài toán ta thấy có sự xuất hiện cả ba căn thức nên ta cần giảm đi số lượng căn thức càng ít càng tốt. Đặc biệt vế phải của phương trình cí chứa đơn biến x ngoài căn và không có hệ số nào nên suy nghĩ tự nhiên đó là kiểm tra phương trình với $x=0$.

Cụ thể thấy ngay $x=0$ thỏa phương trình đã cho. Lúc đó ta sẽ xét $x\neq 0$ và kết hợp với những điều kiện có trong bài toán thì ta sẽ chia hai vế phương trình $x\sqrt{x}$ và phân phối hợp lí ta thu được phương trình sau:

$\left(\dfrac{2-x}{x}\right).\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}+\left(\dfrac{4-2x}{x}\right).\dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}}=3\Leftrightarrow\left(\dfrac{2}{x}-1\right)\sqrt{\dfrac{1}{x}-1}+\left(4-\dfrac{2}{x}\right)\sqrt{\dfrac{1}{x}+1}=3(1)$

Phương trình (1) so với phương trình đã cho đã có số lượng căn thức ít hơn và hình thức cũng gọn gàng hơn, đường lối tư duy đi cũng theo đó sẽ thoáng hơn rất nhiều. Thật vậy, không quá khó nghĩ với phương trình này thì có vẻ ý tưởng đưa đến đầu tiên chính là đặt ẩn phụ và biểu diễn các đại lượng còn lại theo ẩn phụ mới để thu được phương trình (thường là phương trình đẳng cấp có hệ số tự do bằng 0 hoặc phương trình đẳng cấp có thể đưa về dạng $A^3=B^3$) hoặc hệ phương trình (thường là giải hệ bằng phương pháp thế hoặc đối xứng, đẳng cấp). Chính vì lí do đó ta thử với hai lối tư duy ẩn phụ đó là đặt 2 ẩn phụ hoặc 1 ẩn phụ.

-Hướng 1: Đặt hai ẩn phụ.

Đặt: $\begin{cases}u=\sqrt{\dfrac{1}{x}-1}\\ v=\sqrt{\dfrac{1}{x}+1}\end{cases}\Rightarrow v^2-u^2=2.$

Ta sẽ biểu diễn hai đại lượng $\dfrac{2}{x}-1;\ 4-\dfrac{2}{x}$ thông qua hai ẩn phụ bằng cách tìm cặp số $(m;n)$ sao cho:

$$\frac{2}{x}-1=m\left(\frac{1}{x}-1\right)+n\left(\frac{1}{x}+1\right)\Rightarrow\begin{cases}m+n=2\\ -m+n=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\dfrac{3}{2}\\ n=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$4-\frac{2}{x}=m\left(\frac{1}{x}-1\right)+n\left(\frac{1}{x}+1\right)\Rightarrow\begin{cases}m+n=-2\\ -m+n=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-3\\ n=1\end{cases}$$

Khi đó (1) trở thành:

$$\left(\frac{3}{2}u^2+\frac{1}{2}v^2\right)u+\left(-3u^2+v^2\right)v=3 \Leftrightarrow \left(3u^2+v^2\right)u+2\left(-3u^2+v^2\right)v=6(2)$$

Từ (2) kết hợp với các hệ số tìm được ta thấy ngay được phương trình (2) ta không thể nào đưa về phương trình đẳng cấp có hệ số tự do bằng 0 hoặc phương trình đẳng cấp có thể đưa về dạng $A^3=B^3$. Do đó ta buộc phải đưa về hệ phương trình bằng cách kết hợp (2) và điều kiện.

Cụ thể ta có hệ phương trình: $\begin{cases} v^2-u^2=2 \\ 3u^3-6u^2v+uv^2+2v^3=6 \end{cases} \quad (*)$

Hệ $(*)$ là một hệ phương trình chứa 2 phương trình đẳng cấp nhưng có bậc ở 2 phương trình trong hệ lệch nhau nên ta không thể sử dụng cách giải hệ đẳng cấp thông thường để giải quyết, do đó để giải hệ phương trình $(*)$ ta cần tìm hiểu thật kỷ càng trước khi đưa ra một hướng giải quyết nhất định. Quan sát các hệ số $3;-6;1;2$ ta có $3+(-6)+1+2=0$ nên phương trình $3u^3-6u^2v+uv^2+2v^3=0$ phải có một nghiệm $u=v$. Kết hợp với nhận định $v^2-u^2=0$ cũng có một nghiệm $u=v$

Mặt khác khi $u=v$ ta không tìm được x do đó ta có $u\neq v$ nên rõ ràng từ các điều này ta có quyền nghĩ đến biến đổi hai phương trình trong hệ về một phương trình sau: $3u^3-6u^2v+uv^2+2v^3=3\left(v^2-u^2\right)$ $\Leftrightarrow (u-v)\left(3u^2-3uv-2v^2\right)=-3(u-v)(u+v) \Leftrightarrow 3u^2-3uv-2v^2+3u+3v=0$.

Với phương trình vừa biến đổi được ta sẽ có một hệ phương trình mới gọn đẹp hơn như sau: $\begin{cases} v^2-u^2=2 \\ 3u^2-3uv-2v^2 \end{cases}$

Hệ $(*')$ về hình thức nhìn dễ thở hơn và quen thuộc hơn so với hệ $(*)$.

Ta có: $2\left(v^2-u^2-2\right)+\left(3u^2-3uv-2v^2+3u+3v\right)=0 \Leftrightarrow (u-1)(u-3v+4)=0$

Tới đây xem như hướng 1 được giải quyết triệt để, do đó ta đi vào cách giải chi tiết như sau

+Cách 1: Điều kiện: $0\leq x\leq 1$.

Do $x=0$ thỏa phương trình nên ta chỉ cần xét $0<x\leq 1$.

Lúc ta chia hai vế phương trình cho $x\sqrt{x}$ ta được:

$$\left(\frac{2}{x}-1\right)\sqrt{\frac{1}{x}-1}+\left(4-\frac{2}{x}\right)\sqrt{\frac{1}{x}+1}=3$$

Đặt: $\begin{cases} u=\sqrt{\dfrac{1}{x}-1} \\ v=\sqrt{\dfrac{1}{x}+1} \end{cases} \Rightarrow v^2-u^2=2\ ,(u,v\geq 0)$

Lúc đó phương trình đã cho trở thành phương trình:

$$\left(\frac{3}{2}u^2+\frac{1}{2}v^2\right)u+\left(-3u^2+v^2\right)v=3 \Leftrightarrow \left(3u^2+v^2\right)u+2\left(-3u^2+v^2\right)v=6.$$

Kết hợp điều kiện $v^2-u^2=2$, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} v^2-u^2=2 \\ 3u^3-6u^2v+uv^2+2v^3=6 \end{cases}$$

Từ hệ ta có: $3u^3-6u^2v+uv^2+2v^3=3\left(v^2-u^2\right)$

$\Leftrightarrow (u-v)\left(3u^2-3uv-2v^2\right)=-3(u-v)(u+v)$

$\Leftrightarrow 3u^2-3uv-2v^2+3u+3v=0$. Do $u\neq v$

Lúc đó ta có hệ phương trình mới: $\begin{cases} v^2-u^2=2 \\ 3u^2-3uv-2v^2+3u+3v=0 \end{cases}$

Ta có: $2\left(v^2-u^2-2\right)+\left(3u^2-3uv-2v^2+3u+3v\right)=0$

$\Leftrightarrow (u-1)(u-3v+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=1 \\ u=3v-4 \end{array}\right.$

Với $u=1$, ta có $v=\sqrt{3}$ nên ta có: $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{1}{x}-1}=1 \\ \sqrt{\dfrac{1}{x}+1}=\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

Với $u=3v-4$, ta có: $v^2-(3v-4)^2=2 \Leftrightarrow (2v-3)^2=0 \Leftrightarrow v=\dfrac{3}{2} \Rightarrow u=\dfrac{1}{2}$

Nên ta có: $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{1}{x}-1}=\dfrac{1}{2} \\ \sqrt{\dfrac{1}{x}+1}=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{4}{5}$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của phương trình là: $x=0$; $x=\dfrac{1}{2}$; $x=\dfrac{4}{5}$.

-Hướng 2: Trên cơ sở có được của bài toán ta cũng có thể chọn đặt một ẩn phụ.

Đặt: $t=\sqrt{\dfrac{1}{x}-1}$, $t\geq 0$. Ta có: $\dfrac{1}{x}=t^2+1$. Lúc đó phương trình (1) trở thành:

$(2t^2+1)t+(2-2t^2)\sqrt{t^2+2}=3 \Leftrightarrow 2(1-t)(1+t)\sqrt{t^2+2}=-2t^3-t+3$

$\Leftrightarrow 2(1-t)(1+t)\sqrt{t^2+2}=(1-t)(2t^2+2t+3)$

Tới đây xem như hướng 2 đã được giải quyết. Bây giờ ta đi vào lời giải cụ thể:

+Cách 2: Điều kiện: $0\leq x\leq 1$.

Nhận xét $x=0$ thỏa phương trình. Do đó với $0<x\leq 1$ ta chia hai vế phương trình đã cho $x\sqrt{x}$ ta được phương trình:

$\left(\dfrac{2}{x}-1\right)\sqrt{\dfrac{1}{x}-1}+\left(4-\dfrac{2}{x}\right)\sqrt{\dfrac{1}{x}+1}=3(1)$

Đặt: $t=\sqrt{\dfrac{1}{x}-1}$, $t\geq 0$. Ta có: $\dfrac{1}{x}=t^2+1$. Lúc đó phương trình (1) trở thành:

$(2t^2+1)t+(2-2t^2)\sqrt{t^2+2}=3 \Leftrightarrow 2(1-t)(1+t)\sqrt{t^2+2}=-2t^3-t+3$

$\Leftrightarrow 2(1-t)(1+t)\sqrt{t^2+2}=(1-t)(2t^2+2t+3)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-t=0 \\ 2(1+t)\sqrt{t^2+2}=(1+t)^2+t^2+2 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} t=1 \\ \left[\sqrt{t^2+2}-(t+1)^2\right]=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ \sqrt{t^2+2}=t+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của phương trình là $x=0$; $x=\dfrac{1}{2}$; $x=\dfrac{4}{5}$. ■

-Bình luận. Đây là một bài toán khá hay, qua hai cách giải trên ta đáng giá tuy cách giải 1 cho lối đi có vẻ mạnh do đặt hai ẩn phụ nhưng rõ ràng trong lời giải chi tiết ta thấy ngay được mức độ phức tạp lúc giải hệ vì lúc đó ta cần có sự khéo léo trong các biến đổi đại số mớ tìm ra được sự hiệu quả. Còn cách 2 tuy ban đầu nhận định hướng tư duy đi là yếu hơn cách 1 vì chỉ đặt 1 ẩn phụ, tuy vậy đổi ngược lại sự yếu hơn đó thì trong lời giải chi tiết lại mạnh hơn vì chỉ cần bắt nhân tử và ghép hằng đẳng thức. Một sự hoán đổi thú vị mà đối với phương trình vô tỷ ta luôn bắt gặp. Tiếp theo ta tìm hiểu thêm một phương trình cũng rất thú vị.

Ví dụ 39. Giải phương trình $(4x+1)\sqrt{x+2}-(4x-1)\sqrt{x-2}=21$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích hướng giải. Bài toán này có hình thức khá giống như bài toán ở ví dụ 35 nên theo hướng suy nghĩ tự nhiên ta cũng sẽ đặt ẩn phụ để thoát căn:

-Hướng 1: Đặt hai ẩn phụ: Đặt: $\begin{cases} u = \sqrt{x+2} \\ v = \sqrt{x-2} \end{cases} \Rightarrow u^2 + v^2 = 2x;\ u^2 - v^2 = 4.$

Tới đây ta có thể biểu diễn hai đại lượng $4x+1$; $4x-1$ theo u, v như cách phân tích ở ví dụ trên. Ở đây chúng ta sẽ sử dụng các kết quả từ điều kiện thay trực tiếp vào phương trình đã cho ta sẽ có:
$[2(u^2+v^2)+1]u - [2(u^2+v^2)-1]v = 21 \Leftrightarrow 2(u^2+v^2)(u-v) + (u+v) = 21(1)$
Ở (1) ta chú ý đến phép biến đổi sau: $2(u^2+v^2) = (u+v)^2 + (u-v)^2$.
Lại từ điều kiện ta có: $u^2 - v^2 = 4 \Leftrightarrow u - v = \dfrac{4}{u+v}$
Do đó ta có: $2(u^2+v^2) = (u+v)^2 + (u-v)^2 = (u+v)^2 + \dfrac{16}{(u+v)^2}$.
Vậy (1) trở thành phương trình: $\left[(u+v)^2 + \dfrac{16}{(u+v)^2}\right]\dfrac{4}{u+v} + u + v = 21(2)$
Phương trình (2) có gợi ý tiếp cho ta thêm một lần nữa đặt ẩn phụ để giải quyết. Đặt $t = u+v$, $t \geq 2$.
Khi đó phương trình (2) trở thành:
$\left(t^2 + \dfrac{16}{t^2}\right)\dfrac{4}{t} + t = 21 \Leftrightarrow 5t^4 - 21t^3 + 64 = 0.$
Phương trình này có nghiệm $t = 4$ nên ta có: $(t-4)(5t^3 - t^2 - 4t - 16) = 0$
Tới đây ta chú ý rằng phương trình bậc ba theo t có đúng một nghiệm $t \approx 1,73064 \in (1;2)$ là nghiệm bị loại nên ta cần chứng minh phương trình này vô nghiệm dựa vào kiến thức sau:
+Đối với hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ thì đồ thị hàm số cắt trục hoành tại một điểm duy nhất khi và chỉ khi $y_{CD}.y_{CT} > 0$.
+Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và $f(a).g(b) < 0$ thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại ít nhất một điểm có hoành độ $x = x_0 \in (a;b)$.
Vậy ta xem như hướng 1 đã được giải quyết. Bây giờ ta đi vào lời giải chi tiết bài toán như sau:
+Cách 1: Điều kiện: $x \geq 2$.

Đặt: $\begin{cases} u = \sqrt{x+2} \\ v = \sqrt{x-2} \end{cases}$, $(u, v \geq 0)$. Từ cách đặt ta có: $u^2 + v^2 = 2x;\ u^2 - v^2 = 4.$

Lúc đó phương trình đã cho trở thành phương trình:
$2[(u^2+v^2)+1]u - [2(u^2+v^2)-1]v = 21 \Leftrightarrow 2(u^2+v^2)(u-v) + (u+v) = 21$
$\Leftrightarrow \left[(u+v)^2 + \dfrac{16}{(u+v)^2}\right]\dfrac{4}{u+v} + u + v = 21(*)$
Đặt: $t = u+v$, $t \geq 2$ do $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} \geq 2$, $\forall x \geq 2$. Từ đó phương trình $(*)$ trở thành:
$\left(t^2 + \dfrac{16}{t^2}\right)\dfrac{4}{t} + t = 21 \Leftrightarrow 5t^4 - 21t^3 + 64 = 0$

$$\Leftrightarrow (t-4)(5t^3 - t^2 - 4t - 16) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4 \\ 5t^3 - t^2 - 4t - 16 = 0 \end{array}\right.$$

Với $t = 4$ ta có: $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-4} = 8 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 8 - x \geq 0 \\ 4x = 17 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{17}{4}$

Với $5t^3 - t^2 - 4t - 16 = 0$. Xét hàm số $f(t) = 5t^3 - t^2 - 4t - 16$, $\forall t \geq 2$.
Ta có: $f'(t) = 15t^2 - 2t - 4$.

Ta có: $f'(t) = 0 \Leftrightarrow 15t^2 - 2t - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1-\sqrt{61}}{15} \\ t = \dfrac{1+\sqrt{61}}{15} \end{array}\right.$

-Nhận xét: $f\left(\dfrac{1-\sqrt{61}}{15}\right).f\left(\dfrac{1+\sqrt{61}}{15}\right) < 0$. Do đó đồ thị của hàm số $f(t)$ cắt trục hoàn tại đúng một điểm nên phương trình $f(t) = 0$ có đúng một nghiệm. Mặt khác ta có: $f(1).f(2) < 0$ nên phương trình $f(t) = 0$ có đúng một nghiệm $\in (1;2)$. Do đó với $t \geq 2$ thì phương trình $f(t) = 0$ vô nghiệm.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{17}{4}$

-Hướng 2: Đặt một ẩn phụ:

Đặt: $t = \sqrt{x-2} \Rightarrow x = t^2 + 2$. Lúc đó phương trình đã cho trở thành phương trình: $[4(t^2+2)+1]\sqrt{t^2+4} - [4(t^2+2)-1]t = 21 \Leftrightarrow \sqrt{t^2+4} = \dfrac{4t^3+7t+21}{4t^2+9} (3)$

Phương trình (3) là một phương trình quen thuộc ta có nhiều hướng giải quyết này như chúng tôi đã có dịp phân tích ở các ví dụ trước. Ở đây chúng ta biết phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{17}{4}$ nên ta sẽ có phương trình theo ẩn t có nghiệm duy nhất $t = \dfrac{3}{2}$. Do đó ta sẽ chọn giải phương trình (3) theo phương pháp nhân lượng liên hợp.

Và theo phương pháp nhân lượng liên hợp thì rõ ràng qua các phân tích của các bài toán trước ta có nhiều cách để tạo sự liên hợp bắt nhân tử chung nhưng hai cách thông dụng nhất là thêm bớt hệ số hoặc thêm bớt cả một biểu thức có chứa biến. Trong đó các hướng thêm bớt như thế nào đã được phân tích kỹ lưỡng ở phần phương pháp giải và các ví dụ trước đó. Tùy vào bài toán cộng với sự đánh giá phân tích sao cho biểu thức còn lại sau khi bắt nhân tử chung thì phần đánh giá nó vô nghiệm hoặc có nghiệm phải là sự đơn giản nhất có thể.

Có một điều là các đánh giá phần đại lượng còn lại vô nghiệm sau khi bắt nhân tử chung thì lại gây rất nhiều sự khó khăn cho đa số các bạn độc giả. Theo ý kiến của chúng tôi thì để đánh giá đó có thể xuất phát từ các cơ sở tự nhiên sau:

+Sử dụng điều kiện xác định của phương trình

+Sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình

+Sử dụng các bất đẳng thức cơ bản thường dùng nhất là: $A < B\,(A > B)$, Cauchuy, B.C.S.

+Sử dụng hàm số để khẳng định tính đơn điệu của nó (thường cách này phức tạp và dài dòng)

Nếu phần đánh giá còn lại mà có nghiệm thì chúng ta cũng sẽ xuất phát từ các ý tưởng tự nhên sau:

+Sử dụng cộng đại số phần đánh giá và phương trình đã cho.

+Sử dụng hàm số để chứng minh có nghiệm duy nhất.

+Sử dụng ẩn phụ hoặc liên hợp lại một lần nữa.

+Sử dụng các đánh giá kiểu $f(x) \leq a \leq g(x)$ để chỉ ra dấu bằng.

Tùy hoàn cảnh cụ thể mà ta sử dụng linh hoạt từng ý tưởng để đạt kết quả cao nhất.

Bây giờ, ta đi vào cụ thể lời giải cho bài toán ở hướng 2 như sau:

+Cách 2: Điều kiện $x \geq 2$.

Đặt $t = \sqrt{x-2}, t \geq 0$. Ta có: $x = t^2 + 2$. Lúc đó phương trình đã cho được biến đổi thành phương trình:

$[4(t^2+2)+1]\sqrt{t^2+4} - [4(t^2+2)-1]t = 21 \Leftrightarrow \sqrt{t^2+4} = \dfrac{4t^3+7t+21}{4t^2+9}$

$\Leftrightarrow \sqrt{t^2+4} - (t+1) = \dfrac{4t^3+7t+21}{4t^2+9} - (t+1) \Leftrightarrow \dfrac{3-2t}{\sqrt{t^2+4}+t+1} = \dfrac{-4t^2-2t+12}{4t^2+9}$

$$\frac{2t-3}{\sqrt{t^2+4}+t+1} - \frac{2(2t-3)(t+2)}{4t^2+9} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2t-3 = 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{t^2+4}+t+1} = \dfrac{2(t+2)}{4t^2+9} \end{array}\right.$$

Xét phương trình $\dfrac{1}{\sqrt{t^2+4}+t+1}=\dfrac{2(t+2)}{4t^2+9}$
$\Leftrightarrow 4t^2+9-2(t+2)(t+1)=2(t+2)\sqrt{t^2+4}$
$\Leftrightarrow 2t^2-6t+5=2(t+2)\sqrt{t^2+4}$
Với $t\geq 0$ ta luôn có: $2t^2-6t+5<2(x+2)\sqrt{t^2+4}(4)$
Thật vậy, ta bình phương hai vế của (4) ta có:
$(2t^2-6t+5)^2<4(t+2)^2(t^2+4)\Leftrightarrow 4t^4+16t^3+30t^2+70t+59>0$ (luôn đúng)
Vậy phương trình $2t^2-6t+5=2(t+2)\sqrt{t^2+4}$ vô nghiệm.
Do đó phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $t=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow\sqrt{x-2}=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{17}{4}$. ■

-Bình luận. Qua ví dụ này, chúng ta lại thấy bài toán phương trình vô tỷ chứa hai căn thức và các đại lượng trong phương trình có thể biểu diễn được qua hai căn thức có rất nhiều hướng giải. Và mỗi hướng giải sẽ đưa cho chúng ta rất nhiều điều thú vị. Có những hướng giải tưởng chừng như sẽ khó khăn nhưng lại ra kết quả hết sức gọn gàng, ngược lại có những ý tưởng ta nghĩ sẽ dẫn bài toán về đơn giản nhưng lại hết sức khó chịu và đòi hỏi phải có những kiến thức bổ trợ khác mới mong có được hiệu quả. Trong lời giải cách 2 các bạn sẽ có thắc mắc là làm sao chúng tôi phải thêm bớt một đại lượng $t+1$ vào hai vế phương trình mà không phải là hệ số. Câu trả lời nằm chính ở điều mà chúng tôi đã nói trong phần phân tích đó là để lại lượng còn lại sao cho để đánh giá đơn giản nhất có thể. Thêm một sự chú ý nữa là tại sao lại chọn được đại lượng thêm bớt đó khi mà bên phải phương trình chứa phân số chứa bậc tử và mẫu lệch nhau như thế. Để tìm hiểu điều này, chắc các bạn còn nhớ ở những ví dụ trước khi thêm bớt một biểu thức chứa biến vào để liên hợp bắt nhân tử chúng tôi tạo ra như sau:
$\sqrt{t^2+4}-(mx+n)=\dfrac{4t^3+7t+21}{4t^2+9}-(mx+n)$
Bây giờ chúng ta đã biết được một nghiệm duy nhất $t=\dfrac{3}{2}$ nên ta sẽ có: $-\dfrac{3}{2}m-n=-\dfrac{5}{2}(i)$
Rõ ràng tới đây có rất nhiều bộ số (m,n) thỏa hệ thức (i) nhưng việc quan trọng là chúng ta còn chọn ưu tiên sao cho hệ số (m,n) là các số nguyên (thường là các số nguyên dương sẽ hiệu quả hơn điều này để tránh biểu thức liên hợp có thể bằng 0). Suy ra $m=1$, $n=1$. Và các bạn cứ yên tâm khi cần có và một lí do nữa đó là khi tạo hệ số có đôi lúc ta cần những đánh giá phức tạp rất gây khó khăn cho nhiều độc giả, nhưng khi tạo biểu thức chứa biến liên hợp thì sự đánh giá này có thể giảm ở mức tối thiểu nhất có thể. Trên dây là hai ví dụ minh họa cho các lớp bài toán có hình thức giống nhau mà thông thường chúng ta hay quy nó về việc giải phương trình đẳng cấp hoặc hệ phương trình. Các bạn độc giả hãy thử sức mình với bài toán 35, 36 bằng cách sử dụng phép nhân liên hiệp trực tiếp để rèn luyện thêm kỷ năng.

Ví dụ 40. Giải phương trình $2(x-\sqrt{x})^2-4(x-\sqrt{x})+4=\dfrac{3x+3\sqrt{x}-1}{(x+1)\sqrt{\sqrt{x}+1}}$

✍ **Lời giải.**
-Phân tích hướng giải. Quan sát bài toán ta thấy có hai đại lượng có mặt trong phương trình rất nhiều đó là x và $\sqrt{x}$, một điều suy nghĩ tự nhiên của chúng ta sẽ ẩn phụ hóa hai đại lượng đó để bài toán trong đơn giản hơn. Một cách nghĩ khác đó là $x,\sqrt{x}$ có thể biểu diễn theo đại lượng $\sqrt{\sqrt{x}+1}$ khi ta ẩn phụ hóa đại lượng $\sqrt{\sqrt{x}+1}$. Tuy đó là một suy nghĩ rất có lý nhưng có một điều ta thấy rằng vế trái phương trình có gì đó liên quan đến hằng đẳng thức.
Thật vậy, ta có: $2(x-\sqrt{x})^2-4(x-\sqrt{x})+4=2\left[(x-\sqrt{x})^2-2(x-\sqrt{x})+1\right]+2=2(x-\sqrt{x}-1)^2+2\geq 2$.
Từ đó ta sẽ có phép đánh giá: $\dfrac{3x+3\sqrt{x}-1}{(x+1)\sqrt{\sqrt{x}+1}}\geq 2$
$\Leftrightarrow 3x+3\sqrt{x}-1\geq 2(x+2)\sqrt{\sqrt{x}+1}(1)$
Với hình thức của (1) để làm gọn ta sẽ ẩn phụ hóa $t=\sqrt{\sqrt{x}+1}\Rightarrow t^2=\sqrt{x}+1\Rightarrow\sqrt{x}=t^2-1$ $\Rightarrow x=(t^2-1)^2$

Khi đó (1) sẽ trở thành: $3\left(t^2-1\right)^2+3\left(t^2-1\right)-1\geq 2\left[\left(t^2-1\right)^2+1\right]t$
$\Leftrightarrow \left(t^2-1\right)^2(3-2t)+3\left(t^2-1\right)\geq 2t+1$
$\Leftrightarrow \left(t^2-1\right)\left[\left(t^2-1\right)(3-2t)+3\right]\geq 2t+1 \Leftrightarrow -t\left(t^2-1\right)(2t+1)(t-2)\geq 2t+1$
$\Leftrightarrow (2t+1)\left(t^4-2t^3-t^2+2t+1\right)\leq 0 \Leftrightarrow (2t+1)\left(t^2-t-1\right)^2\leq 0$
Tới đây, ta đã có thể thấy đường hướng giải thành công phương trình này đã hiện rõ. Vậy ta giải chi tiết bài này như sau:
+Điều kiện: $x\geq 0$
Ta có: $2\left(x-\sqrt{x}\right)^2-4\left(x-\sqrt{x}\right)+4=2\left[\left(x-\sqrt{x}\right)^2-2\left(x-\sqrt{x}\right)+1\right]+2=2\left(x-\sqrt{x}-1\right)^2+2\geq 2$
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $x-\sqrt{x}-1=0(*)$
Với đánh giá này thì từ phương trình đã cho ta có:
$\dfrac{3x+3\sqrt{x}-1}{(x+1)\sqrt{\sqrt{x}+1}}\geq 2 \Leftrightarrow 3x+3\sqrt{x}-1\geq 2(x+1)\sqrt{\sqrt{x}+1}(1)$
Đặt $t=\sqrt{\sqrt{x}+1}$, $t\geq 1$. Ta có: $t^2=\sqrt{x}+1\Leftrightarrow \sqrt{x}=t^2-1\Leftrightarrow x=\left(t^2-1\right)^2$
Lúc đó (1) trở thành: $3\left(t^2-1\right)^2+3\left(t^2-1\right)-1\geq 2\left[\left(t^2-1\right)^2+1\right]t$
$\Leftrightarrow \left(t^2-1\right)^2(3-2t)+3\left(t^2-1\right)\geq 2t+1$
$\Leftrightarrow \left(t^2-1\right)\left[\left(t^2-1\right)(3-2t)+3\right]\geq 2t+1 \Leftrightarrow -t\left(t^2-1\right)(2t+1)(t-2)\geq 2t+1$
$\Leftrightarrow (2t+1)\left(t^4-2t^3-t^2+2t+1\right)\leq 0 \Leftrightarrow (2t+1)\left(t^2-t-1\right)^2\leq 0$
$\Leftrightarrow t^2-1-t=0 \Leftrightarrow \sqrt{\sqrt{x}+1}=\sqrt{x}\Leftrightarrow x-\sqrt{x}-1=0\,(*')$
Từ $(*)$ và $(*')$ ta có nghiệm của phương trình đã cho phải thỏa hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x-\sqrt{x}-1=0 \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \sqrt{x}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. ■

Ví dụ 41. Giải phương trình $x^2+2\sqrt{x}\left(x-2\sqrt{x}-2\right)+13=2(3-x)\sqrt{3x+1}$.

✍ **Lời giải.**
-Phân tích hướng giải. Quan sát bài toán ta thấy có hai đại lượng căn thức là $\sqrt{x},\sqrt{3x+1}$ nên ta có thể nghĩ ngay đến việc ẩn phụ hóa cho phương trình.

Đặt: $\begin{cases} a=\sqrt{x} \\ b=\sqrt{3x+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a^2=2x \\ b^2=3x+1 \end{cases} \Rightarrow b^2-2a^2-1=x$

Phương trình đã cho được biến đổi thành:
$\left(b^2-2a^2-1\right)^2+2a\left(b^2-2a^2-2a-3\right)+13=2\left(4-b^2+2a^2\right)b(1)$
Rõ ràng từ (1) để thực hiện phép biến đổi đại số bắt nhân tử chung hoặc tạo ra được điều gì đó đặc biệt để có thể sử dụng hiệu quả thật khá nan giải và đòi hỏi nhiều biện pháp biến đổi khá phức tạp và khéo léo.
Nhưng nếu ta vẫn muốn theo chiều biến đổi theo ẩn phụ thì ta thử tìm cách phán đoán lại phương trình đã cho có gì đặc biệt và khéo léo thay ẩn phụ vào đúng vị trí thích hợp xem thử thế nào?
Phương trình đã cho được viết lại:
$x^2+2\sqrt{x}\left(x-2\sqrt{x}-2\right)+13-2(3-x)\sqrt{3x+1}=0$
Nhận thấy giữa ba đại lượng x^2 , $2(2-x)\sqrt{3x+1}$, 13 có thể sắp xếp tạo ra được hằng đẳng thức với sự bổ trợ thêm bớt. Vậy ta biến đổi tiếp phương trình vừa biến đổi thành phương trình:
$x^2-6x+9-2(3-x)\sqrt{3x+1}+3x+1+3x+2\sqrt{x}\left(x-2\sqrt{x}-2\right)+3=0$
$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3x+1}+x-3\right)^2+3x+2\sqrt{x}\left(x-2\sqrt{x}-2\right)+3=0(2)$

Với dáng điệu của phương trình (2) nếu đặt sự cần ẩn phụ để làm gọn phương trình thì ta chỉ cần đặt $a=\sqrt{x}$ và tập trung biến đổi gọn lại phương trình mà không cần đặt ẩn phụ cho đại lượng $\sqrt{3x+1}$
Với $a=\sqrt{x}$, ta sẽ có phương trình (2) trở thành:
$\left(\sqrt{3a^2+1}+a^2-3\right)^2+3a^2+2a\left(a^2-2a-2\right)+3=0$
$\Leftrightarrow\left(\sqrt{3a^2+1}+a^2-3\right)^2+2a^3-a^2-4a+3=0$
$\Leftrightarrow\left(\sqrt{3a^2+1}+a^2-3\right)^2+(a-1)^2(2a+3)=0$
Tới đây với $a\geq 0$, xem như bài toán được giải quyết gọn gàng. Bây giờ ta đi vào giải quyết cụ thể bài toán.

+Cách 1: Điều kiện: $\begin{cases} x\geq 0 \\ 3x+1\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\geq 0$

Phương trình đã cho được biến đổi về phương trình sau:
$x^2+2\sqrt{x}\left(x-2\sqrt{x}-2\right)+13-2(3-x)\sqrt{3x+1}=0$
$\Leftrightarrow x^2-6x+9-2(3-x)\sqrt{3x+1}+3x+1+3x+2\sqrt{x}\left(x-2\sqrt{x}-2\right)+3=0$
$\Leftrightarrow\left(\sqrt{3x+1}+x-3\right)^2+3x+2\sqrt{x}\left(x-2\sqrt{x}-2\right)+3=0(2)$
Đặt $a=\sqrt{x}$, $a\geq 0$. Ta có phương trình (2) tương đương với phương trình:
$\left(\sqrt{3a^2+1}+a^2-3\right)^2+3a^2+2a\left(a^2-2a-2\right)+3=0$
$\Leftrightarrow\left(\sqrt{3a^2+1}+a^2-3\right)^2+2a^3-a^2-4a+3=0$
$\Leftrightarrow\left(\sqrt{3a^2+1}+a^2-3\right)^2+(a-1)^2(2a+3)=0(3)$

Từ (3) do $a\geq 0$ nên ta có: $\begin{cases}\sqrt{3a^2+1}=3-a^2 \\ a-1=0\end{cases}\Leftrightarrow a=1\Leftrightarrow\sqrt{x}=1\Leftrightarrow x=1$

Đối chiếu điều kiện ta có $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

+Cách 2: Điều kiện $\begin{cases} x\geq 0 \\ 3x+1\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\geq 0$

Phương trình đã cho được biến đổi về phương trình sau:
$x^2+2\sqrt{x}\left(x-2\sqrt{x}-2\right)+13-2(3-x)\sqrt{3x+1}=0$
$\Leftrightarrow x^2-6x+9-2(3-x)\sqrt{3x+1}+3x+1+3x+2\sqrt{x}\left(x-2\sqrt{x}-2\right)+3=0$
$\Leftrightarrow\left(\sqrt{3x+1}+x-3\right)^2+3x+2\sqrt{x}\left(x-2\sqrt{x}-2\right)+3=0(2)$
Đặt $a=\sqrt{x}$, $a\geq 0$. Ta có phương trình (2) tương đương với phương trình:
$\left(\sqrt{3a^2+1}+a^2-3\right)^2+3a^2+2a\left(a^2-2a-2\right)+3=0$
$\Leftrightarrow\left(\sqrt{3a^2+1}+a^2-3\right)^2+2a^3-a^2-4a+3=0(4)$
Từ (4) ta có: $\left(\sqrt{3a^2+1}+a^2-3\right)^2\geq 0$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=1$.
Xét hàm số $f(a)=2a^3-a^2-4a+3$, $\forall a\geq 0$
Ta có: $f'(a)=6a^2-2a-4$.

Ta có: $f'(a)=0\Leftrightarrow 6a^2-2a-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=-\dfrac{1}{2}\notin[0;+\infty)\end{array}\right.$

Từ đó lập bảng biến thiên ta có $\min f(x)=0$, $\forall a\geq 0$ đạt được khi và chỉ khi $a=1$. Do đó: $\left(\sqrt{3a^2+1}+a^2-3\right)^2+f(a)=0\Leftrightarrow a=1\Leftrightarrow\sqrt{x}=1\Leftrightarrow x=1$. ■

-Bình luận. Đây là một bài toán hay, ở cách giải thể hiện rõ không phải lúc nào hai ẩn phụ cũng ưu thế hơn một ẩn phụ. Cách giải 1 sử dụng phương pháp đưa phương trình về phương trình tổng các số không âm, cách 2 sử dụng chất liệu đánh giá thông qua hàm số, một bài toán lồng hàm số khá hay.

Ví dụ 42. Giải phương trình $x^3+x^2-x\left(2+\sqrt[3]{(2x+1)^4}\right)+\sqrt[3]{(2x+1)^5}-1=0$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích hướng giải. Bài toán này có thể thấy đề bài đang xoay quanh đại lượng $2x+1$ nên ta sẽ cố gắng phân tích bài toán đã cho theo hướng này.

Cụ thể ta có: $x^3+x^2-2x-1-x(2x+1)\sqrt[3]{2x+1}+(2x+1)\sqrt[3]{(2x+1)^2}=0$

$\Leftrightarrow 2x^3+x^2-(2x+1)-x(2x+1)\sqrt[3]{2x+1}+(2x+1)\sqrt[3]{(2x+1)^2}-x^3=0$

$\Leftrightarrow x^2(2x+1)-(2x+1)-x(2x+1)\sqrt[3]{2x+1}+(2x+1)\sqrt[3]{(2x+1)^2}-x^3=0$

$\Leftrightarrow x^2(2x+1)-(2x+1)-x(2x+1)\sqrt[3]{2x+1}+(2x+1)\sqrt[3]{(2x+1)^2}-x^3=0(1)$

Để cho gọn (1) ta đặt $t=\sqrt[3]{2x+1}\Leftrightarrow t^3=2x+1$. Khi đó (1) trở thành:

$x^2t^3-t^3-xt^4+t^5-x^3=0\Leftrightarrow t^3\left(x^2-xt+t^2\right)=(x-t)\left(x^2-xt+t^2\right)$

Tới đây xem bài toán như đã được giải quyết hoàn toàn. Bây giờ ta đi vào lời giải cụ thể cho bài toán.

+Điều kiện

Phương trình đã cho được biến đổi thành phương trình sau:

$x^3+x^2-2x-1-x(2x+1)\sqrt[3]{2x+1}+(2x+1)\sqrt[3]{(2x+1)^2}=0$

$\Leftrightarrow 2x^3+x^2-(2x+1)-x(2x+1)\sqrt[3]{2x+1}+(2x+1)\sqrt[3]{(2x+1)^2}-x^3=0$

$\Leftrightarrow x^2(2x+1)-(2x+1)-x(2x+1)\sqrt[3]{2x+1}+(2x+1)\sqrt[3]{(2x+1)^2}-x^3=0$

Đặt $t=\sqrt[3]{2x+1}\Leftrightarrow t^3=2x+1$. Khi đó (1) trở thành:

$x^2t^3-t^3-xt^4+t^5-x^3=0\Leftrightarrow t^3\left(x^2-xt+t^2\right)=(x-t)\left(x^2-xt+t^2\right)(2)$

Do $x^2-xt+t^2=\left(x-\dfrac{t}{2}\right)^2+\dfrac{3t^2}{4}>0$ nên từ (2) ta có phương trình:

$t^3=x-t\Leftrightarrow 2x+1=x-\sqrt[3]{2x+1}\Leftrightarrow x+1=\sqrt[3]{2x+1}$.

$$\Leftrightarrow (x+1)^3=2x+1\Leftrightarrow x\left(x^2+3x+1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}\\ x=\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm: $x=0;\ x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$. ■

-Bình luận. Bài toán này không khó chỉ cần biến đổi khéo léo bắt các nhân tử phù hợp là có thể giải quyết trọn vẹn bài toán.

Ví dụ 43. Giải phương trình $x^3+\sqrt{1-3x^2+3x^4-x^6}=x\sqrt{2-2x^2}$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích hướng giải. Quan sát bài toán ta thấy có hai căn thức nên ta cần thoát căn. Tuy nhiên có một đại lượng căn thức chứa bậc mũ quá cao nên việc nâng lũy thừa là không khả thi. Bây giờ ta tính đến việc thoát căn bằng cơ sở đặt ẩn phụ, muốn đạt được điều này thì trong phương trình phải chứa các đại lượng có thể biểu diễn ẩn phụ được.

Ta chú ý rằng: $1-3x^2+3x^4-x^6=\left(1-x^2\right)^3;\ 2-2x^2=2\left(1-x^2\right)$. Lúc đó phương trình đã cho sẽ trở thành:

$x^3+\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}=x\sqrt{2}.\sqrt{1-x^2}(1)$

Rõ ràng từ (1) cho phép ta nghĩ đến đặt $y=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow x^2+y^2=1$. Kết hợp điều này với phương trình (1) ta được hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^3+y^3=\sqrt{2}.xy \end{cases}$ $(*)$

Hệ $(*)$ là hệ đối xứng loại 1.
Từ đó ta có cách giải cho hướng đi này như sau:
-Cách 1: Điều kiện: $1-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$.
Phương trình đã cho được biến đổi thành phương trình:
$x^3+\sqrt{(1-x^2)^3}=x\sqrt{2}.\sqrt{1-x^2}(1)$
Đặt: $y=\sqrt{1-x^2}$, $y \geq 0$. Ta có: $x^2+y^2=1$. Lúc đó kết hợp với phương trình vừa biến đổi ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^3+y^3=\sqrt{2}.xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2-2xy=1 \\ (x+y)^3-3xy\left(x+y\right)=\sqrt{2}.xy \end{cases} \quad (2)$$

Đặt: $\begin{cases} S=x+y \\ P=xy \end{cases}$, $S^2 \geq 4P$. Khi đó hệ (2) trở thành hệ phương trình:

$$\begin{cases} S^2-2P=1 \\ S^3-3SP=P\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=\dfrac{S^2-1}{2} \\ S^3-3\left(\dfrac{S^2-1}{2}\right)S=\sqrt{2}\left(\dfrac{S^2-1}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P=\dfrac{S^2-1}{2} \\ 2S^3+\sqrt{2}S-3S-\sqrt{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=\dfrac{S^2-1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} S=\sqrt{2} \\ S=-1-\sqrt{2} \\ S=1-\sqrt{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} S=\sqrt{2} \\ P=\dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} S=-1-\sqrt{2} \\ P=1+\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} S=1-\sqrt{2} \\ P=1-\sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện $S^2 \geq 4P$ ta có hai trường hợp:

+Với: $\begin{cases} S=\sqrt{2} \\ P=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\sqrt{2} \\ xy=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x,y$ là nghiệm của phương trình:

$2X^2-2\sqrt{2}X+1=0 \Leftrightarrow X=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Trong trường hợp này ta có $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ là nghiệm của phương trình.

+Với: $\begin{cases} S=1-\sqrt{2} \\ P=1-\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1-\sqrt{2} \\ xy=1-\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow x,y$ là nghiệm của phương trình:

$$X^2-\left(1-\sqrt{2}\right)X+1-\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}\right) \\ X=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}-1}\right)\end{array}\right.$$

Trong trường hợp này ta có $x=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}\right)$ là nghiệm của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}\right)$

Lại nhận xét rằng từ phương trình (1) ta thấy sự xuất hiện $1-x^2$ làm cho liên tưởng đến một hằng đẳng thức lượng gác rất quen thuộc $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ nên ta sẽ sử dụng lượng giác hóa đại số phương trình này.

+Cách 2: Điều kiện: $1-x^2\geq 0 \Leftrightarrow -1\leq x\leq 1$.

Phương trình đã cho được biến đổi thành phương trình:

$x^3+\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}=x\sqrt{2}.\sqrt{1-x^2}(1)$

Đặt: $x=\cos a$, $a\in[0;\pi]\Rightarrow \sin a>0$. Lúc đó phương trình (1) trở thành:

$\cos^3 a+\sin^3 a=\sqrt{2}\cos a\sin a$

$\Leftrightarrow (\cos a+\sin a)(1-\sin a\cos a)=\sqrt{2}\sin a\cos a(3)$

Đặt: $t=\sin a+\cos a=\sqrt{2}\sin\left(a+\frac{\pi}{4}\right)$, $t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\Rightarrow \sin a\cos a=\frac{t^2-1}{2}$

Lúc đó phương trình (3) trở thành:

$t^3+\sqrt{2}t-3t-\sqrt{2}=0\Leftrightarrow \left(t-\sqrt{2}\right)\left(t^2+2\sqrt{2}t+1\right)=0$

Với: $t=\sqrt{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}+k2\pi\Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Với: $t^2+2\sqrt{2}t+\sqrt{2}=0\Rightarrow t=1-\sqrt{2}\Leftrightarrow \sin a+\cos a=1-\sqrt{2}(4)$

Để giải (4) ta trả về lại ẩn ban đầu nên ta có:

$\sqrt{1-x^2}+x=1-\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{1-x^2}=x+1-\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x+1-\sqrt{2}\geq 0 \\ 1-x^2=\left(x+1-\sqrt{2}\right)^2\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}\right).$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}\right)$. ■

-Bình luận. Qua hai cách giải của bài toán này, các bạn hãy chú ý rằng tất cả những phương trình vô tỷ giải bằng phương pháp lượng giác hóa mà có nghiệm tường minh tức là các nghiệm "đẹp" mà không phải là nghiệm dưới dạng lượng giác thì chúng ta đều có thể giải các bài toán đó bằng các phương pháp cơ bản như nâng lũy thừa, đặt ẩn phụ.. mà đôi khi lời giải cho nó còn gọn và đẹp hơn rất nhiều so với giải bằng phương pháp lượng giác hóa. Tuy nhiên phương pháp lượng giác hóa lại tỏ ra rất ưu việt với các phương trình vô tỷ có nghiệm với dạng lượng giác (cái này thì thường là các bài toán học sinh giỏi chứ thi đại học chắc chắn là không có).

Ví dụ 44. Giải phương trình $2(x+5)\sqrt{1-3x}+3x-10=\frac{5\left(x^2+4x+9\right)}{2\sqrt{10-6x}+\sqrt{4+3x}+1}$.

✍ Lời giải.

-Phân tích hướng giải. Bài toán đang xét chứa rất nhiều căn thức nên theo quy tắc thoát căn của phương trình vô tỷ ta có thể nghĩ đến việc nâng lũy thừa hoặc đặt ẩn phụ. Tuy vậy, cả hai suy nghĩ này đặt trong trường hợp của bài toán đang xét thật không khả thi. Do đó ta cần tìm cách làm giảm bớt lượng căn thức trong phương trình bằng cách nhận xét rằng ta có $2\sqrt{10-6x}=2\sqrt{2}.\sqrt{5-3x}$ và $\sqrt{4x+3}$ có $(5-3x)+(4+3x)=9$ nên ta nghĩ đến việc sử dụng đánh giá làm giảm căn thức bằng bất đẳng thức B.C.S.

Ta có: $2\sqrt{2}.\sqrt{5-3x}+\sqrt{4-3x}\le\sqrt{\left[\left(2\sqrt{2}\right)^2+1^2\right](5-3x+4+3x)}=9$
Suy ra: $2\sqrt{10-6x}+\sqrt{4+3x}+1\le 10.$
Từ đó ta có: $\dfrac{5\left(x^2+4x+9\right)}{2\sqrt{10-6x}+\sqrt{4+3x}+1}\ge\dfrac{5\left(x^2+4x+9\right)}{10}=\dfrac{x^2+4x+9}{2}$
Lúc đó từ phương trình đã cho ta có: $2(x+5)\sqrt{1-3x}+3x-10\le\dfrac{x^2+4x+9}{2}$
$\Leftrightarrow 4(x+5)\sqrt{1-3x}\le x^2-2x+29$
Với bất phương trình cuối ta có thể giải bằng đặt ẩn phụ hoặc nâng lũy thừa. Tuy nhiên nếu ta tinh ý ta sẽ có biến đổi sau:
$4(x+5)\sqrt{1-3x}\le x^2-2x+29\Leftrightarrow 4(1-3x)-4(x+5)\sqrt{1-3x}+x^2+10x+25\ge 0\Leftrightarrow\left(2\sqrt{1-3x}-x-5\right)^2\ge 0$
Tới đây bài toán đã được giải quyết. Bây giờ ta đi vào lời giải cụ thể cho bài toán như sau:

+Điều kiện: $\begin{cases}1-3x\ge 0\\ 10-6x\ge 0\\ 4+3x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow -\dfrac{4}{3}\le x\le\dfrac{1}{3}$

Theo bất đẳng thức B.C.S ta có: $2\sqrt{2}.\sqrt{5-3x}+\sqrt{4-3x}\le\sqrt{\left[\left(2\sqrt{2}\right)^2+1^2\right](5-3x+4+3x)}=9$
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $\sqrt{5-3x}=2\sqrt{2}.\sqrt{4+3x}\Leftrightarrow 5-3x=32+24x\Leftrightarrow x=-1$
Suy ra: $2\sqrt{10-6x}+\sqrt{4+3x}+1\le 10$. Lại có: $x^2+4x+9>0$ nên $\dfrac{5\left(x^2+4x+9\right)}{2\sqrt{10-6x}+\sqrt{4+3x}+1}\ge\dfrac{5\left(x^2+4x+9\right)}{10}=\dfrac{x^2+4x+9}{2}$
Lúc đó từ phương trình ta có:
$2(x+5)\sqrt{1-3x}+3x-10\le\dfrac{x^2+4x+9}{2}\Leftrightarrow 4(x+5)\sqrt{1-3x}\le x^2-2x+29$
$\Leftrightarrow\left(2\sqrt{1-3x}-x-5\right)^2\ge 0$ (luôn đúng).
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$2\sqrt{1-3x}=x+5\Leftrightarrow 4(1-3x)=(x+5)^2\Leftrightarrow x^2+22x+21=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=-21\end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện ta có $x=-1$. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=-1$. ■
-Bình luận. Đây là một bài toán khá hay, tuy hình thức và dấu hiệu có nghiệm duy nhất $x=-1$ dựa vào máy tính ta có thể nghĩ đến phương pháp liên hợp. Tuy nhiên nếu ta có cái nhìn tinh ý ta sẽ thu được một lời giải gọn gàng và đẹp.

Ví dụ 45. Giải phương trình $2\sqrt[4]{27x^2+24x+\dfrac{28}{3}}=1+\sqrt{\dfrac{27}{2}x+6}.$

✍ **Lời giải.**
-Phân tích hướng giải. Quan sát bài toán ta thấy bài toán chứa hai căn thức nên ta có quyền nghĩ đến ẩn phụ và biểu diễn ẩn x theo hai hoặc một ẩn phụ để có được hệ phương trình hoặc phương trình.

Cụ thể ta đặt: $\begin{cases}a=\sqrt[4]{27x^2+24x+\dfrac{28}{3}}\\ b=\sqrt{\dfrac{27}{2}x+6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^4=27x^2+24x+\dfrac{28}{3}\\ b^4=\dfrac{27}{2}x+6\end{cases}$

-Hướng 1: Thiết lập hệ phương trình từ hai ẩn phụ.

Để ý rằng: $b^2 = \frac{27}{2}x + 6 \Leftrightarrow b^4 = \frac{27^2}{4}x^2 + 27.6.x + 36$

Lại có: $a^4 = 27x^2 + 4.6.x + \frac{28}{3}$. Từ đó ta có phép biến đổi: $27a^4 - 4b^4 = 108$

Từ đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 2a - b = 1 \\ 27a^4 - 4b^4 = 108 \end{cases}$. Hệ này giải quyết rất gọn bằng phương pháp thế.

Cụ thể ta có lời giải chi tiết như sau:

+Điều kiện: $\frac{27}{2}x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{4}{9}$.

Đặt: $\begin{cases} a = \sqrt[4]{27x^2 + 24x + \frac{28}{3}} \\ b = \sqrt{\frac{27}{2}x + 6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 = 27x^2 + 24x + \frac{28}{3} \\ b^4 = \frac{27}{2}x + 6 \end{cases}$

$\Rightarrow 27a^4 - 4b^4 = 108$, $(a, b \geq 0)$

Khi đó kết hợp với phương trình ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 2a - b = 1 \\ 27a^4 - 4b^4 = 108 \end{cases}$.

Thay $b = 2a - 1$ vào phương trình thứ hai trong hệ ta có phương trình:

$27a^4 - 4(2a-1)^4 = 108 \Leftrightarrow 37a^4 - 128a^3 + 96a^2 - 32a + 112 = 0$

$\Leftrightarrow (a-2)^2(37a^2 + 20a + 28) = 0 \Leftrightarrow a = 2 \Rightarrow b = 3$

Với $\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 27x^2 + 24x + \frac{28}{3} = 16 \\ \frac{27}{2}x + 6 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2}{9}$ (thỏa điều kiện)

Do đó phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{2}{9}$.

Nếu ta không tinh ý để khéo léo kéo được phương trình $27a^4 - 4b^4 = 108$, ta có thể chọn cách làm sau:

-Hướng 2: Thiết lập hai ẩn phụ để kéo theo x theo một ẩn phụ.

+Điều kiện: $\frac{27}{2}x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{4}{9}$.

Đặt: $\begin{cases} a = \sqrt[4]{27x^2 + 24x + \frac{28}{3}} \\ b = \sqrt{\frac{27}{2}x + 6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 = 27x^2 + 24x + \frac{28}{3} \\ b^4 = \frac{27}{2}x + 6 \end{cases}$, $(a, b \geq 0)$

Từ phương trình ta có: $2a = 1 + b \Leftrightarrow a = \frac{b+1}{2}$, từ cách đặt ta có: $x = \frac{2b^2 - 12}{27}$.

Do đó từ: $a^4 = 27x^2 + 24x + \frac{28}{3}$ ta có phương trình.

$\left(\frac{b+1}{2}\right)^2 = 27\left(\frac{2b^2-12}{27}\right)^2 + 24\left(\frac{2b^2-12}{27}\right) + \frac{28}{3}$

$\Leftrightarrow 37b^4 - 108b^3 - 162b^2 - 108b + 1701 = 0$

$\Leftrightarrow (b-3)^2(37b^2 + 114b + 189) = 0 \Leftrightarrow b = 3 \Rightarrow a = 2$

Với $\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 27x^2 + 24x + \frac{28}{3} = 16 \\ \frac{27}{2}x + 6 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2}{9}$ (thỏa điều kiện)

Do đó phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{2}{9}$.

-Hướng 3: Nếu ta tinh ý ngay từ phương trình đã cho ta có hai phép biến đổi sau:

$27x^2+24x+\dfrac{28}{3}=\dfrac{81x^2+72x+16+12}{3}=\dfrac{(9x+4)^2}{3}$; $\dfrac{27}{2}x+6=\dfrac{3(9x+4)}{2}$

Khi đó phương trình đã cho trở thành: $2\sqrt[4]{\dfrac{(9x+4)^2}{3}+4}=1+\sqrt{\dfrac{3(9x+4)}{2}}$

Để cho gọn ta đặt $t=9x+4$, $t\geq 0$.

Ta có phương trình trở thành: $2\sqrt[4]{\dfrac{t^2}{3}+4}=1+\sqrt{\dfrac{3t}{2}}(1)$

Với (1) để giảm nhẹ bậc căn thức ta sẽ bình phương hai vế thu được phương trình:
$4\sqrt{\dfrac{t^2}{3}+4}=1+\dfrac{3t}{2}+\sqrt{6t}(2)$
Với (2) ta có thể giải bằng cách tiếp tục bình phương hoặc đặt tiếp ẩn phụ nữa rồi bình phương hai vế ta sẽ thu được một phương trình bậc bốn nghiệm đẹp. Tuy nhiên ở đây ta chọn lối đi khác. Do ý muốn căn thức càng ít càng tốt nên ta sẽ thoát căn bằng đánh giá tinh ý là ở phương trình chứa đại lượng $\sqrt{6t}$ gần giống như $2\sqrt{ab}$ nên ta nghĩ ngay đến việc thoát bớt căn thức bằng bất đẳng thức Cauchuy như sau: $\sqrt{6t}\leq\dfrac{t+6}{2}$.

Khi đó phương trình ta chuyển về đánh giá:$4\sqrt{\dfrac{t^2}{3}+4}\leq 1+\dfrac{3t}{2}+\dfrac{t+6}{2}=2t+4$

Bình phương và thu gọn ta sẽ được bất phương trình: $(t-6)^2\leq 0$.
Tới đây xem như bài toán được giải quyết trọng vẹn. Ta đi và lời giải chi tiết như sau:
+Điều kiện: $\dfrac{27}{2}x+6\geq 0\Leftrightarrow x\geq-\dfrac{4}{9}$.
Phương trình đã cho được biến đổi về phương trình:
$2\sqrt[4]{\dfrac{(9x+4)^2}{3}+4}=1+\sqrt{\dfrac{3(9x+4)}{2}}(*)$

Đặt $t=9x+4$, $t\geq 0$. Ta có phương trình trở thành: $2\sqrt[4]{\dfrac{t^2}{3}+4}=1+\sqrt{\dfrac{3t}{2}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchuy ta có: $\sqrt{6t}\leq\dfrac{t+6}{2}$.

Từ đó ta có: $4\sqrt{\dfrac{t^2}{3}+4}\leq 1+\dfrac{3t}{2}+\dfrac{t+6}{2}=2t+4$

$\Leftrightarrow 4t^2+48\leq 3t^2+12t+12\Leftrightarrow (t-6)^2\leq 0\Leftrightarrow t=6\Leftrightarrow 9x+4=6\Leftrightarrow x=\dfrac{2}{9}$.

Do đó phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{2}{9}$. ■

-Bình luận. Bài toán này thực chất hướng đi 1 và 2 là tự nhiên nhất, tuy nhiên vẫn còn có những biến đổi khéo léo, còn hướng đi 3 đậm chất tư duy khéo và là một lời giải đẹp cho bài toán này.

Ví dụ 46. Giải phương trình $x^2+4x+5-\dfrac{3x}{x^2+x+1}=(x-1)\left(1-2\sqrt{\dfrac{1-x}{x^2+x+1}}\right)$.

✍ Lời giải.
-Phân tích hướng giải. Quan sát phương trình đề bài cho, việc đầu tiên chúng ta để ý đến không phải là căn thức mà đó chính là vế trái của phương trình cần phải làm gọn lại.

Ta có: $x^2+4x+5-\dfrac{3x}{x^2+x+1}=(x+2)^2+1-\dfrac{3x}{x^2+x+1}=(x+2)^2+\dfrac{(1-x)^2}{x^2+x+1}$
Khi đó phương trình trở thành:
$(x+2)^2=(x-1)\left(1-2\sqrt{\dfrac{1-x}{x^2+x+1}}\right)-\dfrac{(1-x)^2}{x^2+x+1}(1)$

Ở (1) gợi cho ta ý tưởng đặt ẩn phụ với $u=\sqrt{1-x}$, $v=\sqrt{x^2+x+1}$. Lúc đó (1) trở thành:$(x+2)^2=-u^2\left(1-\dfrac{2u}{v}\right)-\dfrac{u^4}{v^2}(2)$

Ở (2) ta thấy vế trái có $(x+2)^2 \geq 0$

Do đó nếu ta đánh giá được: $-u^2\left(1-2\frac{u}{v}\right)-\frac{u^4}{v^2} \leq 0$ là bài toán được giải quyết.

Mặt khác ta lại có: $-u^2\left(1-2\frac{u}{v}\right)-\frac{u^4}{v^2}=-u^2+2\frac{u^3}{v}-\frac{u^4}{v^2}=-\left(\frac{u^2}{v}-u\right)^2 \leq 0$

Vậy hướng đi của bài toán quá rõ ràng. Do đó ta trình bày lời giải cụ thể như sau:

+Điều kiện: $x \leq 1$.

Phương trình đã cho được biến đổi thành phương trình:

$(x+2)^2=(x-1)\left(1-2\sqrt{\frac{1-x}{x^2+x+1}}\right)-\frac{(1-x)^2}{x^2+x+1}(1)$

Đặt: $u=\sqrt{1-x}$, $v=\sqrt{x^2+x+1}$, $(u,v \geq 0)$.

Khi đó (1) trở thành phương trình: $(x+2)^2=-u^2\left(1-\frac{2u}{v}\right)-\frac{u^4}{v^2}(2)$

Nhận xét: $(x+2)^2 \geq 0$; $-u^2\left(1-2\frac{u}{v}\right)-\frac{u^4}{v^2}=-u^2+2\frac{u^3}{v}-\frac{u^4}{v^2}=-\left(\frac{u^2}{v}-u\right)^2 \leq 0$

Do đó để có (2) thì: $\begin{cases} x+2=0 \\ \frac{u^2}{v}-v=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ 1-x=x^2+x+1 \end{cases} \Leftrightarrow x=-2$

Đối chiếu điều kiện ta có phương trình có nghiệm duy nhất $x=-2$. ■

-Bình luận. Đây là một bài toán hay, tuy hình thức có sự cồng kềnh nhưng rõ ràng qua phép biến đổi đầu tiên để có được $(x+2)^2$ thì mọi việc đã trở nên đơn giản hơn rất nhiều vì chỉ cần sự nhạy bén là ta sẽ có được một lời giải đẹp cho bài toán.

Ví dụ 47. Giải phương trình $\frac{3}{4}\sqrt{x+3}+\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}{\left(2\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}\right)^2}=1$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích hướng giải. Quan sát bài toán ta thấy có hai đại lượng căn thức và dưới căn thức đều là bậc nhất nên ta có thể đặt ẩn phụ để giải quyết bài toán. Vấn đề đó là chúng ta nên chọn đặt một ẩn phụ hay hai ẩn phụ để cho bài toán có đường lối giải quyết đơn giản hơn, vì rõ ràng thông qua các ví dụ đãy ẩn phụ ở trên đã có phân tích ta thấy đôi lúc việc đặt ẩn hai ẩn phụ lại cho lời giải phức tạp hơn một ẩn phụ. Sử dụng máy tính ta có phương trình có nghiệm duy nhất $x=-2$ và hình thức của phương trình cho ta nghĩ đến việc liên hợp hoặc đánh giá bằng bất đẳng thức cơ bản.

-Hướng 1: Đặt một ẩn phụ. Điều kiện: $x \geq -2$.

Đặt $t=\sqrt{x+2}$, $t \geq 0$. Ta có: $x^2=t-2$. Khi đó phương trình đã cho trở thành phương trình: $\frac{3}{4}\sqrt{t^2+1}+\frac{\sqrt{t^2+1}+t}{\left(2\sqrt{t^2+1}+t\right)^2}=1$

$\Leftrightarrow 3\left(2\sqrt{t^2+1}+t\right)\sqrt{t^2+1}+4\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)=4\left(2\sqrt{t^2+1}+1\right)$

$\Leftrightarrow \left(15t^2-16t+16\right)\sqrt{t^2+1}=-12t^3+20t^2-16t+16$

$\Leftrightarrow \sqrt{t^2+1}=\frac{-12t^3+20t^2-16t+16}{15t^2-16t+16}-1 \Leftrightarrow \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}+1}=\frac{t^2(5-12t)}{15t^2-16t+16}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}=\frac{5-12t}{15t^2-16t+16}(2) \end{array}\right. (*)$$

Với (2) , ta xét các trường hợp:

+Trường hợp 1: $t \geq \frac{5}{12}$. thì $\frac{5-12t}{15t^2-16t+16} \leq 0$, $\frac{1}{\sqrt{t^2+1}+1} > 0$ nên (2) vô nghiệm.

+Trường hợp 2: $0 \le t < \dfrac{5}{12} \Rightarrow 5 - 12t > 0$. Do đó phương trình (2) trở thành:
$15t^2 - 16t + 16 = (5 - 12t)\sqrt{t^2+1} \Leftrightarrow 15t^2 - 4t + 11 = (5 - 12t)\sqrt{t^2+1}$
$\Leftrightarrow \left(15t^2 - 4t + 11\right)^2 = (5 - 2t)^2\left(t^2+1\right) \Leftrightarrow 81t^4 + 177t^2 + 32t + 96 = 0(3)$
Ta có (3) vô nghiệm vì $81t^4 + 177t^2 + 32t + 96 > 0,\ \forall t \in \left[0; \dfrac{5}{12}\right)$
Từ đó ta có với $t \ge 0$ thì (2) vô nghiệm. Do đó từ $(*)$ ta có: $t = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = 0 \Leftrightarrow x = -2$. Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của phương trình là $x = -2$.
-Hướng 2: Đặt hai ẩn phụ. Điều kiện: $x \ge -2$.
Đặt: $\begin{cases} u = \sqrt{x+3} \\ v = \sqrt{x+2} \end{cases}, (u, v \ge 0)$. Ta có: $u^2 - v^2 = 1$. Kết hợp với phương trình đã cho ta có hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{3}{4}u + \dfrac{u+v}{(2u+v)^2} = 1 \\ u^2 - v^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u + \dfrac{4(u+v)}{(u^2-v^2)(2u+v)^2} = 4 \\ u^2 - v^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 3u + \dfrac{4}{(u-v)(2u+v)^2} = 4(4)$

Ở phương trình (4) rõ ràng ta không thể giải bằng cách biến đổi trực tiếp để dùng phép thế hay đặt ẩn phụ nên ta sẽ cách đánh giá phương trình này. Ta quan sát thấy vế phải (4) chỉ chưa hệ số, còn vế phải là một tổng chứa các biến có một bình phương nên ta nghĩ đến đánh giá bằng bất đẳng thức Cauchuy, tuy vậy muốn dùng được bất đẳng thức hiệu quả ta cần tách tổng bên hai vế phải sao cho tích của chúng là một hằng số và dấu đẳng thức xảy ra tại $u = 1$; $v = 0$ do phương trình có nghiệm duy nhất $x = -2$. Từ đó ta biến đổi: $3u + \dfrac{4}{(u-v)(2u+v)^2} = (u - v) + \dfrac{2u+v}{2} + \dfrac{2u+v}{2} + \dfrac{4}{(u-v)(2u+v)^2}$
$\ge 2\sqrt{\dfrac{(u-v)(2u+v)}{2}} + 2\sqrt{\dfrac{2}{(u-v)(2u+v)^2}} \ge 2.2\sqrt[4]{\dfrac{2(u-v)(2u+v)}{2(u-v)(2u+v)}} \ge 4$
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} u - v = \dfrac{2u+v}{2} \\ \dfrac{2u+v}{2} = \dfrac{4}{(u-v)(2u+v)^2} \\ \dfrac{(u-v)(2u+v)}{2} = \dfrac{2}{(u-v)(2u+v)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} = 1 \\ \sqrt{x+2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2$$

Đối chiếu điều kiện phương trình có nghiệm duy nhất $x = -2$. ■
-Bình luận: Đây là một bài toán khá hay, lời giải 1 đưa ta về một phương trình có cách giải quen thuộc, lời giải 2 đưa ta về xử lí một phương trình bằng phương pháp đánh giá bằng bất đẳng thức cũng thú vị không kém. Chú ý ở lời giải 2, ngoài lời giải được trình bày ở trên độc giải có thể sử dụng trực tiếp bất đẳng thức Cauchuy cho 4 số, tuy nhiên khi đi thi đại học phải cần chứng minh lại bất đẳng thức đó.

Ví dụ 48. Giải phương trình $x = 1 + \dfrac{1}{2}\sqrt{x^3 + x^2 - 8x - 2} + \sqrt[3]{x^3 - 20}$.

✍ **Lời giải.**
-Phân tích hướng giải. Phương trình đang xét chứa hai căn bậc lệch và mỗi căn thức đều chứa các đại lượng phương trình bậc ba nên việc nghĩ đến thoát căn bằng phép nâng lũy thừa và ẩn phụ là không khả thi. Với máy tính ta sẽ tìm được nghiệm của phương trình là $1 + \sqrt{3}$, $1 - \sqrt{3}$. Ta có tổng ha nghiệm là 2 và tích hai nghiệm là -2 nên trong phương trình sẽ chứa nhân tử $x^2 - 2x - 2$. Từ đó dẫn đến cho ta sẽ sử dụng phương pháp liên hợp để giải quyết bài toán này. Tuy vậy, mức độ khó khăn chưa dừng ở đó vì ta thấy rằng điều kiện của phương trình sẽ không được biểu diễn tường minh vì phương trình $x^3 + x^2 - 8x - 2 = 0$ có nghiệm rất lẻ. Điều này dự bào trước rằng phương trình còn lại sau khi bắt nhân tử sẽ có khó khăn chờ đợi phía trước.

Điều kiện: $x^3+x^2-8x-2\ge 0(*)$. Phương trình đã cho được biến đổi thành phương trình: $2x-2-2\sqrt[3]{x^3-20}=\sqrt{x^3+x^2-8x-2}(1)$

$\Leftrightarrow (2x-4)-2\sqrt[3]{x^3-20}=\sqrt{x^3+x^2-8x-2}-2$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x-4)^3-8\left(x^3-20\right)}{(2x-4)^2+2(2x-4)\sqrt[3]{x^3-20}+\sqrt[3]{\left(x^3-20\right)^2}}=\frac{(x+3)\left(x^2-2x-2\right)}{\sqrt{x^3+x^2-8x-2}+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-48\left(x^2-2x-2\right)}{(2x-4)^2+2(2x-4)\sqrt[3]{x^3-20}+\sqrt[3]{\left(x^3-20\right)^2}}=\frac{(x+3)\left(x^2-2x-2\right)}{\sqrt{x^3+x^2-8x-2}+2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x-2=0 \\ \dfrac{-48}{(2x-4)^2+2(2x-4)\sqrt[3]{x^3-20}+\sqrt[3]{\left(x^3-20\right)^2}}=\dfrac{x+3}{\sqrt{x^3+x^2-8x-2}+2} \end{array}\right. \quad (2)$$

Bây giờ vấn đề chính đã xuất hiện, đó là làm sao đánh giá được phương trình (2) khi mà điều kiện (1) không biểu diễn được tường minh. Vậy để đánh giá (2) ta tập trung vào các nhận xét sau:

+Ở (2) có chứa hai phân số trong đó đã có một phân số luôn âm, do đó chỉ cần phân số còn lại không âm thì sẽ vô nghiệm.

+Để vế phải (2) không âm ta cần điều kiện $x\ge -3$.

+Hai nghiệm của phương trình đều lớn hơn -3 điều đó có thể suy ra được phương trình có thể sẽ vô nghiệm khi $x<-3$.

+Nếu xét hai trường hợp $x\ge -3$, $x<-3$ thì có nghĩa ta xét trên toàn trục do đó sẽ chứa khoảng nghiệm để điều kiện (1) thỏa nên hoàn toàn có thể yên tâm vì khi đó nếu nó vô nghiệm với $x\ge -3$ thì trong khoảng nghiệm của $(*)$ chứa khoảng $x\ge -3$ cũng không thể có nghiệm được, tương tự cho trường hợp $x<-3$.

Từ các nhận xét này ta dẫn đến hai trường hợp sau:

-Trường hợp 1: Khi $x\ge -3$ thì $x+3\ge 0\Rightarrow \dfrac{x+3}{\sqrt{x^3+x^2-8x-2}+2}\ge 0$. Do đó ta có (2) vô nghiệm

-Trường hợp 2: Khi $x<-3$ thì phương trình (1) vô nghiệm.

Thật vậy vì $2x-2<2\sqrt[3]{x^3-20}$ khi $x<-3$.

Ta có: $2x-2<2\sqrt[3]{x^3-20}\Leftrightarrow (2x-2)^3<8\left(x^3-20\right)\Leftrightarrow 3x^2-3x-19>0$

$\Leftrightarrow x<\dfrac{1}{6}\left(3-\sqrt{237}\right)\vee x>\dfrac{1}{6}\left(3+\sqrt{237}\right)$

Kết hợp với điều kiện $x<-3$ ta được $x<-3$.

Do đó từ hai trường hợp vừa xét ta có: $x^2-2x-2=0\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{3}$

Đối chiếu điều kiện $(*)$ ta có nghiệm của phương trình là: $x=1\pm\sqrt{3}$. ■

-Bình luận. Đây là một bài toán rất khó, cái khó của nó không nằm ở chỗ hướng tách nhân tử mà chính là hướng đánh giá phương trình còn lại sau khi tách nhân tử. Đánh giá này đòi hỏi quá chặt và khó đòi hỏi người giải thật sự tỉnh táo và khéo léo suy nghĩ dẫn dắt tư duy sao cho có thể đẩy được hướng giải quyết hiệu quả nhất.

Ví dụ 49. Giải phương trình $\dfrac{576x}{\left(x+\sqrt{x^2+8}\right)^3}=3x-\dfrac{26}{x}+8\sqrt{x+\dfrac{15}{x^2}}\ (x>0)$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích hướng giải. Quan sát phương trình ta nhận thấy rằng để thoát căn phương trình này bằng các biện pháp nâng lũy thừa hay ẩn phụ hóa là không thể áp dụng. Sử dụng máy tính ta biết phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$. Tuy nhiên để thực hiện việc dùng phương pháp liên hợp để tách được nhân tử $x-1$ quả thật không hề dễ từ phương trình. Vậy với nghiệm duy nhất đó ta chỉ còn một hướng giải quyết cuối cùng đó là sử dụng đánh giá hoặc hàm số hoặc kết hợp cả đánh giá và hàm số để giải quyết bài toán.

Cụ thể ở vế trái phương trình hình thức có thể giúp ta tính đến việc xét hàm số. Thật vậy, ta xét hàm số: $f(x)=\dfrac{x}{\left(x+\sqrt{x^2+8}\right)^3}$ với $x>0$

Ta có: $f'(x)=\dfrac{\left(x+\sqrt{x^2+8}\right)^3-3\left(x+\sqrt{x^2+8}\right)^2\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+8}}\right)x}{\left(x+\sqrt{x^2+8}\right)^6}=\dfrac{1-\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+8}}}{\left(x+\sqrt{x^2+8}\right)^3}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+8}=3x\Leftrightarrow x^2+8=9x^2\Leftrightarrow x=1\ (x>0)$

Lập bảng biến thiên ta thấy $\max f(x)=f(1)=\dfrac{1}{64},\ \forall x>0$

Suy ra $f(x)\le\dfrac{1}{64}\Leftrightarrow 576f(x)\le 9,\ \forall x>0$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=1$.

Bây giờ vấn đề còn lại ta chỉ cần đánh giá được: $3x-\dfrac{26}{x}+8\sqrt{x+\dfrac{15}{x^2}}\ge 9,\ \forall x>0$ và dấu đẳng thức xảy ra tại $x=1$ xem như bài toán được giải quyết trọng vẹn. Với hình thức ở vế phải phương trình đã cho ta cũng có thể nghĩ đến xét hàm số, đạo hàm tuy nhiên điều đó sẽ khó thực hiện được tốt vì ta sẽ khó khăn lúc giải phương trình đạo hàm bằng 0. Do đó ta chọn lựa phương án khác đó là dùng các bất đẳng thức cơ bản để đánh giá.

Từ sự nhận xét: $\sqrt{x+\dfrac{15}{x^2}}=\sqrt{\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{15}}{x}\right)^2}$, cho ta nghĩ đến bất đẳng thức B.C.S.

Thật vậy ta có: $\left(\sqrt{x}+\dfrac{\sqrt{15}.\sqrt{15}}{x}\right)^2\le(1+15)\left[\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{15}}{x}\right)^2\right]=16\left(x+\dfrac{15}{x^2}\right)$

Từ đó ta có: $x+\dfrac{15}{x^2}\ge\dfrac{1}{16}\left(\sqrt{x}+\dfrac{15}{x}\right)^2\Leftrightarrow\sqrt{x+\dfrac{15}{x^2}}\ge\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{x}+\dfrac{15}{x}\right)$

Khi đó ta có: $3x-\dfrac{26}{x}+8\sqrt{x+\dfrac{15}{x^2}}\ge 3x-\dfrac{26}{x}+2\left(\sqrt{x}+\dfrac{15}{x}\right)=3x+2\sqrt{x}+\dfrac{4}{x}$

Vậy ta chỉ cần đánh giá được $3x+2\sqrt{x}+\dfrac{4}{x}\ge 9$ là xem như giải quyết xong.

Để ý bât đẳng thức cuối cùng cần đánh giá bên vế trái là tổng các số hạng, bên trái là một hằng số nên ngoài cách chứng minh bằng phép biến đổi tương đương ta có thể nghĩ dến bất đẳng thức Cauchuy, nhưng nếu cứ để vậy mà áp dụng ta sẽ khó có thể đạt được hiệu quả vì tích các số hạng không cho được kết quả là hằng số do đó ta cần tách các số hạng đó sao cho tích của chúng là 9 và dấu bằng xảy ra tại $x=1$.

Ta biến đổi: $3x+2\sqrt{x}+\dfrac{4}{x}=3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+\left(\sqrt{x}+\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}\right)\ge 6+3=9$. Vậy xem như thành công vì lúc này dấu bằng xảy ra tại $x=1$. Vậy bây giờ ta đi giải quyết cụ thể bài toán như sau:

+Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x}{\left(x+\sqrt{x^2+8}\right)^3}$ với $x>0$.

Ta có: $f'(x)=\dfrac{\left(x+\sqrt{x^2+8}\right)^3-3\left(x+\sqrt{x^2+8}\right)^2\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+8}}\right)x}{\left(x+\sqrt{x^2+8}\right)^6}=\dfrac{1-\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+8}}}{\left(x+\sqrt{x^2+8}\right)^3}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+8}=3x\Leftrightarrow x^2+8=9x^2\Leftrightarrow x=1\ (x>0)$

Lập bảng biến thiên ta thấy $\max f(x)=f(1)=\dfrac{1}{64},\ \forall x>0$

Suy ra $f(x)\le\dfrac{1}{64}\Leftrightarrow 576f(x)\le 9,\ \forall x>0$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=1$.

Mặt khác theo bất đẳng thức B.C.S ta có:

$$\left(\sqrt{x}+\dfrac{\sqrt{15}.\sqrt{15}}{x}\right)^2\le(1+15)\left[\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{15}}{x}\right)^2\right]=16\left(x+\dfrac{15}{x^2}\right)$$

Từ đó ta có: $x=\dfrac{15}{x^2}\geq\dfrac{1}{16}\left(\sqrt{x}+\dfrac{15}{x}\right)^2\Leftrightarrow\sqrt{x+\dfrac{15}{x^2}}\geq\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{x}+\dfrac{15}{x}\right)$

Vậy: $3x-\dfrac{26}{x}+8\sqrt{x+\dfrac{15}{x^2}}\geq 3x-\dfrac{26}{x}+2\left(\sqrt{x}+\dfrac{15}{x}\right)=3x+2\sqrt{x}+\dfrac{4}{x}$

Theo bất đẳng thức Cauchuy ta lại có:

$3x+2\sqrt{x}+\dfrac{4}{x}=3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+\left(\sqrt{x}+\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}\right)\geq 6+3=9.$

Do đó: $3x-\dfrac{26}{x}+8\sqrt{x+\dfrac{15}{x^2}}\geq 9$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{15}}{\dfrac{\sqrt{15}}{x}}\\ x=\dfrac{1}{x}\\ \sqrt{x}=\dfrac{1}{x}\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$$

Vậy ta có: $\dfrac{576x}{\left(x+\sqrt{x^2+8}\right)^3}\leq 9\leq 3x-\dfrac{26}{x}+8\sqrt{x+\dfrac{15}{x^2}}$ do đó:

$\dfrac{576x}{\left(x+\sqrt{x^2+8}\right)^3}=3x-\dfrac{26}{x}+8\sqrt{x+\dfrac{15}{x^2}}$ khi và chỉ khi.

Do đó phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$. ■

-Bình luận. Đây là một bài toán khó, đường hướng giải quyết chúng tôi đưa ra có thể là phương án tốt nhất cho bài toán này nó đòi hỏi sự đánh giá của cả hai kĩ thuật thường dùng trong phương trình vô tỷ đó là hàm số và các bất đẳng thức cơ bản.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN CUỐI CHƯƠNG 2

Giải các phương trình sau trên tập số thực.

① $\sqrt{2x+\sqrt{6x^2+1}}=x+1$. Hướng dẫn: Sử dụng phép nâng lũy thừa hai vế. Đáp số: $x=\{0;2\}$

② $\sqrt{9x^2-26x+1}-1=\sqrt{7x^2-20x-2}$. Hướng dẫn: Chuyển vế sử dụng phép nâng lũy thừa. Đáp số: $x=\left\{-1;3;2\pm\sqrt{5}\right\}$.

③ $(2x-5)\sqrt{2x+3}=\left(\dfrac{2}{3}x+1\right)\sqrt{\dfrac{2}{3}x-1}$. Hướng dẫn: Sử dụng phép nâng lũy thừa. Đáp số: $x=3$.

④ $6\left(x+1-\sqrt{4x+1}\right)=5\sqrt{(2-x)(4x+1)}-3\sqrt{2-x}$. Hướng dẫn: Biến đổi trực tiếp thành tích hoặc đặt ẩn phụ thoát căn. Đáp số: $x=\left\{-\dfrac{2}{17};2\right\}$. Bài 5. $\dfrac{4}{x}+\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=x+\sqrt{2x-\dfrac{5}{x}}$. Hướng dẫn: Biến đổi trực tiếp thành tích hoặc đặt ẩn phụ thoát căn. Đáp số: $x=2$.

⑤ $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{2x+1}=x\sqrt[3]{16}$. Hướng dẫn: Sử dụng phép nâng lũy thừa. Đáp số: $x=\left\{0;\pm\dfrac{1}{2};\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3\sqrt{5}+2}{2}}\right\}$

⑥ $x=\sqrt{2-x}\sqrt{3-x}+\sqrt{3-x}\sqrt{6-x}+\sqrt{6-x}\sqrt{2-x}$. Hướng dẫn: Sử dụng phép nâng lũy thừa hoặc đặt ẩn phụ hoặc sử dụng hàm số. Đáp số: $x=2$.

⑦ $\dfrac{9x^3}{\left(\sqrt{3x+1}-1\right)^2}=6x^2-13x+8$. Hướng dẫn: Khử mẫu biến đổi phương trình về $A^2=B^2$. Đáp số: $x=\left\{8;\dfrac{21-\sqrt{159}}{18}\right\}$.

⑧ $\sqrt{x^2+4x+3}+\sqrt{x^2+x}=\sqrt{3x^2+4x+1}$. Hướng dẫn: Sử dụng điều kiện giản ước hoặc sử dụng nâng lũy thừa. Đáp số: $x=\left\{-1;\dfrac{-8-\sqrt{76}}{3}\right\}$.

(9) $\sqrt{4x+1}-\sqrt{3x+2}=\dfrac{x+3}{5}$. Hướng dẫn: Sử dụng ẩn phụ hóa đưa về hệ phương trình hoạ liên hợp kiểu ngang vế trái phương trình biến đổi tách tích. Đáp số: $x=2$.

(10) $x^3-2x^2\sqrt[3]{3x-2}-2x\left(1-\sqrt[3]{(3x-2)^2}\right)=1$. Hướng dẫn: Sử dụng ẩn phụ hóa căn thức. Đáp số: $x=\{-2;1\}$.

(11) $\sqrt{2-\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}}=\dfrac{1}{x}$. Hướng dẫn: Sử dụng phép nâng lũy thừa và ẩn phụ hóa. Đáp số: $x=\left\{1;\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

(12) $\dfrac{6}{x+3}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{-2+3\sqrt{1+x}}}$. Hướng dẫn: Ẩn phụ hóa hai căn thức đưa về phương trình tích. Đáp số: $x=\{0;3\}$.

(13) $\sqrt{(1+x)^3}-3x=\sqrt{(1-x)^3}$. Hướng dẫn: Ẩn phụ hóa căn thức. Đáp số: $x=0$.

(14) $3\left(x^2+1\right)^2-15=8x^2\sqrt{2\left(2-x\right)^2}$. Hướng dẫn: Đặt ẩn phụ $u=x^2+1$; $v=\sqrt{2\left(2-x^2\right)}$ Đáp số: $x=\pm\sqrt{3\sqrt{13}-9}$.

(15) $\left(x^2-6x+11\right)\sqrt{x^2-x+1}=2\left(x^2-4x+7\right)\sqrt{x-2}$. Hướng dẫn: Sử dụng ẩn phụ hóa hai căn thức hoặc thêm bớt liên hợp tách nhân tử x^2-2x+3. Đáp số: $x=5\pm\sqrt{6}$.

(16) $2\sqrt{x^3-2x^2+x+4}=x^2-2x+5$. Hướng dẫn: Để ý: $x^3-2x^2+x+4=(x+1)\left(x^2-3x+4\right)$. Đặt ẩn phụ hóa. Đáp số: $x=\{1;3\}$.

(17) $\sqrt[3]{(4x+1)^2}+\sqrt{x+1}\sqrt[3]{4x+1}=(x+1)\left(\sqrt[3]{4x+1}+\sqrt{x+1}\right)$. Hướng dẫn: Đặt ẩn phụ hóa căn thức. Đáp số: $x=\left\{0;\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}\right\}$.

(18) $\sqrt{x}+\sqrt{x^2+1}=\sqrt{2x^2-3x-4}$. Hướng dẫn: Bình phương hai vế và ẩn phụ hóa. Đáp số: $x=5+\sqrt{34}$.

(19) $\dfrac{x^3-2x}{x^2-1-\sqrt{x^2-1}}=2\sqrt{6}$. Hướng dẫn: Sử dụng tách nhân tử và ẩn phụ hóa. Đáp số: $x=\left\{\sqrt{8+\sqrt{48}};\sqrt{8-\sqrt{48}}\right\}$.

(20) $x^2\left(x+3\sqrt{x}+\dfrac{9}{2}\right)+x\left(4\sqrt{x}+\dfrac{13}{4}\right)=\dfrac{11}{8}-\dfrac{7}{4}\sqrt{x}$ Hướng dẫn: Biến đổi phương trình và đặt $t=x+\sqrt{x}+\dfrac{1}{2}$. Đáp số: $x=2\left(2-\sqrt{3}\right)$.

(21) $\sqrt{\dfrac{x-2}{x-1}}+\dfrac{x+2}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)^2}=1$. Hướng dẫn: Biến đổi phương trình đặt $u=\sqrt{\dfrac{x-2}{x-1}}$; $v=\sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}$ hoặc đặt $t=\sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}$ Đáp số: $x=2$.

(22) $2(5x-3)\sqrt{x+1}+5(x+1)\sqrt{3-x}=3(5x+1)$. Hướng dẫn: Đặt ẩn phụ hóa các căn thức hoặc chỉ một căn thức. Đáp số: $x=\left\{-\dfrac{1}{5};\dfrac{11}{25};3\right\}$.

(23) $\dfrac{4x-1}{\sqrt{4x-3}}+\dfrac{11-2x}{\sqrt{5-x}}=\dfrac{15}{2}$. Hướng dẫn: Sử dụng ẩn phụ hóa hai căn thức hoặc biến đổi phương trình rồi đặt ẩn phụ. Đáp số: $x=\left\{1;\dfrac{19}{4}\right\}$.

(24) $\dfrac{3x+2}{2}\sqrt{4x^2-x-1}=3x^2+2x-2$. Hướng dẫn: Sử dụng ẩn phụ hóa căn thức đưa phương trình về phương trình tham số biến thiên có biệt thức Δ là số chính phương. Đáp số: $x=\left\{-1;\dfrac{2}{3};\dfrac{10}{3}\right\}$.

(25) $3(x+1)^2+x\left(\sqrt{2-x^2}-9\right)=4$. Hướng dẫn: Sử dụng phép nâng lũy thừa hoặc ẩn phụ hóa căn thức đưa về phương trình tham số biến thiên có biệt thức Δ chính phương. Đáp số: $x=$

$\left\{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{3}\right);1\right\}$.

26 $(3x^2+2x+1)\sqrt{x^2-3x+3}=3x^3-4x^2+4x+3$. Hướng dẫn: Đặt $t=\sqrt{x^2-3x+3}$. Đáp số: $x=\left\{1;\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}\right\}$.

27 $(15x+1)x^2-7(x+1)=4(3x-1)\sqrt{(x+1)(3x-1)}$. Hướng dẫn: Sử dụng ẩn phụ hóa. Đáp số: $x=\pm1$.

28 $3x^2+6x-3=\sqrt{\frac{x+7}{3}}$. Hướng dẫn: Sử dụng phép nâng lũy thừa hoặc đặt ẩn phụ hóa đưa về hệ phương trình đối xứng. Đáp số: $x=\left\{\frac{-5+\sqrt{73}}{6};\frac{-7-\sqrt{69}}{6}\right\}$.

29 $4x^2-11x+10=(x-1)\sqrt{2x^2-6x+2}$. Hướng dẫn: Sử dụng ẩn phụ hóa đưa phương trình về hệ phương trình đối xứng. Đáp số: $x=\varnothing$

30 $3x+\frac{1}{\sqrt{2x-7}}+\frac{1}{\sqrt{x-3}}=2\left(\sqrt[4]{2x-7}+\sqrt[4]{x-3}+5\right)$. Hướng dẫn: Ẩn phụ hóa đưa phương trình về tổng hai số không âm. Đáp số: $x=4$.

31 $(3x+1)^2-2(x+1)\sqrt{3x+1}=2(2x+1)\sqrt{4x^2+5}-3x-7$ Hướng dẫn: Sử dụng hằng đẳng thức đưa phương trình về tổng hai số không âm. Đáp số: $x=1$.

32 $9x^2\left(\sqrt{3x-4}-4\right)+18(3x-4)=38+10\sqrt{6x+9}$. Hướng dẫn: Sử dụng hằng đẳng thức biến đổi phương trình về tổng hai số không âm. Đáp số: $x=\frac{8}{3}$.

33 $4\left(\sqrt{x+1}-3\right)x^2+\left(13\sqrt{x+1}-8\right)x=3+4\sqrt{x-1}$. Hướng dẫn. Sử dụng hằng đẳng thức biến đổi phương trình về tổng hai số không âm hoặc ẩn phụ hóa. Đáp số: $x=\frac{5}{4}$.

34 $2\sqrt{x+\sqrt{2x+1}}+\sqrt{2}(x^2+3x+1)=\sqrt{2(x-3)}$. Hướng dẫn: Sử dụng hằng đẳng thức và liên hợp. Đáp số: $x=\varnothing$.

35 $\sqrt{x-2}+2\sqrt{x^3-5x^2+11x-10}+\sqrt{5x+6}=2x$. Hướng dẫn: Sử dụng liên hợp. Đáp số: $x=2$.

36 $\sqrt[3]{x+6}+x^2=7-\sqrt{x+1}$. Hướng dẫn: Sử dụng liên hợp. Đáp số: $x=2$.

37 $x+4-\sqrt{x(x+8)}=\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)^4$. Hướng dẫn: Sử dụng liên hợp. Đáp số: $x=\frac{1+\sqrt{257}}{16}$.

38 $\sqrt{x+1}+\frac{4\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}\right)}{3\left(\sqrt{x-2}+1\right)^2}=3$. Hướng dẫn: Đặt ẩn phụ đưa về liên hợp hoặc đánh giá bằng bất đẳng thức Cauchuy. Đáp số: $x=3$.

39 $x-1+\sqrt[3]{\frac{7}{4}-x^3}=\sqrt{4x^2-4x-1}$. Hướng dẫn: Sử dụng liên hợp. Đáp số: $x=\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}$.

40 $\sqrt{x}+\sqrt{3-x}=x^2-x-2$. Hướng dẫn: Sử dụng liên hợp. Đáp số: $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

41 $\sqrt{2x^2+48x-27}+x\sqrt{2x^2-24x+67}=4x+6$. Hướng dẫn: Sử dụng liên hợp và kết hợp với phương trình đã cho. Đáp số: $x=\left\{6\pm\frac{3\sqrt{2}}{2};6-3\sqrt{3}\right\}$.

42 $\sqrt{x+7}-\sqrt{x-2}+5\sqrt{x^3-4x^2+7x-6}=3(3-x)$. Hướng dẫn: Sử dụng liên hợp. Đáp số: $x=2$.

43 $2\left(\sqrt{1-5x}-\sqrt{x}-\sqrt{x-x^2}\right)=x-1$. Hướng dẫn: Sử dụng liên hợp. Đáp số: $x=3-2\sqrt{2}$.

44 $\sqrt{x+8}=\frac{2(3x^3+3x^2-x+4)}{2x^2+5x-1}$. Hướng dẫn: Sử dụng liên hợp hoặc ẩn phụ. Đáp số: $x=\left\{1;\frac{1}{2}\left(-2-\sqrt[3]{6}\right)\right\}$.

45 $2x^2-x-\frac{1}{8}=\sqrt[3]{\frac{9}{8x^2}+\frac{1}{x}-1}$. Hướng dẫn: Sử dụng hàm số đặc trưng. Đáp số: $x=\frac{1}{4}\left(-1\pm\sqrt{10}\right)$.

46 $2x^4+4x^3+3x^2+17x-24=2\sqrt{3-2x}$. Hướng dẫn: Sử dụng hàm số đặc trưng. Đáp số: $x=\{-3;1\}$.

47 $3x^3-6x^2-3x-17=3\sqrt[3]{9\left(-3x^2+21x+5\right)}$. Hướng dẫn: Sử dụng hàm đặc trưng. Đáp số:$x=\dfrac{2}{\sqrt[3]{4}-1}$.

48 $3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)+(4x+2)\left(1+\sqrt{1+x+x^2}\right)$. Hướng dẫn: Sử dụng hàm số đặc trưng. Đáp số: $x=-\dfrac{1}{5}$.

49 $\sqrt{1+x^2}-\sqrt{x^2+x+4}=\sqrt{x^2+x+5}+x$. Hướng dẫn: Đặt $t=\sqrt{x^2+x+4}$, kết hợp với xét hàm số đặc trưng. Đáp số: $x=4$.

50 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}\right)^2=\dfrac{4\left(1+\sqrt{1+4x}\right)}{x+\sqrt{x^2+3x+2}+1}$. Hướng dẫn: Sử dụng xét hàm số đặc trưng. Đáp số: $x=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$.

51 $15x^2+10\sqrt{(x+1)^3}+26=6\sqrt{(x+1)^5}+30\sqrt{x+1}$. Hướng dẫn: Đặt ẩn phụ căn thức kết hợp với sử dùng tính đơn điệu của hàm số. Đáp số: $x=0$.

52 $\left|\sqrt{x^2-2x+5}-\sqrt{x^2-6x+10}\right|=\sqrt{5}$. Hướng dẫn: Sử dụng bất đẳng thức hình học đánh giá. Đáp số: $x=5$.

53 $\sqrt{x^2=4x+8}+\sqrt{4x^2+12x+10}+\sqrt{9x^2-30x+50}=10$. Hướng dẫn: Sử dụng bất đẳng thức hình học đánh giá. Đáp số: $x=\varnothing$.

54 $(x+9\sqrt{x}+16)(x-4\sqrt{x}+16)=68x$. Hướng dẫn: Sử dụng bất đẳng thức Cauchuy đánh giá. Đáp số: $x=16$.

55 $(2-x)\sqrt{x}+\sqrt{3-2x}=\sqrt{-x^3+7x^2-17x+15}$. Hướng dẫn: Sử dụng bất đẳng thức B.C.S đánh giá. Đáp số: $x=1$.

56 $20x^2+16x+129-28\sqrt{8x+7}=\dfrac{36\left(x^2+6x+13\right)}{\sqrt{3+4x}+\sqrt{5-4x}+5}$. Hướng dẫn: Sử dụng hàm số hoặc bất đẳng thức B.C.S đánh giá. Đáp số: $x=\dfrac{1}{4}$.

57 $x^2+\dfrac{1}{x^2}\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)=2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$. Hướng dẫn: Sử dụng bất đẳng thức để đánh giá. Đáp số: $x=\pm\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

CHƯƠNG

3

SỰ KẾT HỢP GIỮA CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

-Chương này giới thiệu cùng bạn đọc:
Chương đầu tiên của cuốn sách đã cung cấp cho chúng ta đầy đủ các phương pháp điển hình được sử dụng để giải một phương trình vô tỷ.
Chương thứ hai đã giúp cho chúng ta có được những hướng đi đúng đắn và sự lựa chọn phương pháp giải tối ưu khi đứng trước một phương trình vô tỷ.
Trong chương thứ ba này, các bạn đọc giải sẽ được trải nghiệm một lớp các phương trình vô tỷ. Mà, nếu chỉ sử dụng một phương pháp nào đó ta rất khó có thể giải quyết được hoàn toàn phương trình. Nhưng khi ta biết kết hợp nhiều phương pháp lại với nhau, các phương trình vô tỷ sẽ được giải quyết một cách triệt để. Và sự kết hợp đó chúng tôi gọi là "nghệ thuật giải phương trình vô tỷ". Sở dĩ chúng tôi gọi như vậy bởi vì sự kết hợp nhiều phương pháp giải một phương trình vô tỷ sẽ cho ta một lời giải không chỉ hoàn thiện mà còn rất tự nhiên. Ngay sau đây sẽ là một hệ thống các bài tập điển hình nhằm rèn luyện các bạn những kỹ năng thiết yếu nhất của "nghệ thuật kết hợp" này.

A SỰ KẾT HỢP GIỮA PHƯƠNG PHÁP NÂNG LŨY THỪA VÀ CÁC PHƯƠNG PHÁP KHÁC

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sqrt{12x\left(x-1\right)-48\sqrt[3]{2x^2+1}+77}=2x-3.$

✍ **Lời giải.**
-Phân tích. Phương trình có dạng $\sqrt{f(x)}=g(x)$ nên bước đầu chúng ta có thể nghĩ ngay đến phương pháp nâng lũy thừa để phá bỏ lớp căn thức ngoài cùng. Sau phép nâng lũy thừa hai vế phương trình ta thu được phương trình sau đây: $2x^2+17-12\sqrt[3]{2x^2+1}=0(1)$
Nếu tiếp tục thực hiện phép nâng lũy thừa cho phương trình này, ta sẽ thu được phương trình bậc cao lại không có nghiệm hữu tỉ. Với đặc điểm các biểu thức trong phương trình (1) , chúng ta có thể nghĩ đến một hướng giải khác đó là sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ. Từ đó, ta có lời giải cho bài toán như sau: Điều kiện: $12x\left(x-1\right)-48\sqrt[3]{2x^2+1}+77\geq 0$. Khi đó, phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases}12x\left(x-1\right)-48\sqrt[3]{2x^2+1}+77=\left(2x-3\right)^2\\ 2x-3\geq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2+17-12\sqrt[3]{2x^2+1}=0(1)\\ x\geq\dfrac{3}{2}\end{cases}.$$ Đặt $t=\sqrt[3]{2x^2+1}\left(t\geq\sqrt[3]{\dfrac{11}{2}}\right)$.

Phương trình trở thành: $t^3-12t+16=0\Leftrightarrow\left(t-2\right)^2\left(t+4\right)=0\Leftrightarrow t=2.$

Ta có $t=2\Leftrightarrow\sqrt[3]{2x^2+1}=2\Leftrightarrow 2x^2=7\Leftrightarrow x=\sqrt{\dfrac{7}{2}}$ (vì $x\geq\dfrac{3}{2}$). Giá trị $x=\sqrt{\dfrac{7}{2}}$ thỏa mãn phương trình ban đầu nên đây là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho. ■

noindent -Bình luận. Đôi khi ta gặp một số phương trình mà việc tìm điều kiện của ẩn khó khăn thì ta không nhất thiết phải tìm ra các giá trị cụ thể của ẩn để phương trình xác định. Chú ý khi tìm được nghiệm thì phải thử lại các điều kiện của bài toán. Rõ ràng, trong bài toán trên nếu chỉ sử dụng mỗi phương pháp nâng lũy thừa không thôi thì phương trình chưa thể giải quyết được hoàn toàn. Nhưng khi có sự kết hợp với phương pháp đặt ẩn phụ, bài toán được giải quyết hoàn toàn và lời giải cho bài toán trên rất tự nhiên và ngắn gọn.

1 Bài tập tương tự

1. Giải phương trình $1+2x=\sqrt{4\left(x+6\right)+3\sqrt{x^2-6}+2}$
2. Giải phương trình $\sqrt[3]{4\sqrt{x+1}-1}=\sqrt{\sqrt[4]{256x+256}-7}$

Ví dụ 2. Giải phương trình $\sqrt{5x^2+14x+9}-\sqrt{x^2-x-20}=5\sqrt{x+1}$
(Đề thi HSG các trường chuyên KV Duyên hải và Đồng Bằng Bắc Bộ năm 2010).

Lời giải.
-Phân tích. Đối với phương trình này, ý tưởng đầu tiên xuất hiện trong đầu ta đó là thực hiện phương pháp nâng lũy thừa. Tuy nhiên, để đảm bảo hai vế không âm, sau khi chuyển vế và thực hiện bình phương hai vế ta được:
$\left(x-1\right)\left(5x-9\right)=x^2+24x+5+10\sqrt{\left(x+4\right)\left(x-5\right)\left(x+1\right)}(*)$
Nếu tiếp tục thực hiện phép nâng lũy thừa cho phương trình $(*)$ ta sẽ thu được phương trình bậc cao sẽ gây khó khăn cho ta. Điều này có nghĩa là phương pháp nâng lũy thừa không thể một mình giải quyết hoàn toàn được phương trình trên. Do đó, ta cần một hướng đi khác để giải quyết phương trình $(*)$. Bằng kĩ năng biến đổi khéo léo phương trình $(*)$ ta có:
$(*)\Leftrightarrow 2\left(x^2-4x-5\right)+3\left(x+4\right)-5\sqrt{\left(x^2-4x-5\right)\left(x+4\right)}=0$
Đến đây, phương trình $(*)$ đã lộ rõ nguyên hình. Đây rõ ràng là một phương trình đẳng cấp bậc 2, và để giải quyết nó một cách đơn giản nhất ta sẽ chọn phương pháp đặt ẩn phụ. Điều kiện: $\begin{cases}5x^2+14x+9\ge 0\\ x^2-x-20\ge 0\\ x+1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 5$. Khi đó, chuyển vế rồi bình phương hai vế ta được: $\left(x-1\right)\left(5x-9\right)=x^2+24x+5+10\sqrt{\left(x+4\right)\left(x-5\right)\left(x+1\right)}$
$\Leftrightarrow 2\left(x^2-4x-5\right)+3\left(x+4\right)-5\sqrt{\left(x^2-4x-5\right)\left(x+4\right)}=0$
Đặt $a=\sqrt{x^2-4x-5}\ge 0$, $b=\sqrt{x+4}\ge 0$. Phương trình trở thành
$$2a^2+3b^2-5ab=0\Leftrightarrow\left(a-b\right)\left(2a-3b\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b\\ 2a=3b\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-5x-9=0\\ 4x^2-25x-56=0\end{array}\right.$$
Giải ra ta được 2 nghiệm thỏa mãn: $x=8$; $x=\dfrac{5+\sqrt{61}}{2}$. ■
-Bình luận. Bước khởi đầu trong lời giải ta chọn phương pháp nâng lũy thừa là hết sức tự nhiên. Và đằng sau điều tự nhiên này, ta đã chuyển được phương trình về dạng:
$ax^2+bx+c=\sqrt{a_1x^3+b_1x^2+c_1x+d_1}$.
Đối với phương trình dạng này thì ý tưởng phân tích thành dạng phương trình đẳng cấp cũng chỉ là một trong những hướng đi đã định sẵn mà thôi. Sự kết hợp giữa hai phương pháp nâng lũy thừa và phương pháp đặt ẩn phụ đối với phương trình trên giống như số phận đã an bài. Chính vì vậy mà phương trình đã được giải quyết hoàn toàn.

Bài tập tương tự

1. Giải phương trình $\sqrt{14x^2+74x-515}-11\sqrt{x-4}=\sqrt{2x^2+3x+1}$
2. Giải phương trình $\sqrt{4x^3+5x^2-26x+14}-2\sqrt{x^3-2x^2-3x+6}=\sqrt{6x+4}$

Ví dụ 3. Giải phương trình $x+1=\sqrt[3]{4x^2+5x}$

Lời giải.

-Phân tích. Phương trình có dạng tương tự bài 1. Sử dụng phép nâng lũy thừa hai vế phương trình ta có được:$(x+1)^3 = 4x^2 + 5x \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0(1)$
Dạng phương trình bậc 3 thường có ít nhất một nghiệm hữu tỷ và ta có thể sử dụng phép chia đa thức để phân tích đa thức bậc 3 thành tích một nhị thức bậc nhất và một tam thức bậc 2, từ đó tìm nghiệm của phương trình. Mà phương trình (1) không có nghiệm hữu tỷ đã gây khó khăn cho việc tìm nghiệm của phương trình.Do đó, phương pháp nâng lũy thừa chưa thể giải quyết được hoàn toàn phương trình đã cho. Tuy vậy, bằng cách sử dụng máy tính bỏ túi ta có thể thấy được phương trình (1) có 3 nghiệm thuộc khoảng $(-2;2)$. Đâycó thể là một cơ sở để ta có thể nghĩ đến việc sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ (lượng giác hóa) để giải quyết phương trình (1) . Bằng cách lập phương hai vế và biến đổi, ta được: $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0(1)$
Đặt $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$, ta có $f(-2) = -7$, $f(-1) = 1$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$, $f(2) = 1$.

Suy ra $\begin{cases} f(-2).f(-1) < 0 \\ f(-1).f\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \\ f\left(\frac{1}{2}\right).f(2) < 0 \end{cases}$

Hơn nữa, $f(x)$ liên tục Suy ra phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-2;2)$. Đặt $x = 2\cos\alpha$ với $\alpha \in (0;\pi)$.
Khi đó phương trình (1) trở thành: $8\cos^3\alpha - 4\cos^2\alpha - 4\cos\alpha + 1 = 0$
$\Leftrightarrow 4\cos\alpha\left(2\cos^2\alpha - 1\right) = 4\left(1 - \sin^2\alpha\right) - 1 \Leftrightarrow 4\cos\alpha.\cos 2\alpha = 3 - 4\sin^2\alpha$
$\Leftrightarrow 4\sin\alpha.\cos\alpha.\cos 2\alpha = 3\sin\alpha - 4sin^3\alpha$ (do $\sin\alpha > 0$)

$\Leftrightarrow \sin 4\alpha = \sin 3\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = k2\pi \\ \alpha = \frac{\pi}{7} + \frac{k2\pi}{7} \end{array}\right.$

Vì $\alpha \in (0;\pi)$ nên $\alpha \in \left\{\frac{\pi}{7}; \frac{3\pi}{7}; \frac{5\pi}{7}\right\}$. Do đó, tập nghiệm của phương trình đã cho là
$T = \left\{2\cos\frac{\pi}{7}; 2\cos\frac{3\pi}{7}; 2\cos\frac{5\pi}{7}\right\}$. ■

-Bình luận. Rõ ràng với phương trình này, nếu không có sự hậu thuẫn bằng phương pháp lượng giác hóa thì phương trình chưa được giải quyết một cách trọn vẹn.

Bài tập tương tự

1. Giải phương trình $8x^2 - 12x + 3 = \sqrt[3]{1-2x}$.
2. Giải phương trình $x + \sqrt[3]{6x^3 - 6x + 6x^2\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1,5}} = \sqrt{1-x^2}$

Ví dụ 4. Giải phương trình $x + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{35}{12}$

✍ Lời giải.

-Phân tích. Để ý rằng $x^2 + \frac{x^2}{x^2-1} = \frac{x^4}{x^2-1} = \left(x.\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)^2$. Do đó, sau khi thực hiện phép bình phương hai vế phương trình ta thu được
$\frac{x^4}{x^2-1} + 2.\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = \left(\frac{35}{12}\right)^2 (*)$
Sau phép nâng lũy thừa ta lại thu được một phương trình mới. Tức là, muốn tìm được nghiệm của phương trình ban đầu ta cần phải giải quyết được phương trình $(*)$. Với đặc điểm của phương trình $(*)$ thì ý tưởng đặt ẩn phụ đã quá rõ ràng. Sau đây là lời giải cho bài toán: Điều kiện: $x > 1$ hoặc $x < -1$. Dễ dàng nhận thấy nếu $x < -1$ thì phương trình trên vô nghiệm. Do đó ta chỉ cần xét $x > 1$. Lúc này,

bình phương hai vế phương trình ta được: $\dfrac{x^4}{x^2-1}+2.\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\left(\dfrac{35}{12}\right)^2$ (*)

Đặt $t=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}>0$

Phương trình (*) trở thành $t^2+2t-\left(\dfrac{35}{12}\right)^2=0\Leftrightarrow t=\dfrac{25}{12}$ (với $t>0$)

Với $t=\dfrac{25}{12}$ ta có $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{25}{12}\Leftrightarrow 144x^4-625x^2+625=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=\dfrac{25}{16}\\x^2=\dfrac{25}{9}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{5}{4}\\x=\pm\dfrac{5}{3}\end{array}\right.$

Kiểm tra lại điều kiện ban đầu ta có 2 giá trị thỏa mãn đó là $x=\dfrac{5}{3}$; $x=\dfrac{5}{4}$.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm $x=\dfrac{5}{3}$; $x=\dfrac{5}{4}$.

-Bình luận. Trong phương trình trên, sử dụng phương pháp nâng lũy thừa đầu tiên không phải nhằm mục đích phá bỏ căn thức mà cơ sở của nó là mối quan hệ giữa các biểu thức sau phép nâng lũy thừa. Ngoài ra, chúng t cũng có thể giả quyết phương trình ban đầu bằng một hướng khác. Chẳng hạn ta đặt $x=\dfrac{1}{\cos t}$, $t\in(0;\pi)$. Dạng tổng quát của phương trình trên: $x+\dfrac{ax}{\sqrt{x^2-a^2}}=b$.

Hãy cùng thực hiện với hai bài tập tương tự:

1. Giải phương trình $\dfrac{x}{\sqrt{2x^2-1}}=2-x$

2. Giải phương trình $\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{\sqrt{2x-x^2-1}}=1-x$

Ví dụ 5. Giải phương trình $\sqrt{4-3\sqrt{10-3x}}=x-2$ (HSG Toàn Quốc 2002)

Lời giải.

-Phân tích. Phương trình có dạng $\sqrt{f(x)}=g(x)$. Do đó, bằng phép bình phương hai vế phương trình ta được $4-3\sqrt{10-3x}=(x-2)^2$ (1)

Rõ ràng, phương trình chưa thể giải quyết được hoàn toàn. Nếu tiếp tục sử dụng phép nâng lũy thừa, kết quả thu được là một phương trình bậc 4 và từ đó ta có thể tìm được nghiệm của phương trình. Tuy nhiên, bằng một sự tinh tế nho nhỏ, chúng ta có thể biểu diễn phương trình (1) dưới dạng:

$(10-3x)-3\sqrt{10-3x}=(x-2)^2-3(x-2)$

Điều này dẫn đến ý tưởng sử dụng phương pháp hàm số để giải quyết phương trình (1) được hay không? Từ đó, bài toán có thể được giải quyết bằng sự kết hợp giữa phương pháp nâng lũy thừa và phương pháp hàm số như sau: Phương trình tương đương với $\left\{\begin{array}{l}2\le x\le\dfrac{10}{3}\\0\le\sqrt{10-3x}\le\dfrac{4}{3}\\4-3\sqrt{10-3x}=(x-2)^2\ (1)\end{array}\right.$

Xét hàm số $f(t)=t^2-3t$ có $f'(t)=2t-3\le\dfrac{8}{3}-3=-\dfrac{1}{3}<0$, $\forall t\in\left[0;\dfrac{4}{3}\right]$, nên hàm $f(t)$ nghịch biến trong đoạn $\left[0;\dfrac{4}{3}\right]$

Mặt khác, ta có $\sqrt{10-3x}$, $(x-2)$ đều thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{4}{3}\right]$

Do đó, (1) $\Leftrightarrow f\left(\sqrt{10-3x}\right)=f(x-2)\Leftrightarrow\sqrt{10-3x}=x-2$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 10-3x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-2\,(\text{loại}) \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=3$. ■

-Bình luận. Cái hay trong lời giải trên đó là xét hàm số $f(t)=t^2-3t$. Bởi vì, $f'(t)=2t-3$ chưa thể khẳng định được $f(t)$ đồng biến hay nghịch biến. Cho nên, để ý để sử dụng phương pháp hàm số được thuận lợi ta cần tìm miền xác định của biến t để khi đó hàm số $f(t)$ đồng biến hoặc nghịch biến. Và đây cũng chính là điều khó khăn nhất trong lời giải trên.
Đối với phương trình trên, hướng giải quyết tự nhiên và đơn giản hơn cả đó là đưa về phương trình bậc 4 để giải. Nhưng tại sao chúng tôi lại đưa ra lời giải có sự kết hợp hai phương pháp giải như trên?
Xu hướng hiện nay, những ý tưởng mới luôn xuất hiện trong các bài toán. Đó chính là sự sang tạo bất nguồn từ sự thay đổi của tư duy. Vì thế, ngoài những lối tư duy cũ chúng ta nên tiếp cận các bài toán với cách tư duy mới. Tiếp theo, mời các bạn độc giả cùng đến với một bài toán có dạng tương tự.

Ví dụ 6. Giải phương trình $\sqrt[3]{14\sqrt[3]{2x^2+6}-(x+9)(4-2x)}=3-x$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích. Bằng cách lập phương hai vế phương trình ta được
$(3-x)^3+(x+9)(4-2x)=14\sqrt[3]{2x^2+6}$
Nếu ta tiếp tục sử dụng phương pháp nâng lũy thừa cho phương trình trên, kết quả sẽ cho ra một phương trình bậc rất cao. Chắc chắn ta sẽ gặp khó khăn trong quá trình biến đổi phương trình bậc cao đó. Tuy vậy, bằng phương pháp hàm số chúng ta có thể giải quyết phương trình một cách nhẹ nhàng mà không mất nhiều thời gain tính toán. Phương trình đã cho tương đương với $14\sqrt[3]{2x^2+6}-(x+9)(4-2x)=(3-x)^3$
$\Leftrightarrow (3-x)^3+14(3-x)=2x^2+6+14\sqrt[3]{2x^2+6}$
Xét hàm số $f(t)=t^3+14t$ xác định trên và $f'(t)=3t^2+14>0$, nên hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên tập . Do đó, từ phương trình trên ta có $f(3-x)=f\left(\sqrt[3]{2x^2+6}\right) \Leftrightarrow 3-x=\sqrt[3]{2x^2+6}(*)$
Ta có $x=1$ thỏa mãn phương trình $(*)$. Mà vế trái của phương trình $(*)$ là hàm nghịch biến, còn vế phải phương trình $(*)$ là hàm đồng biến. Do đó, $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình $(*)$.
Vậy, $x=1$ là nghiệm của phương trình đã cho. ■

-Bình luận. Bài toán này tuy có dạng tương tự ví dụ 4, nhưng đối với bài toán này thì lời giải trên là một sự lựa chọn hợp lý khi kết hợp giữa phương pháp nâng lũy thừa và phương pháp hàm số.

Ví dụ 7. Giải phương trình $2\sqrt{2x+4}+4\sqrt{2-x}=\sqrt{9x^2+16}$

✍ **Lời giải.**

-Phân tích. Theo hướng tự nhiên ta có thể thực hiện phép nâng lũy thừa và đưa phương trình về dạng: $8(4-x^2)+16\sqrt{2(4-x^2)}=x^2+8x$
Nếu quan sát kĩ phương trình, bằng phép đặt ẩn phụ $t=2\sqrt{2(4-x^2)}$ ta đưa phương trình về dạng: $t^2+8t=x^2+8x$. Từ đây chúng ta có thể giải quyết phương trình bằng nhiều ý tưởng khác nhau. Chẳng hạn, nếu kết hợp giữa các phương pháp nâng lũy thừa, phương pháp đặt ẩn phụ và phương pháp hàm số ta sẽ có cách giải quyết phương trình cụ thể như sau: Điều kiện $-2\le x\le 2$. Khi đó, bình phương hai vế phương trình ta được:
$8x+16+16\sqrt{2(4-x^2)}+32-16x=9x^2+16$
$\Leftrightarrow 8(4-x^2)+16\sqrt{2(4-x^2)}=x^2+8x(1)$
Đặt $a=2\sqrt{2(4-x^2)}\ge 0$. Xét hàm số $f(t)=t^2+8t$ có $f'(t)=2t+8>0$, $\forall t>-4$
Mà $a\ge 0$, $x\ge -2$ nên: $(1)\Leftrightarrow f(a)=f(x)\Leftrightarrow a=x$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2\left(4-x^2\right)}=x \Leftrightarrow \begin{cases} 8\left(4-x^2\right)=x^2 \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

Đối chiếu điều kiện ban đầu ta kết luận $x=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho. ■

-Bình luận. Muốn có được sự kết hợp liên hoàn và thống nhất giữa các phương pháp với nhau ta cần phải có sự tinh tế và khéo léo khi sử dụng mỗi phương pháp. Chẳng hạn, đối với phương pháp đặt ẩn phụ như trên thì ta cần có một cách nhìn tổng quan phương trình; hay muốn sử dụng phương pháp hàm số ta cũng cần có sự khéo léo để đánh giá điều kiện sao cho hàm số đơn điệu trong khoảng nào đó.
Bài tập tương tự: Giải phương trình $\sqrt{x+3}+3\sqrt{3-x}=\sqrt{(2x+1)^2+2x+31}$

Ví dụ 8. Giải phương trình $\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}}=4-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích. Chú ý $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=x^2+\dfrac{1}{x^2}$
Từ đó dẫn đến ý tưởng bình phương hai vế, ta được:

$$4-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2\sqrt{5-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}=16-8\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$$

Để giải quyết phương trình này, ta có thể sử dụng phép đặt ẩn phụ $t=x+\dfrac{1}{x}$. Khi đó ta có lời giải:
Bình phương hai vế phương trình ta được:

$$4-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2\sqrt{5-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}=16-8\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)-\sqrt{9-2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}+5=0$$

Ta đặt $t=x+\dfrac{1}{x}$, dễ thấy điều kiện của t là $2\leq |t|\leq \dfrac{3}{\sqrt{2}}$. Khi đó ta có phương trình:

$$t^2-4t-\sqrt{9-2t^2}+5=0 \Leftrightarrow (t-2)^2+\left(1-\sqrt{9-2t^2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)^2+\frac{2\left(t^2-4\right)}{1+\sqrt{9-2t^2}}=0 \Leftrightarrow (t-2)\left[t-2+\frac{2(t+2)}{1+\sqrt{9-2t^2}}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t-2+\dfrac{2(t+2)}{1+\sqrt{9-2t^2}}=0(*) \end{array}\right.$$

-Với $t=x+\dfrac{1}{x}=2\Leftrightarrow x=1$.

-Với $2\leq |t|\leq \dfrac{3}{\sqrt{2}}$ suy ra $t-2$ và $t+2$ cùng dấu suy ra phương trình $(*)$ vô nghiệm. Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$. ■

-Bình luận. Thực sự phương trình vô tỷ rất đa dạng, muôn hình muôn vẻ. Đối với một phương trình vô tỷ, việc lựa chọn phương án tối ưu không hề đơn giản. Trong quá trình nhìn nhận, phân tích bài toán có thể có rất nhiều ý tưởng cho bài toán đó. Chẳng hạn, đối với các dạng toán mà chúng ta vừa tìm hiểu ở trên, ý tưởng nâng lũy thừa đều là điểm khởi nguồn, nhưng sau sự khởi nguồn đó lại nảy sinh một vấn đề khác mà chúng ta cần phải giải quyết. Chính vì thế, trong trường hợp này, sự phối hợp cùng một số phương pháp khác để giải quyết phương trình là một điều tất yếu và tự nhiên.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Giải phương trình $\sqrt[3]{6x+1}=2x$ Đáp số: $x=\cos\dfrac{\pi}{9}; x=\cos\dfrac{5\pi}{9}; x=\cos\dfrac{7\pi}{9}$.
Bài 2. Giải phương trình $\sqrt{4x-1}+\sqrt{4x^2-1}=1$
Hướng dẫn: Bình phương hai vế, sau đó đặt $t=2x+1$. Đáp số: $x=\dfrac{1}{2}$.
Bài 3. Giải phương trình $18x^2-13x+2=\sqrt{3}.\sqrt{81x^4-108x^3+56x^2-12x+1}$.
Hướng dẫn: Bình phương hai vế, sau đó đặt $t=3x+\dfrac{1}{3x}$ $(x\neq 0)$ Đáp số: $x=\dfrac{11\pm\sqrt{85}}{18}$.
Bài 4. Giải phương trình $\sqrt{x-\sqrt{x-3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)$ Đáp số:$x=4$.
Bài 5. Giải phương trình $\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}}=4-x-\dfrac{1}{x}$ Đáp số:$x=1$.

2 SỰ KẾT HỢP GIỮA PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ VÀ CÁC PHƯƠNG PHÁP KHÁC

Ví dụ 1. Giải phương trình $2014x^2-4x+3=2013x\sqrt{4x-3}$.

Lời giải.
-Phân tích. Nếu ta quan sát kĩ phương trình, ta sẽ nhận ra phương trình này có một điểm khá quen thuộc. Để thấy rõ được điều này, ta có thể đặt $t=\sqrt{4x-3}\geq 0$.
Với phép đặt ẩn phụ này, phương trình có dạng: $2014x^2-2013xt-t^2=0$
Đây là phương trình đẳng cấp bậc hai theo hai ẩn x, t. Giải quyết được phương trình này ta sẽ tìm được mối liên hệ giữa x và t. Điều kiện $x\geq\dfrac{3}{4}$. Đặt $t=\sqrt{4x-3}\geq 0$.
Phương trình đã cho trở thành: $2014x^2-2013xt-t^2=0$
Giải phương trình ta được $x=t$ hoặc $x=-\dfrac{t}{2014}$

-Với $x=t\Leftrightarrow x=\sqrt{4x-3}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=4x-3\\ x\geq\dfrac{3}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=3\end{array}\right.$

-Với $x=-\dfrac{t}{2014}\Leftrightarrow x=-\dfrac{\sqrt{x-5}}{2014}$ (vô nghiệm)
Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm $x=1; x=3$. ■
-Bình luận. Như vậy phương pháp đặt ẩn phụ nhằm mục đích phá vỡ lớp áo ngụy trang của phương trình. Tuy nhiên, trong lời giải trên nếu vắng mặt phương pháp nâng lũy thừa thì bài toán chắc chắn không thể giải quyết hoàn toàn.
Bài tập tương tự:
1. Giải phương trình $2x^2+5x-1=7\sqrt{x^3-1}$ (Đề nghị OLYMPIC 30/04/2007)
2. Giải phương trình $\sqrt{30}\left(3x^2-2x-2\right)=6\sqrt{x^3+3x^2+4x+2}$

Ví dụ 2. Giải phương trình $3\left(\sqrt{2x^2+1}-1\right)=x\left(1+3x+8\sqrt{2x^2+1}\right)$.

Lời giải.
-Phân tích.
Phương trình trên có thể biến đổi về dạng $ax^2+bx+c=(cx+d)\sqrt{px^2+qx+r}$.
Ý tưởng đầu tiên đó là sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ không hoàn toàn.
Sau phép đặt ẩn $t=\sqrt{2x^2+1}$, $t\geq 1$.
Phương trình có dạng: $3(t-1)=3x^2+x+8xt\Leftrightarrow 3t^2-(8x-3)t+3x^2+x=0$
Từ đó ta tìm được mối liên hệ $t=\dfrac{x}{3}$ hoặc $t=1-3x$. Nếu dừng lại ở đây thì phương trình chưa được giải quyết trọn vẹn. Hai phương trình này đã thuộc dạng cơ bản và ta có thể giải quyết chúng bằng

phương pháp nâng lũy thừa. Cụ thể lời giải như sau: Đặt $t = \sqrt{2x^2+1}$, $t \geq 1$. Phương trình đã cho trở thành:
$3t^2 - (8x-3)\,t - 3x^2 + x = 0 \Leftrightarrow (3t-x)\,(t+3x-1) = 0$
Giải phương trình này ta được $x = 3t$ hoặc $t = 1-3x$

-Với $x = 3t \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9\,(2x^2+1) \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17x^2 = -9 \\ x \geq 0 \end{cases}$ (vô nghiệm)

-Với $t = 1-3x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+1 = 1-6x+9x^2 \\ x \leq \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\,(7x-6) = 0 \\ x \leq \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm $x = 0$. ■

-Bình luận. Cái khéo léo trong việc đặt ẩn phụ không hoàn toàn trong lời giải trên đó là biến đổi đưa về được phương trình tích để tìm mối liên hệ giữa x và t. đã có một sự kết thức trọn vẹn bằng phương pháp nâng lũy thừa. Bài tập tương tự:
1. Giải phương trình $2 - 2x^2 + (4-7x)\sqrt{x^2-x+1} = 0$
2. Giải phương trình $2\,|1-3x| + 3x\,(1-3x) = (x+2)\sqrt{|1-3x|}$
3. Giải phương trình $3\sqrt{2+x} - 6\sqrt{2-x} + 4\sqrt{4-x^2} = 10-3x$ (ĐH khối B năm 2011)

Ví dụ 3. Giải phương trình $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}+x} + \sqrt{\dfrac{1}{2}-x} = 1$.

Lời giải.

-Phân tích. Dễ thấy rằng $\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}+x}\right)^3 + \left(\sqrt{\dfrac{1}{2}-x}\right)^2 = 1$, ta có thể nghĩ ngay đến phép đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình. Bằng sự kết hợp giữa phương pháp đặt ẩn phụ và phương pháp nâng lũy thừa, ta có lời giải: Điều kiện $x \leq \dfrac{1}{2}$. Đặt $\begin{cases} a = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}+x} \\ b = \sqrt{\dfrac{1}{2}-x} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3 = \dfrac{1}{2}+x \\ b^2 = \dfrac{1}{2}-x \end{cases} \Rightarrow a^3 + b^2 = 1$

Ta có hệ $\begin{cases} a^3 + b^2 = 1 \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a^3 + (1-a)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 1 \\ a = -2 \end{array}\right.$

$a = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}+x} = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$
$a = 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}+x} = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$
$a = -2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}+x} = -2\ x = -\dfrac{17}{2}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = \pm\dfrac{1}{2}$; $x = -\dfrac{17}{2}$. ■

-Bình luận. Nhắc đến phương trình vô tỷ thì phương pháp nâng lũy thừa hầu như đều có mặt trong quá trình thực hiện giải quyết bài toán. Đối với phương trình trên, sự kết hợp giữa phương pháp đặt ẩn phụ và phương pháp nâng lũy thừa là một điều tất yếu. Ngoài ra, phương trình trên cũng có thể được giải quyết bằng phương pháp nhân liên hợp. Bài tập tương tự:
1. Giải phương trình $\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} = 3 + \sqrt{(3+x)\,(6-x)}$

2. Giải phương trình $\sqrt{\dfrac{4x+9}{28}} = 7x^2+7$

3. Giải phương trình $\sqrt{1-x^2} = \left(\dfrac{2}{3} - \sqrt{x}\right)^2$.

Ví dụ 4. Giải phương trình $2x + \dfrac{x-1}{x} = \sqrt{1-\dfrac{1}{x}} + 3\sqrt{x - \dfrac{1}{x}}$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích. Phương trình có một hình thức ngụy trang khá công phu. Bằng sự khéo léo biến đổi phương trình về dạng

$2x + \dfrac{x-1}{x} - \sqrt{\dfrac{x-1}{x}} - 3\sqrt{\dfrac{x-1}{x}(x+1)} = 0$

Lớp áo ngụy trang có thể sẽ được cởi nếu ta đặt $t = \sqrt{\dfrac{x-1}{x}}$. Khi đó phương trình có dạng $t^2 - \left(1+3\sqrt{x+1}\right)t + 2x = 0$

Thật may mắn, ta có $\Delta = \left(\sqrt{x+1}+3\right)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2\left(\sqrt{x+1}-1\right) \\ t = \sqrt{x+1} - 1 \end{array}\right.$. Để tìm được nghiệm cuối cùng của phương trình, chắc chắn ta không thể dừng lại ở đây. sau đây sẽ cho thấy một sự kết hợp hoàn hảo giữa hai phương pháp đặt ẩn phụ và phương pháp nâng lũy thừa. Điều kiện $-1 \le x \le 0$ hoặc $x \ge 1$. Khi đó, phương trình đã cho có thể được viết lại như sau:

$2x + \dfrac{x-1}{x} - \sqrt{\dfrac{x-1}{x}} - 3\sqrt{\dfrac{x-1}{x}(x+1)} = 0$

Đặt $t = \sqrt{\dfrac{x-1}{x}} \ge 0$. Ta có phương trình bậc hai theo ẩn số t (x lúc này đóng vai trò như tham số): $t^2 - \left(1+3\sqrt{x+1}\right)t + 2x = 0$

Với $\Delta = \left(\sqrt{x+1}+3\right)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2\left(\sqrt{x+1}-1\right) \\ t = \sqrt{x+1} - 1 \end{array}\right.$.

Do đó việc còn lại ta phải giải hai phương trình

$\sqrt{\dfrac{x-1}{x}} = \sqrt{x+1} - 1 (1)$ và $\sqrt{\dfrac{x-1}{x}} = 2\left(\sqrt{x+1}-1\right)$ (2)

Ta nhận thấy rằng nếu $-1 \le x \le 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} - 1 < 0$. Điều này khiến cho phương trình (1) và (2) vô nghiệm. Vì thế, ta chỉ cần xét $x \ge 1$. Lúc này ta có thể (1) và (2) như sau:

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x-1} + \sqrt{x} = \sqrt{x(x+1)} \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 2\sqrt{x(x-1)}$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x(x-1)} - 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ (loại)} \end{array}\right.$

$(2) \Leftrightarrow 4x^2 - x + 1 = 2\sqrt{x(x-1)} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x(x-1)} - 1\right)^2 + 3x^2 = 0$ (vô nghiệm)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. ■

-Bình luận. Ta cũng có thể sử dụng phép đánh giá để giải phương trình như sau:

Nếu $-1 \le x \le 0$ dẫn đến phương trình vô nghiệm.

Nếu $x \ge 1$ ta có $\sqrt{1-\dfrac{1}{x}} + 3\sqrt{x - \dfrac{1}{x}} = \sqrt{(x-1)\dfrac{1}{x}} + 3\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x}.1} \le \dfrac{x-1+\dfrac{1}{x}}{2} + 3\dfrac{\dfrac{x^2-1}{x}+1}{2} =$

$2x+\dfrac{x-1}{x}$

Đẳng thức trên xảy ra khi $x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (vì $x\geq 1$)

Tuy nhiên, trong phép đánh giá trên không dễ dàng để chúng ta có thể nghĩ đến nếu không biết trước điểm rơi. Trong lời giải trên, học sinh dễ mắc sai lầm khi thiếu sót sự đánh giá
$-1\leq x\leq 0 \Rightarrow \sqrt{x+1}-1<0$

Bài toán tổng quát của phương trình này: $\dfrac{4(x-a)}{bx}\pm\left(4\sqrt{a}+4k\sqrt{x+a}\right)\sqrt{\dfrac{x-a}{bx}}+\left(k^2-1\right)x=0$ $(a>0, b\neq 0)$

Chọn $a=4$, $b=1$, $k=-\dfrac{1}{4}$ ta có bài tập tương tự như sau đây:

Giải phương trình $4-\dfrac{8}{x}-\dfrac{15}{16}x+8\sqrt{1-\dfrac{4}{x}}=\sqrt{x-\dfrac{16}{x}}$.

Ví dụ 5. Giải phương trình $\sqrt{-x^2+x+6}+\dfrac{4}{x-1}=x^2+x$.

Lời giải.

Điều kiện $-x^2+x+6\geq 0 \Leftrightarrow -2\leq x\leq 3$. Khi đó, phương trình được viết lại dưới dạng: $\sqrt{(3-x)(x+2)}+\dfrac{2(3-x)}{x-1}=(x-1)(x+2)\,(*)$

Nhận thấy $x=1$ và $x=-2$ không phải là nghiệm của phương trình $(*)$. Bằng cách chia hai vế phương trình $(*)$ cho $(x-1)(x+2)$ ta có:

$$\frac{1}{x-1}\sqrt{\frac{3-x}{x+2}}+\frac{2(3-x)}{(x-1)^2(x+2)}=1\,(**)$$

Đặt $t=\dfrac{1}{x-1}\sqrt{\dfrac{3-x}{x+2}}$, phương trình $(**)$ trở thành $2t^2+t-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

+Với $t=-1$, ta có $\dfrac{1}{x-1}\sqrt{\dfrac{3-x}{x+2}}=-1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{3-x}{x+2}}=1-x \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{3-x}{x+2}=(1-x)^2 \\ -2<x<1\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$$

+Với $t=\dfrac{1}{2}$, ta có $\dfrac{1}{x-1}\sqrt{\dfrac{3-x}{x+2}}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{3-x}{x+2}}=\dfrac{x-1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{3-x}{x+2}=\dfrac{(x-1)^2}{4} \\ 1<x\leq 3\end{cases} \Leftrightarrow x=2$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm $x=-1$; $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$; $x=2$.

-Bình luận. Điểm độc đáo trong lời giải trên đó là phép chia hai vế cho $(x-1)(x+2)$. Sau đó, phương trình đã được giải quyết hoàn toàn bằng sự kết hợp giữa phương pháp đặt ẩn phụ và phương pháp nâng lũy thừa. Thực ra, bằng phép biến đổi tự nhiên đó là quy đồng ta sẽ chuyển phương trình về dạng phương trình như sau: $(x-1)\sqrt{(x+2)(3-x)}=(x-1)^2(x+2)+2(x-3)$. Bài toán trên xuất phát từ dạng tổng quát sau: $a[f(x)]^2+b.f(x)g(x)+c[g(x)]^2=0$.

Ví dụ 6. Giải phương trình $(x+2)\sqrt{x+1}-(4x+5)\sqrt{2x+3}=-6x-23$.

Lời giải.

-Phân tích. Theo hướng suy nghĩ tự nhiên, ta có thể sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ cho chương trình

trên.
Chẳng hạn, ta có thể đặt $t=\sqrt{x+1}$, $t\geq 0$. Biến đổi phương trình theo biến t ta được: $t^3+6t^2+t+17-(4t^2+1)\sqrt{2t^2+1}=0 \Leftrightarrow \sqrt{2t^2+1}=\dfrac{t^3+6t^2+t+17}{4t^2+1}$
Dễ thấy $x=2$ là một nghiệm của phương trình nên ta có thể sử dụng phương pháp nhân liên hợp để tiếp tục xử lý phương trình. Ta có lời giải: Điều kiện $x=-1$. Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow x=t^2-1$ $(t\geq 0)$.
Phương trình trở thành:

$$t^3+6t^2+t+17-(4t^2+1)\sqrt{2t^2+1}=0 \Leftrightarrow \sqrt{2t^2+1}=\frac{t^3+6t^2+t+17}{4t^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2t^2+1}-t-1\right)+\left(t+1-\frac{t^3+6t^2+t+17}{4t^2+1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)\left[\frac{t}{\sqrt{2t^2+1}+t+1}+\frac{3t^2+4t+8}{4t^2+1}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ \dfrac{t}{\sqrt{2t^2+1}+t+1}+\dfrac{3t^2+4t+8}{4t^2+1}=0(*) \end{array}\right.$$

Với $t=2\Leftrightarrow \sqrt{x+1}=2\Leftrightarrow x+1=4\Leftrightarrow x=3$
Rõ ràng, $t\geq 0$ suy ra vế trái phương trình $(*)$ luôn dương. Do đó phương trình $(*)$ vô nghiệm. Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=3$. ■

-Bình luận. Ta có thể chắc chắn một điều rằng, nếu sử dụng đơn phương một phương pháp sẽ không thể gả quyết được hoàn toàn phương trình trên. Ta cũng có thể sử dụng phép đặt $t=\sqrt{2x+3}$ hoặc ngay từ bước đầu tiên ta có thể chọn phương pháp nhân liên hợp kết hợp với phương pháp đánh giá ta cũng sẽ giải quyết được hoàn toàn phương trình. Mời các bạn độc giả cùng thử sức với một bài tập tương tự:
Giải phương trình $(3x+8)\sqrt{3-x}-(x-5)\sqrt{4x+5}=7-9x$.

Ví dụ 7. Giải phương trình $\sqrt{1+x^2}-\sqrt{x^2+x+4}=\sqrt{x^2+x+5}+x$

✍ **Lời giải.**
-Phân tích. Nhận thấy mối quan hệ $x^2+x+5=x^2+x+4+1$ dẫn đến ý tưởng đặt ẩn phụ $t=\sqrt{x^2+x+4}$.
Khi đó, phương trình trở thành: $\sqrt{1+x^2}-x=\sqrt{t^2+1}+t$
Sau phép đặt ẩn phụ phương trình đã trở thành dạng quen thuộc và ta có thể sử dụng phương pháp hàm số để giải quyết phương trình này. Cụ thể lời giải như sau: Đặt $t=\sqrt{x^2+x+4}$, $t\geq 0$. Khi đó, phương trình trở thành:
$\sqrt{1+x^2}-x=\sqrt{t^2+1}+t \Leftrightarrow \sqrt{(-x)^2+1}+(-x)=\sqrt{t^2+1}+t(1)$
Xét hàm số $f(u)=\sqrt{u^2+1}+u \Rightarrow f'(u)=\dfrac{u}{\sqrt{u^2+1}}+1>0$,

Do đó (1) $\Leftrightarrow f(-x)=f(t)\Leftrightarrow -x=\sqrt{x^2+x+4}\Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 0 \\ x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-4.$

Vậy, $x=-4$ là nghiệm duy nhất của phương trình ban đầu. ■

-Bình luận. Như vậy, ta đã thấy rõ được lợi ích của phép đặt ẩn phụ trong khi giải phương trình vô tỷ có hình thức khá phức tạp. Để ta có thể dễ dàng quan sát phương trình vô tỷ và có phương án tấn công hợp lý thì đôi lúc phép đặt ẩn phụ sẽ rất hữu dụng. Chẳng hạn như trong lời bài toán trên. Và các phép đặt ẩn có chứa căn thức thường sẽ phải có sự kết hợp với phương pháp nâng lũy thừa ta mới tìm được nghiệm cuối cùng của phương trình.

Ví dụ 8. Giải phương trình $x^2+\sqrt{x^2+3}=\sqrt{x^2+8}$

✍ **Lời giải.**

-Phân tích. Đối với phương trình này thì việc lựa chọn phương pháp đặt ẩn phụ là một sự lựa chọn đứng đắn giúp cho việc giải quyết phương trình nhẹ nhàng hơn.

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x^2+3} \geq \sqrt{3} \\ b = \sqrt{x^2+8} \geq 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow b^2 - a^2 = 5.$

Ta có hệ $\begin{cases} b = a + a^2 - 3 \\ b^2 - a^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \left(a + a^2 - 3\right)^2 - a^2 = 5$

$\Leftrightarrow (a-2)\left(a^3 + 4a^2 + 2a - 2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a^3 + 4a^2 + 2a - 2 = 0(1) \end{array}\right.$

Vấn đề nảy sinh bây giờ là giải quyết phương trình (1) như thế nào? Sử dụng máy tính cầm tay CaSiO vẫn có nghiệm nhưng nghiệm thực sự lẻ. Sự hạn chế của chương trình phổ thông lại không cho phép ta dùng các phương pháp vượt quá SGK THPT. Nếu ta khai thác kĩ hơn ở điều kiện giá trị $a \geq \sqrt{3}$, bằng phương pháp hàm số ta sẽ giải quyết được vấn đề này một cách nhanh chóng. Từ đó ta có lời giải như sau: Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x^2+3} \geq \sqrt{3} \\ b = \sqrt{x^2+8} \geq 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow b^2 - a^2 = 5.$

Ta có hệ $\begin{cases} b = a + a^2 - 3 \\ b^2 - a^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \left(a + a^2 - 3\right)^2 - a^2 = 5$

$\Leftrightarrow (a-2)\left(a^3 + 4a^2 + 2a - 2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a^3 + 4a^2 + 2a - 2 = 0(1) \end{array}\right.$

Với $a = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3} = 2 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Xét hàm số $f(a) = a^3 + 4a^2 + 2a - 2$, $a \geq \sqrt{3}$.

Ta có $f'(a) = 3a^2 + 8a + 2 > 0$, $\forall a \geq \sqrt{3}$, nên hàm số $f(a)$ đồng biến trên $\left[\sqrt{3}; +\infty\right)$

Do đó, $f(a) \geq f\left(\sqrt{3}\right) = 10 + 5\sqrt{3} > 0$. Suy ra phương trình (1) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \pm 1$. ■

-Bình luận. Phép đặt ẩn phụ đã chuyển bài toán giải phương trình vô tỷ về giải một phương trình dạng đa thức bậc 4. Tuy nhiên vế trái phương trình bậc 4 này ta chỉ có thể phân tích được thành tích của một nhị thức bậc nhất và một đa thức bậc 3 có nghiệm lẻ không thuộc $\left[\sqrt{3}; +\infty\right)$. Do đó, phương pháp hàm số đã thể hiện vai trò quan trọng của mình trong việc đánh giá phương trình bậc ba vô nghiệm trong miền xác định $\left[\sqrt{3}; +\infty\right)$. Ta có thể tổng quát hóa bài toán trên như sau: $a^2x^2 + \sqrt{a^2x^2+b} = \sqrt{a^2x^2+c}$ $(c - a > 0)$.

Chọn $a = 2$, $b = 4$, $c = 7$ ta có bài toán: Giải phương trình $4x^2 + 2\sqrt{x^2+1} = \sqrt{4x^2+7}$.

Ví dụ 9. Giải phương trình $\sqrt{5+x} + \sqrt{1-x} + \sqrt{(5+x)(1-x)} = \dfrac{x}{2} + \sqrt{x+6}$

✍ **Lời giải.**

-Phân tích. Chú ý đến mối liên hệ giữa các biểu thức trong phương trình thì ta có thể sử dụng phép đặt $t = \sqrt{5+x} + \sqrt{1-x} \Rightarrow \sqrt{(5+x)(1-x)} = \dfrac{t^2}{2} - 3$.

Phương trình lúc này trở thành: $\frac{t^2}{2}+t-3=\frac{x}{2}+\sqrt{x+6}(*)$

Nếu tinh ý, ta có thể nhận ra hàm đặc trưng trong phương trình $(*)$ Điều kiện $-5\le x\le 1$. Đặt $t=\sqrt{5+x}+\sqrt{1-x}\Rightarrow\sqrt{(5+x)(1-x)}=\frac{t^2}{2}-3\ (t\ge 0)$.

Khi đó phương trình trở thành: $\frac{t^2}{2}+t-3=\frac{x+6}{2}+\sqrt{x+6}-3(*)$

Xét hàm số $f(t)=\frac{t^2}{2}+t-3\Rightarrow f'(t)=t+1>0,\ \forall t\ge 0$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$

Do đó $(*)\Leftrightarrow\sqrt{5+x}+\sqrt{1-x}=\sqrt{x+6}\Leftrightarrow 6+2\sqrt{(5+x)(1-x)}=x+6$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4(5+x)(1-x)=x^2\\ x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{-8+2\sqrt{41}}{5}.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=\frac{-8+2\sqrt{41}}{5}$. ■

-Bình luận. Phép đặt ẩn phụ đã cởi bỏ lớp áo ngụy trang của hàm đặc trưng. Ta có bài tập tương tự: Giải phương trình $\sqrt{\frac{3-x}{4}}+\sqrt{\frac{x}{4}+1}+\sqrt{12-x-x^2}=2x-1+\sqrt{x+\frac{5}{4}}$

Ví dụ 10. Giải phương trình $\sqrt{28x-3x^2-49}-32\left(1+\sqrt{7-x}\right)=4x^2-35x+17$.

✍ Lời giải.

-Phân tích. Để ý phương trình có nhân tử chung là $\sqrt{7-x}$. Từ đó, ý tưởng của ta có thể biểu diễn phương trình theo ẩn số $t=\sqrt{7-x}$. Sau phép đổi biến này ta thu được: $t\left(\sqrt{14-3t^2}-4t^3+21t-32\right)=0$

Vấn đề khó khăn của ta bây giờ là tìm nghiệm của phương trình $\sqrt{14-3t^2}-4t^3+21t-32=0$. Kiểm tra bằng máy tính cầm tay thì phương trình này vô nghiệm. Do đó, ta có thể chứng minh phương trình vô nghiệm bằng phương pháp hàm số. Cụ thể lời giải như sau: Điều kiện $\frac{7}{3}\le x\le 7$.

Đặt $t=\sqrt{7-x}\Rightarrow 0\le t\le\frac{\sqrt{42}}{3}$. Khi đó, phương trình trở thành $t\left(\sqrt{14-3t^2}-4t^3+21t-32\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\ \sqrt{14-3t^2}-4t^3+21t-32=0\end{array}\right.$$

$t=0\Leftrightarrow x=7$

Xét $f(t)=\sqrt{14-3t^2}\le\sqrt{14}$, $g(t)=4t^3-21t+32$ có $g'(t)=12t^2-21=0\Leftrightarrow t=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$. Lập bảng biến thiên hàm số $g(t)$ trong đoạn $\left[0;\frac{\sqrt{42}}{3}\right]$.

Dễ thấy rằng $f(t)\le\sqrt{14}<32-7\sqrt{7}\le g(t)$, $\forall t\in\left[0;\frac{\sqrt{42}}{3}\right]$. Suy ra phương trình $(*)$ vô nghiệm. Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=7$. ■

-Bình luận. Việc lựa chọn phép đặt ẩn phụ và kết hợp phương pháp hàm số để giải quyết phương trình như trong lời giải trên rất độc đáo.

Ví dụ 11. Giải phương trình $\sqrt{2x^2-8}+\sqrt{16-x^2}=x^2-6$.

✍ Lời giải.

-Phân tích. Chú ý $2(x^2-4)+2(16-x^2)=24$ nên ta có thể sử dụng phép đặt ẩn phụ chuyển sang giải hệ phương trình. Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x^2-4} \geq 0 \\ b = \sqrt{16-x^2} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2=12.$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} a^2+b^2=12 \\ \sqrt{2}.a+b=a^2-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=12 \\ b=a^2-\sqrt{2}.a-2 \end{cases}$

$\Rightarrow a^4-2\sqrt{2}a^3-a^2+4\sqrt{2}a-8=0 \Leftrightarrow \left(a-2\sqrt{2}a\right)\left(a^3-a+2\sqrt{2}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2\sqrt{2} \\ a^3-a+2\sqrt{2}=0(*) \end{array}\right.$

Cũng như bài 7, vấn đề nảy sinh đó là giải quyết phương trình $(*)$. Sử dụng phương pháp hàm số ta sẽ chứng minh phương trình $(*)$ vô nghiệm. Từ đó ta có lời giải: Điều kiện $\begin{cases} 2x^2-8\geq 0 \\ 16-x^2 \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4\leq x\leq -2 \\ 2\leq x\leq 4 \end{array}\right.$. Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x^2-4} \geq 0 \\ b = \sqrt{16-x^2} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2=12.$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} a^2+b^2=12 \\ \sqrt{2}.a+b=a^2-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=12 \\ b=a^2-\sqrt{2}.a-2 \end{cases}$

$\Rightarrow a^4-2\sqrt{2}a^3-a^2+4\sqrt{2}a-8=0$

$\Leftrightarrow \left(a-2\sqrt{2}a\right)\left(a^3-a+2\sqrt{2}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2\sqrt{2} \\ a^3-a+2\sqrt{2}=0(*) \end{array}\right.$

$a=2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-4}=2\sqrt{2} \Leftrightarrow x=\pm 2\sqrt{3}$ (thỏa mãn điều kiện bài toán)

Xét hàm số $f(a)=a^3-a+2\sqrt{2}$, $0\leq a\leq 2\sqrt{3}$. có $f'(a)=3a^2-1=0 \Leftrightarrow a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(0\leq x\leq 2\sqrt{2}\right)$.

Bảng biến thiên:

Từ bảng biến thiên suy ra $f(a)>0$, $\forall 0\leq a\leq 2\sqrt{3}$. Điều này chứng tỏ phương trình $(*)$ vô nghiệm. Vậy phương trình ban đầu có 2 nghiệm $x=\pm 2\sqrt{3}$

-Bình luận. Bài này có ý tưởng và lời giải tương tự bài tập trước với sự kết hợp của hai phương pháp đặt ẩn phụ và phương pháp hàm số. Nhưng ở bài này khi sử dụng phương pháp hàm số ta cần chú ý lập bảng biến thiên để từ đó dễ dàng suy ra được $f(a)>0$.

Ví dụ 12. Giải phương trình $x^5-x^2-8x-16=\left(x^3+11x^2+44x+64\right)\sqrt[3]{x+4}$.

Lời giải.

-Phân tích. Phương trình trên có đặc điểm là bậc rất cao, hình thức khá phức tạp khiến ta chưa thể có ý tưởng nào cả. Do đó, việc đầu tiên ta cần làm đó là cởi bỏ lớp áo giáp căn thức bằng cách đặt ẩn phụ $t=\sqrt[3]{x+4}$. Sau phép đổi biến tuy phương trình có bậc rất cao nhưng bằng sự khéo léo ta có thể sử dụng phương pháp hàm số để giả quyết phương trình. Từ đó ta có lời giải sau: Nhận thấy $x=-4$ không phải là nghiệm của phương trình nên ta chỉ xét $x\neq -4$. Khi đó, phương trình được viết lại dưới dạng:

$x^5-(x+4)^2=\left[(x+4)^3-(x+4)+4(x+4)\right]\sqrt[3]{x+4}$

Đặt $t = \sqrt[3]{x+4} \neq 0$, ta có phương trình $(t^3-4)^5 - t^6 = t^{10} - t^7 + 4t^4$

$\Leftrightarrow \left(t^2 - \dfrac{4}{t}\right)^5 + \left(t^2 - \dfrac{4}{t}\right) = t^5 + t(2)$ (chia hai vế cho t^5)

Xét $f(x) = x^5 + x$ có $f'(x) = 5x^4 + 1 > 0$,

Do đó, $(2) \Leftrightarrow t^2 - \dfrac{4}{t} = t \Leftrightarrow t^3 - t^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Với $t = 2$ suy ra $x = 4$. Kiểm tra lại phương trình ban đầu ta đi đến kết luận $x = 4$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho. ■

-Bình luận. Phép đặt ẩn phụ chuyển về một phương trình bậc cao hơn trong lời giải trên rất mạo hiểm. Nhưng chính sự mạo hiểm này đã cho ta một lời giải hay và đẹp

Ví dụ 13. Giải phương trình $(x+5)\sqrt{x+1} + 1 = \sqrt[3]{3x+4}$.

✍ Lời giải.

-Phân tích. Nhằm mục đích đơn giản hóa cách quan sát phương trình, ta có thể sử dụng phép đặt ẩn phụ: $a = \sqrt{x+1}$; $b = \sqrt[3]{3x+4}$.

Sau đó đưa phương trình về hệ: $\begin{cases} (a^2+4)\,a + 1 = b \\ 3a^2 + 1 = b^3 \end{cases} \Rightarrow (a+1)^3 + (a+1) = b^3 + b$

Phương trình cuối này ta có thể sử dụng phương pháp hàm số để giải quyết nhanh gọn, từ đó tìm được mối quan hệ giữa hai biến a, b:

$a + 1 = b \Leftrightarrow \sqrt{x+1} + 1 = \sqrt[3]{3x+4}$. Để ý rằng, $3x + 4 = 3\,(x+1) + 1$. Ta có lời giải cho bài toán như sau: Điều kiện: $x \geq -1$. Khi đó, ta đặt $a = \sqrt{x+1} \geq 0$; $b = \sqrt[3]{3x+4}$ và đưa phương trình về hệ sau:

$$\begin{cases} (a^2+4)\,a + 1 = b \\ 3a^2 + 1 = b^3 \end{cases} \Rightarrow (a+1)^3 + (a+1) = b^3 + b(*)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0$,

Do đó $(*) \Leftrightarrow f\,(a+1) = f(b) \Leftrightarrow a + 1 = b \Leftrightarrow \sqrt{x+1} + 1 = \sqrt[3]{3x+4}$

$\Leftrightarrow a + 1 = \sqrt[3]{3a^2+1} \Leftrightarrow (a+1)^3 = 3a^2 + 1 \Leftrightarrow a = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Thử lại giá trị $x = -1$ thỏa mãn phương trình. Vậy, $x = -1$ là một nghiệm của phương trình đã cho.
■

Ví dụ 14. Giải phương trình $\dfrac{x+1}{\sqrt{3x-2}} + \dfrac{\sqrt[3]{3x+2}}{4} = \sqrt{3x-2}$.

✍ Lời giải.

-Phân tích. Thực hiện quy đồng ta biến đổi phương trình về dạng:

$\sqrt[3]{3x+2}.\sqrt{3x-2} = 8x - 12(*)$

Phương trình $(*)$ gợi cho ta nên đặt ẩn phụ. Chẳng hạn ta đặt $t = \sqrt{3x-2}$, $t \geq 0$. Suy ra $3x = t^2 + 2$, phương trình $(*)$ lúc này sẽ trở thành:

$t\sqrt[3]{t^2+2} = \dfrac{8\,(t^2+2)}{3} - 12 \Leftrightarrow 3t\sqrt[3]{t^2+2} + 20 = 8t^2$

Nếu tinh tế ta sẽ nhận thấy rằng nếu chia hai vế phương trình sau cùng cho t^2 ta có phương trình:

$3\sqrt[3]{\dfrac{1}{t} + \dfrac{4}{t^3}} + \dfrac{20}{t^2} = 8$

Quan sát kĩ phương trình ta nhận thấy vế trái là một hàm số nghịch biến theo t. Do đó ta sẽ sử dụng phương pháp hàm số để chứng minh phương trình $3\sqrt[3]{\dfrac{1}{t} + \dfrac{4}{t^3}} + \dfrac{20}{t^2} = 8$ có nghiệm duy nhất hoặc vô nghiệm. Điều kiện: $x > \dfrac{2}{3}$. Khi đó, phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$\sqrt[3]{3x+2}.\sqrt{3x-2}=8x-12(*)$. Đặt $t=\sqrt{3x-2}$, $t>\sqrt{\frac{5}{2}}$. Phương trình $(*)$ trở thành:

$t\sqrt[3]{t^2+2}=\frac{8\left(t^2+2\right)}{3}-12 \Leftrightarrow 3t\sqrt[3]{t^2+2}+20=8t^2 \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{\frac{1}{t}+\frac{4}{t^3}}+\frac{20}{t^2}=8\,(**)$

Nhận thấy vế trái phương trình là hàm nghịch biến theo t: $f(t)=3\sqrt[3]{\frac{1}{t}+\frac{4}{t^2}}+\frac{20}{t}$ nghịch biến theo t nên phương trình $(**)$ nếu có nghiệm sẽ có nghiệm duy nhất. Mặt khác, $t=2$ là một nghiệm của phương trình $(**)$ nên đó cũng là nghiệm duy nhất của phương trình.

Cuối cùng ta tìm được nghiệm của phương trình đã cho là $x=2$. ■

-Bình luận. Như vậy qua những bài toán trên chúng ta có thể nhận thấy rằng:

Bằng phương pháp đặt ẩn phụ ta đã làm xuất hiện bản chất thực của các phương pháp khác. Mà ngay chính bản thân người sáng tác ra các bài toán cũng vậy. Họ đã lợi dụng các phép đặt ẩn phụ để che giấu ý đồ của họ, nhằm đánh lừa thị giác của người giải toán và tăng độ khó của các bài toán. Do đó, trong quá trình giải phương trình vô tỷ, phương pháp đặt ẩn phụ có tác dụng mở đường cho việc sử dụng các phương pháp khác một cách thuận lợi hơn. Và sự thuận lợi đó nhiều hay ít còn phụ thuộc vào phép đặt ẩn phụ như thế nào là hiệu quả nhất. Mời các bạn độc giả cùng rèn luyện kỉ năng này thông qua các bài tập dưới đây:

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Giải phương trình $x+\sqrt{5+\sqrt{x-1}}=0$. Đáp số: $x=\frac{11-\sqrt{17}}{2}$.

Bài 2. Giải phương trình$x=\left(2014+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{1-\sqrt{x}}\right)^2$.

Hướng dẫn: Đặt $t=\sqrt{1-\sqrt{x}} \Rightarrow 0\le t\le 1$. Đáp số: $x=0$.

Bài 3. Giải phương trình $\sqrt[4]{57-x}+\sqrt[4]{x+40}=5$. Đáp số: $x=-24$; $x=41$

Bài 4. Giải phương trình $2\left(x^2+2\right)=5\sqrt{x^3+1}$. Đáp số: $x=\frac{5\pm\sqrt{37}}{2}$

Bài 5. Giải phương trình $\left(x^2-6x+11\right)\sqrt{x^2-x+1}=2\left(x^2-4x+7\right)\sqrt{x-2}$

Hướng dẫn: Đặt $a=\sqrt{x^2-x+1}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$, $b=\sqrt{x-2}\ge 0$. Đáp số: $x=5\pm\sqrt{6}$.

Bài 6. Giải phương trình $\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x+2}\right)\left(1-\sqrt{x^2+7x+10}\right)=3$

Hướng dẫn: Đặt $a=\sqrt{x+5}\ge 0$, $b=\sqrt{x+2}\ge 0$ Đáp số: $x=-1$.

Bài 7. Giải phương trình $\sqrt{\frac{7}{4}\sqrt{x}-1+x^2}=\left(1-\sqrt{x}\right)^2$

Hướng dẫn: Đặt $a=\sqrt{x}\ge 0$, $b=1-\sqrt{x}$. Đáp số: $x=0$; $x=\frac{9}{16}$.

Bài 8. Giải phương trình $\sqrt{4x^2+5x+1}-2\sqrt{x^2-x+1}=9x-3$

Hướng dẫn: Đặt $a=\sqrt{4x^2+5x+1}\ge 0$, $b=2\sqrt{x^2-x+1}\ge\sqrt{3}$ Đáp số: $x=0; x=\frac{1}{3}; x=\frac{56}{65}$.

Bài 9 Giải phương trình $2\left(x^2-3x+2\right)=3\sqrt{x^3+8}$

Hướng dẫn: Đặt $a=\sqrt{x^2-2x+4}\ge\sqrt{3}$, $b=\sqrt{x+2}\ge 0$ Đáp số: $x=3\pm\sqrt{13}$.

Bài 10. Giải phương trình $(3x+1)\sqrt{2x^2-1}=5x^2+\frac{3}{2}x-3$. Đáp số: $x=\pm 1$; $x=5$.

Bài 11. Giải phương trình $2\sqrt{1-x}-\sqrt{x+1}+3\sqrt{1-x^2}=3-x$. Đáp số: $x=\frac{5}{3}; x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Bài 12. Giải phương trình $4\sqrt{1-x}=x+6-3\sqrt{1-x^2}+5\sqrt{1+x}$. Đáp số: $x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Bài 13. Giải phương trình $\sqrt[3]{7x+1}-\sqrt[3]{x^2-x-8}+\sqrt[3]{x^2-8x+1}=2$ Đáp số: $x\in\{-1;1;0;9\}$.

Bài 14. Giải phương trình $x^2+5+\sqrt{3x+1}=13x$

Hướng dẫn: Đặt $\sqrt{3x+1}=3-2y$, $y\le\frac{3}{2}$. Đáp số: $x=\frac{15-\sqrt{97}}{8}$; $x=\frac{11+\sqrt{73}}{8}$.

Bài 15. Giải phương trình $\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)^3+\sqrt{1-x^2}=\frac{7}{2}$ Đáp số: $x=\pm\frac{3\sqrt{7}}{8}$.

Bài 16. Giải phương trình $4x - x^2 = \dfrac{3\sqrt{3}}{1+\sqrt{x^4-8x^3+16x^2+1}}$ Đáp số: $x = 2 \pm \sqrt{4-\sqrt{13}}$.

Bài 17. Giải phương trình $2x^2 + x - 31 + \sqrt{31x^2+32x+1} = \dfrac{60}{x-2}$.

Hướng dẫn: Sau khi quy đồng và chia hai vế phương trình cho $x+1$, ta đưa phương trình về dạng $(t+x-1)(t-2x+3) = 0$ với $t = \dfrac{\sqrt{(x+1)(31x+1)}}{x+1}$. Đáp số: $x = -1 - \sqrt{\dfrac{3}{2}}; x = 0; x = 4$

Bài 18. Giải phương trình $x^2 + 4x + 5 - \dfrac{3x}{x^2+x+1} = (x-1)\left(1 - \dfrac{2\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^2+x+1}}\right)$ Đáp số: $x = -2$.

Bài 19. Giải phương trình $x = \sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1+2\sqrt[3]{1+x}}$. Đáp số: $x = -2; x = 1 \pm \sqrt{5}$.

Bài 20. Giải phương trình $(x+5)\sqrt{x+1} - 6x = 7 + \sqrt[3]{3x+2}$

Hướng dẫn: Đặt $a = \sqrt{x+1}$; $b = \sqrt[3]{3x+2}$, chuyển PT về hệ:

$$\begin{cases} 3a^2 - 1 = b^3 \\ a^3 - 6a^2 + 4a - 1 = b \end{cases} \Rightarrow (a-1)^3 + (a-1) = b^3 + b.$$ Đáp số: $x = 14 + 6\sqrt{6}$.

Bài 21. Giải phương trình $\dfrac{8-3x}{3+\sqrt{3x+1}} + \sqrt{4+x} = 2\left(\sqrt{3x^2+13x+4} - 2x\right)$

Hướng dẫn: Đặt $a = \sqrt{3x+1}$, $b = \sqrt{x+4}$. Đưa phương trình về dạng:

$(a-b)^2 - (a-b) - 2 = 0$ Đáp số: $x = 0; x = \dfrac{11}{2} + \sqrt{34}$.

Bài 22. Giải phương trình $3\left(\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x}\right) + 2\sqrt{1-4x^2} = x^4 + 7x^2 + 8$

Hướng dẫn: Đặt $a = \sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x}$; $b = x^2$ $\left(\sqrt{2} \le a \le 2, b \ge 0\right)$. Đáp số: $x = 0$

Bài 23. Giải phương trình $(9x^2+24x+17)\sqrt{3x+3} - (x^4+4x^3+4x^2+1)\sqrt{x^2+2x+1} = x^3 - 5x - 4$

Hướng dẫn: Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{3x+3} \ge 0 \\ b = \sqrt{x^2+2x-1} \ge 0 \end{cases}$. Biến đổi phương trình về dạng:

$$(a^4+2a^2+2)a - (b^4+2b^2+2)b + \frac{a(a-b)}{3} = 0 \Leftrightarrow (f(a) - f(b)) + \frac{a(a-b)}{3} = 0$$

Trong đó, hàm $f(x) = x(x^4+2x^2+2)$ đồng biến trên Đáp số: $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$.

3 SỰ KẾT HỢP GIỮA PHƯƠNG PHÁP NHÂN LIÊN HỢP VÀ CÁC PHƯƠNG PHÁP KHÁC

Ví dụ 1. Giải phương trình $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3-x}} = x - \dfrac{1}{2}$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích. Với phương trình trên, công việc đầu tiên mà ta cần thực hiện đó là trục căn thức ở mẫu số bằng phép nhân liên hợp thu gọn ta được:

$\sqrt{3+2x-x^2} = 2x^2 - 4x(*)$

Để giải quyết phương trình $(*)$ ta có thể chọn phương pháp nâng lũy thừa. Ta có lời giải: Điều kiện $\begin{cases} -1 \le x \le 3 \\ x \ne 1 \end{cases}$. Với điều kiện này, phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$\frac{\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}\right)}{2(x-1)} = x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2x+\sqrt{3+2x-x^2}}{2(x-1)} = x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3+2x-x^2} = 2x^2-4x \Leftrightarrow \begin{cases} 3+2x-x^2 = 4x^2(x-2)^2 \\ x \le 0 \vee x \ge 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2\left(x^2-2x-\dfrac{13}{4}\right) = 0 \\ x \le 0 \vee x \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Đối chiếu điều kiện ta có $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{17}}{2}$ là 2 nghiệm của phương trình đã cho. ■

-Bình luận. Phương trình trên có dạng tổng quát $\dfrac{\sqrt{ax+b}}{\sqrt{ax+b} \pm \sqrt{cx+d}} = ex+f$

Chọn $a=2,\ b=-1,\ c=1,\ d=8,\ e=1,\ f=-\dfrac{3}{2}$ ta có bài tập tương tự:

Giải phương trình $\dfrac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x+8}} = x - \dfrac{3}{2}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0$ (ĐH khối B – 2010).

✍ Lời giải.

-Phân tích. Dễ dàng nhẩm được một nghiệm $x=5$ của phương trình. Điều này dẫn đến ý tưởng chọn phương pháp nhân liên hợp cho khai cuộc. Bằng sự khéo léo thêm bớt ta biến đổi phương trình về dạng:

$$\left(\sqrt{3x+1}-4\right) + \left(1-\sqrt{6-x}\right) + 3x^2 - 14x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-5)}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{x-5}{1+\sqrt{6-x}} + (x-5)(3x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-5=0 \\ \dfrac{3}{\sqrt{3x+1}} + \dfrac{1}{1+\sqrt{6-x}} + (3x+1) = 0(*) \end{array}\right.$$

Màn khai cuộc và trung cuộc có vẻ như thuận lợi. Nhưng vấn đề nảy sinh đó là giải quyết phương trình $(*)$ như thế nào? Nhìn lại điều kiện bài toán, ta thấy rằng các số hạng trong vế trái phương trình $(*)$ đều không âm. Do đó, giải pháp hiệu quả nhất là ta sẽ chọn phương pháp đánh giá để chứng minh phương trình $(*)$ vô nghiệm. cho bài toán trên như sau: Điều kiện $-\dfrac{1}{3} \le x \le 6$. Lúc đó, phương trình tương đương với:

$$\left(\sqrt{3x+1}-4\right) + \left(1-\sqrt{6-x}\right) + 3x^2 - 14x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-5)}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{x-5}{1+\sqrt{6-x}} + (x-5)(3x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-5=0 \\ \dfrac{3}{\sqrt{3x+1}} + \dfrac{1}{1+\sqrt{6-x}} + (3x+1) = 0(*) \end{array}\right.$$

Với điều kiện $-\dfrac{1}{3} \le x \le 6$.

Ta có $\dfrac{3}{\sqrt{3x+1}} > 0$, $\dfrac{1}{1+\sqrt{6-x}} > 0$, $3x+1 \ge 0 \Rightarrow VT_{(*)} > 0$, nên phương trình $(*)$ vô nghiệm. Do đó, $x=5$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho. ■

-Bình luận. Như vậy qua lời giải trên, sau khi thực hiện phép nhân liên hợp chúng ta mới chỉ ra được một nghiệm của phương trình. Ngay lúc này, ta có thể tự đặt ra câu hỏi: Liệu phương trình còn nghiệm nào khác nữa không? Câu trả lời nằm ở phương trình $(*)$. Mà phương trình $(*)$ lại có hình thức phức tạp hơn phương trình ban đầu, nếu có nghiệm thì phải giải như thế nào đây?

Ta cần chú ý một điều rằng, khi giải phương trình, ta luôn cố gắng đưa phương trình về một phương trình khác đơn giản hơn có thể tìm được nghiệm. Chính vì thế, chúng ta có quyền nghi ngờ phương trình $(*)$ sẽ không có nghiệm thực. Và công cụ nào sẽ giúp ta làm sang tỏ nghi ngờ đó. Cụ thể trong lời giải trên ta đã sử dụng phương pháp đánh giá xuất phát từ điều kiện bài toán để khẳng định phương trình $(*)$ vô nghiệm.
Như vậy, sự kết hợp giữa phương pháp nhân liên hợp và phương pháp đánh giá bằng bất đẳng thức đã giúp chúng ta giải quyết phương trình một cách nhanh chóng.

Bài tập tương tự:

1. Giải phương trình $x^2+4x=2\sqrt{1+3x}+\sqrt{2x-1}$
2. Giải phương trình $x^2+4x+1=\sqrt{3x+1}+2\sqrt[3]{3x+5}$

Ví dụ 3. Tìm các số thực x thỏa mãn phương trình $x^2-3x-1+\sqrt{x^3+1}=0$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích. Kiểm tra bằng máy tính CaSiO ta tìm được 2 nghiệm của phương trình là $x=0$, $x=2$. Tương tự bài 1, ý tưởng xuất phát đó là sử dụng phương pháp nhân liên hợp nhằm tạo ra nhân tử $x\left(x-2\right)$. Khi đó phương trình tương đương với: $x\left(x-2\right)\left(1+\dfrac{x+1}{\sqrt{x^3+1}+x+1}\right)=0$

Khó khăn của ta bây giờ là vẫn phải giải quyết phương trình $1+\dfrac{x+1}{\sqrt{x^3+1}+x+1}=0$ như thế nào.

Với điều kiện bài toán ta cũng sẽ sự dụng phương pháp đánh giá để hứng minh phương trình này vô nghiệm. Từ đó ta có lời giải. Điều kiện: $x\ge -1$. Nhận thấy $x=-1$ không thỏa mãn phương trình nên ta chỉ cần giải phương trình trong điều kiện $x>-1$. Khi đó, phương trình tương đương với

$\left(x^2-2x\right)+\left[\sqrt{x^3+1}-\left(x+1\right)\right]=0$

$\Leftrightarrow x\left(x-2\right)+\dfrac{x\left(x-2\right)\left(x+1\right)}{\sqrt{x^3+1}+\left(x+1\right)}=0\Leftrightarrow x\left(x-2\right)\left(1+\dfrac{x+1}{\sqrt{x^3+1}+x+1}\right)=0$

Với điều kiện bài toán, $x>-1\Rightarrow 1+\dfrac{x+1}{\sqrt{x^3+1}+x+1}>0$

Do đó, phương trình đã cho có hai nghiệm $x=0$; $x=2$. ■

-Bình luận. trong lời giải trên nhiều học sinh dễ mắc sai lầm ở chỗ không kiểm tra trường hợp $x=-1$ có phải là nghiệm của phương trình không. Ngoài ra phương trình còn có thể đưa về dạng phương trình đẳng cấp như sau: $(1)\Leftrightarrow x^2-x+1+\sqrt{\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)}-2\left(x+1\right)=0\Leftrightarrow -2\dfrac{x+1}{x^2-x+1}+\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-x+1}}+1=0.$

Ví dụ 4. Giải phương trình: $3\sqrt{6x^2-x-1}+\dfrac{46x+17}{\sqrt{2x-1}-4\sqrt{3x+1}}=5-8x.$

✍ **Lời giải.**

-Phân tích. Phương trình này có hình thức khá cồng kềnh , cồng kềnh bởi chính các căn thức xuất hiện ở mẫu số. Điều đó đã khiến cho phép quy đồng của chúng ta có thể gặp trở ngại. Cho nên thay vì thực hiện phép quy đồng các biểu thức mà ta không mong muốn này, chúng ta sẽ sử dụng phép nhân liên hợp để khử căn thức ở mẫu số. Theo kinh nghiệm của chúng tôi, khi đứng trước một bài toán có hình thức phức tạp như thế này, chúng tôi nghĩ ắt hẳn tác giả muốn gửi gắm một điều gì đó đặc biệt đằng sau những cánh cửa với cái vẻ ngoài phức tạp này. Và chìa khóa để mở cánh cửa dầu tiên chính là sự quan sát tinh tế mối quan hệ giữa các con số trong phương trình. Cụ thể hơn, đó là các đẳng thức:

$46x+17=16\left(3x+1\right)-\left(2x-1\right)=\left(4\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x-1}\right)\left(4\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x-1}\right)$

$6x^2-x-1=\left(3x+1\right)\left(2x-1\right)$

Sau phép nhân liên hợp đầu tiên phương trình tương đương với:

$3\sqrt{6x^2-x-1}-\left(\sqrt{2x-1}+4\sqrt{3x+1}\right)=5-8x.$

Nhẩm được nghiệm $x=1$ ta nghĩ ngay đến biện pháp nhân liên hợp lần thứ hai.

Ta thu được phương trình: $(x-1)\left[\frac{18x+15}{\sqrt{6x^2-x-1}+2}-\frac{2}{1+\sqrt{2x-1}}-\frac{12}{2+\sqrt{3x+1}}+8\right]=0$

Sự khó khăn lớn nhất sau khi sử dụng phương pháp nhân liên hợp là tìm nghiệm của vế sau howacj chứng minh vế sau vô nghiệm. Và nếu đã biết nó không có nghiệm thì ta sẽ dựa vào điều kiện bài toán để đánh giá nó vô nghiệm. Cụ thể trong lời giải sau đây: Điều kiện: $\begin{cases} 6x^2-x-1\geq 0 \\ 2x-1\geq 0 \\ 3x+1\geq 0 \\ \sqrt{2x-1}\neq 4\sqrt{3x+1} \end{cases}$

$\Leftrightarrow x\geq -\frac{1}{2}$. Khi đó, phương trình đã cho tương đương với

$3\sqrt{6x^2-x-1}-\left(\sqrt{2x-1}+4\sqrt{3x+1}\right)=5-8x$.

$\Leftrightarrow 3\left(\sqrt{6x^2-x-1}-2\right)+\left(1-\sqrt{2x-1}\right)+4\left(2-\sqrt{3x+1}\right)+8x-8=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{18x+15}{\sqrt{6x^2-x-1}+2}-\frac{2}{1+\sqrt{2x-1}}-\frac{12}{2+\sqrt{3x+1}}+8\right]=0$

Chú ý rằng, $\frac{2}{1+\sqrt{2x-1}}+\frac{12}{2+\sqrt{3x+1}}\leq\frac{2}{1}+\frac{12}{2}=8$.

Suy ra $\frac{18x+15}{\sqrt{6x^2-x-1}+2}-\frac{2}{1+\sqrt{2x-1}}-\frac{12}{2+\sqrt{3x+1}}+8>0,\ \forall x\geq\frac{1}{2}$.

Do đó, $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho. ■

-Bình luận. Đôi khi việc đánh giá vế sau vô nghiệm không phải đơn giản, ta cần phải có một ít sự tinh tế mới có các đánh giá hiệu quả.

Ngoài ra, phương trình $3\sqrt{6x^2-x-1}-\left(\sqrt{2x-1}+4\sqrt{3x+1}\right)=5-8x$ có thể được giải quyết bằng phương pháp đặt ẩn phụ đưa về việc giải hệ phương trình. Ý tưởng này dành cho độc giả tự tìm hiểu.

Ví dụ 5. Giải phương trình $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{(x-1)(x^2-3x+5)}=2x$.

✍ **Lời giải.**

Điều kiện $x\geq 1$. Tương tự như trên, ta nhẩm được một nghiệm $x=1$ của phương trình. Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$\sqrt{x-1}+2\sqrt{(x-1)(x^2-3x+5)}=\frac{(x-1)(4x+3)}{\sqrt{x+3}+2x}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}\left[1+2\sqrt{x^2-3x+5}-\frac{\sqrt{x-1}\,(4x+3)}{\sqrt{x+3}+2x}\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ 1+2\sqrt{x^2-3x+5}=\frac{\sqrt{x-1}\,(4x+3)}{\sqrt{x+3}+2x}(*) \end{array}\right.$

Mặt khác, ta có $1+2\sqrt{x^2-3x+5}=1+\sqrt{2\left[x^2+(x-3)^2+1\right]}>1+x$.

Lại có, theo bất đẳng thức AM – GM thì $x=(x-1)+1\geq 2\sqrt{x-1}$

Do vậy, ta có $\frac{\sqrt{x-1}\,(4x+3)}{\sqrt{x+3}+2x}\leq\frac{\frac{x}{2}(4x+3)}{2x}<x+1<1+2\sqrt{x^2-3x+5}$.

Điều này chứng tỏ phương trình $(*)$ vô nghiệm.

Kết luận, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$. ■

-Bình luận. Vấn đề khó khăn trong lời giải đó là chứng minh phương trình $(*)$ vô nghiệm. Ở lời giải trên ta đã sử dụng bất đẳng thức AM – GM (Cauchuy) một cách hợp lý để giải quyết triệt để đoạn

cuối của bài toán. Tuy nhiên, đó không phải là cách đánh giá duy nhất. Chẳng hạn, ta có thể đánh giá như sau:
Ta có $1+2\sqrt{x^2-3x+5}=1+2\sqrt{(x-2)^2+x+1}\geq 1+2\sqrt{x+1}>2\sqrt{x-1}$.
Mặt khác ta lại có $\dfrac{\sqrt{x-1}\,(4x+3)}{\sqrt{x+3}+2x}\leq\dfrac{\sqrt{x-1}\,(4x+4)}{2+2x}=2\sqrt{x-1}<1+2\sqrt{x^2-3x+5}$.
Do đó, $(*)$ vô nghiệm.

Ví dụ 6. Giải phương trình $\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[3]{x+2}=\sqrt[3]{2x^2}+\sqrt[3]{2x^2+1}$.

✍ **Lời giải.**
-Phân tích. Quan sát phương trình ta nhận thấy rằng:
$(2x^2+1)-(x+3)=2x^2-(x+2)=2x^2-x-2$. Do đó ta nghĩ đến biện pháp ghép đôi để thực hiện phép nhân liên hợp. Khi đó ta được:
$\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[3]{x+2}=\sqrt[3]{2x^2}+\sqrt[3]{2x^2+1}\Leftrightarrow\sqrt[3]{x+3}-\sqrt[3]{2x^2+1}=\sqrt[3]{2x^2}-\sqrt[3]{x+2}$

$$\Leftrightarrow\frac{2x^2-x-2}{\sqrt[3]{4x^4}+\sqrt[3]{2x^2}.\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{(x+2)^2}}+\frac{2x^2-x-2}{\sqrt[3]{(x+3)^2}+\sqrt[3]{x+3}.\sqrt[3]{2x^2+1}+\sqrt[3]{(2x^2+1)^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x^2-x-2=0(1)\\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{4x^4}+\sqrt[3]{2x^2}.\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{(x+2)^2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+3)^2}+\sqrt[3]{x+3}.\sqrt[3]{2x^2+1}+\sqrt[3]{(2x^2+1)^2}}=0(2)\end{array}\right.$$

Phương trình (1) ta dễ dàng giải quyết. Vấn đề ở phương trình (2) ta sẽ giải quyết nó bằng phương pháp gì? Câu trả lời được thể hiện trong lời giải sau đây: Ta có
$\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[3]{x+2}=\sqrt[3]{2x^2}+\sqrt[3]{2x^2+1}\Leftrightarrow\sqrt[3]{x+3}-\sqrt[3]{2x^2+1}=\sqrt[3]{2x^2}-\sqrt[3]{x+2}$

$$\Leftrightarrow\frac{2x^2-x-2}{\sqrt[3]{4x^4}+\sqrt[3]{2x^2}.\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{(x+2)^2}}+\frac{2x^2-x-2}{\sqrt[3]{(x+3)^2}+\sqrt[3]{x+3}.\sqrt[3]{2x^2+1}+\sqrt[3]{(2x^2+1)^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x^2-x-2=0(1)\\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{4x^4}+\sqrt[3]{2x^2}.\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{(x+2)^2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+3)^2}+\sqrt[3]{x+3}.\sqrt[3]{2x^2+1}+\sqrt[3]{(2x^2+1)^2}}=0(2)\end{array}\right.$$

Phương trình (1) cho ta hai nghiệm $x=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{4}$.
Để ý, $a^2+ab+b^2=\left(a+\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3b^2}{4}\geq 0$ nên dẫn đến vế trái phương trình (2) luôn dương, tức là phương trình (2) vô nghiệm. ∎
-Bình luận. Trong lời giải trên, nếu không có sự phối hợp sử dụng phương pháp đánh giá, thì một phương pháp nhân liên hợp không đủ sức để giải quyết trọn vẹn phương trình. Tuy nhiên, phương trình có thể giải quyết theo phương pháp hàm số: Ta có hàm số $f(t)=\sqrt[3]{t}+\sqrt[3]{t+1}$ là hàm đồng biến theo t , nên từ phương trình ta có $f\left(x+2\right)=f\left(2x^2\right)\Leftrightarrow 2x^2=x+2\Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{4}$.

Ví dụ 7. Giải phương trình $\sqrt[3]{x^2+4}=\sqrt{x-1}+2x-3$.

✍ **Lời giải.**
-Phân tích. Đối với những phương trình có nhiều loại dấu căn thức như phương trình trên thì phương pháp nhân lũy thừa hầu như bất lực. Trong trường hợp này, ta nhẩm được 1 nghiệm $x=2$, nên định hướng sẽ sử dụng phương pháp nhâ liên hợp cho khai cuộc. Sau phép nhân liên hợp ta thu được:
$\sqrt[3]{x^2+4}=\sqrt{x-1}+2x-3\Leftrightarrow\sqrt[3]{x^2+4}-2=\sqrt{x-1}-1+2\left(x-2\right)$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2-4}{\sqrt[3]{(x^2+4)^2}+\sqrt[3]{x^2+4}+4}=\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}+2\left(x-2\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ \dfrac{x+2}{\sqrt[3]{\left(x^2+4\right)^2}+\sqrt[3]{x^2+4}+4}-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}-2=0(*) \end{array}\right.$$

Việc còn lại bây giờ của ta là phải giải quyết phương trình $(*)$. Với hình thức phức tạp của phương trình $(*)$, kết hợp việc kiểm tra nghiệm bằng máy tính CaSiO ta sẽ đánh giá để khẳng định phương trình $(*)$ vô nghiệm. Với điều kiện $x \geq 1$, ta có $\sqrt[3]{x^2+4}=\sqrt{x-1}+2x-3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2+4}-2=\sqrt{x-1}-1+2(x-2)$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-4}{\sqrt[3]{\left(x^2+4\right)^2}+\sqrt[3]{x^2+4}+4}=\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}+2(x-2)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ \dfrac{x+2}{\sqrt[3]{\left(x^2+4\right)^2}+\sqrt[3]{x^2+4}+4}-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}-2=0(*) \end{array}\right.$$

Từ điều kiện $x \geq 1$ suy ra $\sqrt[3]{\left(x^2+4\right)^2}>x \Rightarrow \dfrac{x+2}{\sqrt[3]{\left(x^2+4\right)^2}+\sqrt[3]{x^2+4}+4}<1 \Rightarrow VT_{(*)}<0$.

Do đó, phương trình $(*)$ vô nghiệm. Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm $x=2$. ■

Như vậy, qua các bài toán trên, chúng ta nhìn ra được lợi ích của sự kết hợp hai phương pháp nhân liên hợp và phương pháp đánh giá chưa nào?

Sử dụng phương pháp nhân liên hợp ta sẽ chỉ ra được nghiệm của phương trình, cò phương pháp đánh giá sẽ chứng minh được tính duy nhất nghiệm hay vô nghiệm của một phương trình. Điều khó khăn nhất hi thực hiện sự kết hợp giữa hai phương pháp này để giải quyết triệt để phương trình vô tỷ và kĩ năng đánh giá.

Ví dụ 8. Giải phương trình $\sqrt[3]{162x^3+2}-\sqrt{27x^2-9x+1}=1$.

✍ Lời giải.

-Phân tích. Kiểm tra bằng máy tính CaSiO ta tìm được nghiệm $x=\dfrac{1}{3}$ của phương trình. Với ý tưởng nhân liên hợp ta có được: $\sqrt[3]{162x^3+2}-\sqrt{27x^2-9x+1}=1$

$$\Leftrightarrow (3x-1)\left[\frac{2\left(9x^2+3x+1\right)}{\left(\sqrt[3]{162x^3+2}\right)^2+2\sqrt[3]{162x^3+2}+4}-\frac{3x}{\sqrt{27x^2-9x+1}+1}\right]=0$$

Vấn đề lúc này ta sẽ giải quyết phương trình sau như thế nào:

$$\frac{2\left(9x^2+3x+1\right)}{\left(\sqrt[3]{162x^3+2}\right)^2+2\sqrt[3]{162x^3+2}+4}-\frac{3x}{\sqrt{27x^2-9x+1}+1}=0$$

Phương trình có hình thức rất phức tạp, tuy nhiên ta có:

$\sqrt[3]{162x^3+2}=\sqrt{27x^2-9x+1}+1$. Và sau đó, để việc xử lý phương trình được thuận tiện ta sẽ sử dụng phép đặt ẩn $a=\sqrt[3]{162x^3+2}$. Khi đó, phương trình được chuyển thành: $2\left(3x+\dfrac{1}{3x}+1\right)=\alpha+\dfrac{4}{\alpha}+2$

$$\Leftrightarrow 3x+\frac{1}{3x}+1=\frac{\alpha}{2}+\frac{2}{\alpha}+1$$

Từ đó ta có lời giải: Ta có $27x^2-9x+1>0$, nên phương trình luôn xác định với mọi số thực x. Viết lại phương trình đã cho dưới dạng:

$$\sqrt[3]{162x^3+2}-2+1-\sqrt{27x^2-9x+1}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{162x^3-6}{\left(\sqrt[3]{162x^3+2}\right)^2+2\sqrt[3]{162x^3+2}+4}-\frac{3x(3x-1)}{\sqrt{27x^2-9x+1}+1}=0$$

$$\Leftrightarrow (3x-1)\left[\frac{2\left(9x^2+3x+1\right)}{\left(\sqrt[3]{162x^3+2}\right)^2+2\sqrt[3]{162x^3+2}+4}-\frac{3x}{\sqrt{27x^2-9x+1}+1}\right]=0$$

Xét phương trình $\dfrac{2\left(9x^2+3x+1\right)}{\left(\sqrt[3]{162x^3+2}\right)^2+2\sqrt[3]{162x^3+2}+4}-\dfrac{3x}{\sqrt{27x^2-9x+1}+1}=0$

$\dfrac{2\left(9x^2+3x+1\right)}{\left(\sqrt[3]{162x^3+2}\right)^2+2\sqrt[3]{162x^3+2}+4}-\dfrac{3x}{\sqrt[3]{162x^3+2}}=0$

Đặt $a=\sqrt[3]{162x^3+2}$.

Suy ra $2\left(3x+\dfrac{1}{3x}+1\right)=\alpha+\dfrac{4}{\alpha}+2\Leftrightarrow 3x+\dfrac{1}{3x}+1=\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{2}{\alpha}+1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x=\dfrac{\alpha}{2}\\ 3x=\dfrac{2}{\alpha}\end{array}\right.$

-Với $3x=\dfrac{\alpha}{2}\Leftrightarrow 216x^3=162x^3+2\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$.

-Với $3x=\dfrac{2}{\alpha}\Leftrightarrow 27x^3\left(162x^3+2\right)=8\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{3}\\ x=-\sqrt[3]{\dfrac{4}{81}}\end{array}\right.$

Thử lại phương trình đã cho ta có nghiệm thỏa mãn là $x=\dfrac{1}{3}$. ■

-Bình luận. Trong lời giải trên ta đã kết hợp ba phương pháp để giải quyết phương trình, đó là phương pháp nhân liên hợp, phương pháp đặt ẩn phụ và phương pháp nâng lũy thừa. Rõ ràng nếu thiếu một trong ba phương pháp này thì ta sẽ không thể giải quyết được bài toán hoàn toàn. Chú ý phương trình $3x+\dfrac{1}{3x}+1=\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{2}{\alpha}+1$

Ta cũng có thể giải quyết bằng phương pháp hàm số với $f(t)=t+\dfrac{1}{t}+1$. Nhưng để hàm $f(t)$ đơn điệu khi gắn $t=3x$, $t=\dfrac{\alpha}{2}$ hay $t=\dfrac{2}{\alpha}$, ta cần chú ý thu hẹp điều kiện các biến.

Ví dụ 9. Tìm tất cả các giá trị $x<2$ thỏa mãn phương trình sau: $2\sqrt{(2-x)(5-x)}=x+\sqrt{(2-x)(10-x)}$.

✍ **Lời giải.**

-Phân tích. Dễ dàng nhận thấy $x=1$ là một nghiệm của phương trình trên. Bằng ý tưởng nhân liên hợp để tạo ra nhân tử $x-1$ ta được:

$2\sqrt{(2-x)(5-x)}=x+\sqrt{(2-x)(10-x)}$

$\Leftrightarrow 2\left[\sqrt{(2-x)(5-x)}-2\right]=(x-1)+\left[\sqrt{(2-x)(10-x)}-3\right]$

$\Leftrightarrow\dfrac{2(x-1)(x-6)}{\sqrt{(2-x)(5-x)}+2}=(x-1)+\dfrac{(x-1)(x-11)}{\sqrt{(2-x)(10-x)}+3}$

Bài toán sẽ được giải quyết hoàn toàn nế phương trình sau được giải quyết: $\dfrac{2(x-6)}{\sqrt{(2-x)(5-x)}+2}=1+\dfrac{x-11}{\sqrt{(2-x)(10-x)}+3}$

Chú ý rằng giả thiết tại sao lại cho $x<2$. Do đó, kết hợp với phương pháp đánh giá ta sẽ giải quyết phương trình như sau: Với $x<2$ thì các biểu thức tổng phương trình luôn xác định. Thực hiện trục căn thức cho phương trình, ta được: $2\sqrt{(2-x)(5-x)}=x+\sqrt{(2-x)(10-x)}$

$\Leftrightarrow 2\left[\sqrt{(2-x)(5-x)}-2\right]=(x-1)+\left[\sqrt{(2-x)(10-x)}-3\right]$

$\Leftrightarrow\dfrac{2(x-1)(x-6)}{\sqrt{(2-x)(5-x)}+2}=(x-1)+\dfrac{(x-1)(x-11)}{\sqrt{(2-x)(10-x)}+3}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ \dfrac{2(x-6)}{\sqrt{(2-x)(5-x)}+2} = 1 + \dfrac{x-11}{\sqrt{(2-x)(10-x)}+3} (*) \end{array}\right.$

Do $x < 2$ nên $(2-x)(10-x) \geq (2-x)(5-x)$

Suy ra $\dfrac{1}{\sqrt{(2-x)(10-x)}+3} \leq \dfrac{1}{\sqrt{(2-x)(5-x)}+2}$.

Nhưng do $x < 2$ nên $x - 11 < 0$. Vì vậy dấu bất đẳng thức sẽ đổi chiều, hay là: $\dfrac{x-1}{\sqrt{(2-x)(10-x)}+3} \geq \dfrac{x-11}{\sqrt{(2-x)(5-x)}+2} (1)$

Mặt khác hiển nhiên ta có:

$1 \geq \dfrac{1}{\sqrt{(2-x)(5-x)}+2} (2)$

Từ (1) và (2) ta có: $\dfrac{x-11}{\sqrt{(2-x)(10-x)}+3} + 1 - \dfrac{2(x-6)}{\sqrt{(2-x)(5-x)}+2} \geq \dfrac{x-11}{\sqrt{(2-x)(5-x)}+2} + \dfrac{1}{\sqrt{(2-x)(5-x)}+2} - \dfrac{2(x-6)}{\sqrt{(2-x)(5-x)}+2} = \dfrac{2-x}{\sqrt{(2-x)(5-x)}+2} > 0$

Do đó, phương trình $(*)$ vô nghiệm.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 1$. ■

-Bình luận. Bài toán trên thực tế là khá khó. Do đó, chúng ta cần phải linh hoạt khi thực hiện nhân liên hợp và kết hợp kĩ năng đánh giá cần bám sát giả thiết $x < 2$. Tuy nhiên, liệu ta có thể mở rộng tập giá trị x trong được không? Nếu giải phương trình trên trong tập số thực thì ta sẽ như thế nào? Sau đây, chúng ta có thể tham khảo một hướng giải quyết khác của phương trình. Với sự kết hợp giữa hai phương pháp nhân liên hợp, phương pháp đặt ẩn phụ và phương pháp nâng lũy thừa, ta có thể giải quyết phương trình trong như sau:

Biến đổi phương trình về dạng: $2\left[\sqrt{(2-x)(5-x)} - (x+1)\right] = \sqrt{(2-x)(10-x)} - (x+2)$

Thực hiện trục căn thức (Kiểm tra điều kiện cho hai mẫu khác 0). Ta có phương trình tương đương: $\dfrac{16(1-x)}{B+x+2} = \dfrac{18(1-x)}{A+x+1}$ với $A = \sqrt{(2-x)(5-x)}$, $B = \sqrt{(2-x)(10-x)}$

Ngoài nghiệm $x = 1$ ta còn giải quyết hệ phương trình:

$\begin{cases} 2A = B + x \\ 8(A+x+1) = 9(B+x+2) \end{cases} \Rightarrow 5B = 3x - 10 \Leftrightarrow 5\sqrt{(2-x)(10-x)} = 3x - 10$

Bằng phương pháp nâng lũy thừa đưa phương trình về bậc 2. Từ đó ta có thêm 1 nghiệm $x = \dfrac{15+5\sqrt{5}}{2}$.

Ví dụ 10. Giải phương trình $x^3 - 3x + 1 = \sqrt{8-3x^2}$.

Lời giải.

-Phân tích. Kiểm tra bằng máy tính CaSiO ta tìm được nghiệm khá lẻ của phương trình. Mặt khác, phương pháp nâng lũy thừa và phương pháp đặt ẩn phụ lại không thể giúp gì cho ta trong trường này. Do đó, ta sẽ dùng hệ số bất định để thực hiện phép nhân liên hợp.

Khi đó, ta có được: $x^3 - 2x - 1 + 4\dfrac{x^2-x-1}{\sqrt{8-3x^2}+2-x} = 0$

$\Leftrightarrow (x^2-x-1)\left(x+1+\dfrac{4}{\sqrt{8-3x^2}+2-x}\right) = 0$

Và chắc chắn đến đây phương trình vẫn chưa được giải quyết hoàn toàn. Nếu có sự kết hợp sử dụng đánh giá bằng phương pháp hàm số thì liệu phương trình có được giải quyết hoàn toàn không? Chúng ta cùng xem xét lời giải sau: Điều kiện: $-\frac{2\sqrt{6}}{3} \leq x \leq \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Khi đó, phương trình trở thành: $x^3 - 2x - 1 + 4\frac{x^2 - x - 1}{\sqrt{8 - 3x^2} + 2 - x} = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - x - 1)\left(x + 1 + \frac{4}{\sqrt{8 - 3x^2} + 2 - x}\right) = 0$

Xét $f(x) = \sqrt{8 - 3x^2} + 2 - x$ ta có: $f'(x) = \frac{-3x}{\sqrt{8 - 3x^2}} - 1$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-3x}{\sqrt{8 - 3x^2}} = 1 \Leftrightarrow x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$

Ta có bảng biến thiên:

$\Rightarrow f(x) \leq \frac{6 + 4\sqrt{6}}{3}$ kết hợp với $|x| \leq \frac{2\sqrt{6}}{3} \Rightarrow 0 < f(x) \leq \frac{6 + 4\sqrt{6}}{3}$

$\Rightarrow x + 1 + \frac{4}{\sqrt{8 - 3x^2} + 2 - x} = x + 1 + \frac{4}{f(x)} \geq -\frac{2\sqrt{6}}{3} + 1 + \frac{4}{\frac{6 + 4\sqrt{6}}{3}} > 0$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. ■

-Bình luận. Như vậy, bằng sự kết hợp giữa phương pháp nhân liên hợp và phương pháp hàm số, ta đã tìm được tất cả các nghiệm của phương trình. Ngoài kĩ năng đánh giá bằng bất đẳng thức, thì phương pháp hàm số cũng là một phương pháp mạnh để khẳng định một phương trình có duy nhất nghiệm hoặc vô nghiệm nhờ vào tính đơn điệu của hàm số. Do đó, sự kết hợp giữa phương pháp nhân liên hợp và phương pháp hàm số cũng là một công cụ rất mạnh để giải quyết phương trình vô tỷ.

Ví dụ 11. Giải phương trình $4\sqrt{x + 2} + \sqrt{22 - 3x} = x^2 + 8$

✍ **Lời giải.**

-Phân tích. Bằng kĩ năng nhẩm nghiệm ta có $x = 2$ là một nghiệm của phương trình trên. Từ đó nảy sinh ý tưởng nhân liên hợp. Và tất nhiên, để giải quyết nốt vế sau thì ta có thể phải nhắc đến phương pháp hàm số. Từ đó ta có lời giải cho bài toán như sau: Điều kiện $-2 \leq x \leq \frac{22}{3}$. Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$4\left(\sqrt{x + 2} - 2\right) + \left(\sqrt{22 - 3x} - 4\right) = x^2 - 4$

$\Leftrightarrow (x - 2)\left(x + 2 - \frac{4}{\sqrt{x + 2} + 2} + \frac{3}{\sqrt{22 - 3x} + 4}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x + 2 - \frac{4}{\sqrt{x + 2} + 2} + \frac{3}{\sqrt{22 - 3x} + 4} = 0(*) \end{array}\right.$

Xét hàm số $f(x) = x + 2 - \frac{4}{\sqrt{x + 2} + 2} + \frac{3}{\sqrt{22 - 3x} + 4}$.

Ta có $f'(x) = 1 + \frac{2}{\sqrt{x + 2}\left(\sqrt{x + 2} + 2\right)^2} + \frac{9}{2\sqrt{22 - 3x}\left(\sqrt{22 - 3x} + 4\right)^2} > 0, \forall x \in \left(-2; \frac{22}{3}\right)$.

Vậy $f(x)$ là hàm đồng biến trên $\left[-2; \frac{22}{3}\right]$. Mà $f(-1) = 0$ nên phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $x = -1$.

Tóm lại, phương trình ban đầu có 2 nghiệm $x = -1; x = 2$. ■

-Bình luận. Sau phép nhân liên hợp ta chỉ mới tìm ra được một nghiệm của phương trình. Tuy nhiên, vấn đề khó khăn hơn đó là chúng ta lại tạo ra một phương trình $(*)$ có hình thức phức tạp hơn phương trình ban đầu. Tuy nhiên, bằng cách sử dụng tính đơn điệu của hàm số ta đã chứng minh được rằng phương trình (∗) có nghiệm duy nhất $x = -1$. Sự kết hợp giữa hai phương pháp này đã tạo nên nét đặc trưng cho lời giải khi gặp những dạng phương trình vô tỷ như trên.

Ví dụ 12. Giải phương trình $\sqrt{x^2+9x-1} + x\sqrt{11-3x} = 2x+3$.

Lời giải.

-Phân tích. Ý tưởng sử dụng phương pháp nhân liên hợp mở đầu xuất phát từ việc ta nhẩm được nghiệm của phương trình.

Khi đó ta có: $(3x-10)\left[\dfrac{1}{\sqrt{x^2+9x-1}+x+3} - \dfrac{1}{\sqrt{11-3x}+1}\right] = 0$

Khó khăn ở vế sau chúng ta sẽ giải quyết nó bằng phương pháp hàm số, cụ thể được thể hiện trong lời giải sau đây: Điều kiện $\dfrac{\sqrt{85}-9}{2} \le x \le \dfrac{11}{3}$. Phương trình tương đương với

$\sqrt{x^2+9x-1} - (x+3) + x\left(\sqrt{11-3x}-1\right) = 0$

$\Leftrightarrow (3x-10)\left[\dfrac{1}{\sqrt{x^2+9x-1}+x+3} - \dfrac{1}{\sqrt{11-3x}+1}\right] = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{10}{3} \\ x^2+3x+x\sqrt{x^2+9x-1} = \sqrt{11-3x}+1 (1) \end{array}\right.$$

Xét $f(x) = x^2+3x+x\sqrt{x^2+9x-1}$, $g(x) = \sqrt{11-3x}+1$. Ta có

$f'(x) = 2x+3+\sqrt{x^2+9x-1} + \dfrac{2x^2+9x}{2\sqrt{x^2+9x-1}} > 0$, $g'(x) = -\dfrac{3}{2\sqrt{11-3x}} < 0$.

Do đó, (1) nếu có nghiệm sẽ có duy nhất nghiệm.

Hơn nữa, ta lại có $f\left(\dfrac{2}{3}\right) = g\left(\dfrac{2}{3}\right) = 4$ nên (1) có nghiệm $x = \dfrac{2}{3}$.

Vậy, phương trình đã cho có 2 nghiệm $x = \dfrac{10}{3}$; $x = \dfrac{2}{3}$.

-CÁC BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Giải phương trình $\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} = x^2 - x + 1$. Đáp số: $x = -1$; $x = 2$.

Bài 2. Giải phương trình $\sqrt{\dfrac{1-x}{x}} = \dfrac{2x+x^2}{1+x^2}$. Đáp số: $x = \dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn: $PT \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{1-x}{x}} - 1 = \dfrac{2x+x^2}{1+x^2} - 1$, trục căn thức làm xuất hiện nhân tử chung $2x-1$.

Bài 3. Giải phương trình $9\left(\sqrt{4x+1} - \sqrt{3x-2}\right) = x+3$ Đáp số:$x = 6$.

Hướng dẫn: $PT \Leftrightarrow 9\left(\sqrt{4x-1} - 5 + 4 - \sqrt{3x-2}\right) = x-6$, trục căn thức làm xuất hiện nhân tử chung $x-6$.

Bài 4. Giải phương trình $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = 2x^2 - 5x - 1$. Đáp số: $x = 3$.

Hướng dẫn: $PT \Leftrightarrow \sqrt{x-2} - 1 + \sqrt{4-x} - 1 = 2x^2 - 5x - 3$, trục căn thức làm xuất hiện nhân tử chung $x-3$.

Bài 5. Giải phương trình $\sqrt{4x+1} - \sqrt{3x-2} = \dfrac{x+3}{5}$

Hướng dẫn: $PT \Leftrightarrow \sqrt{4x+1} - 3 + 2 - \sqrt{3x-2} = \dfrac{x+3}{5} - 1$, trục căn thức làm xuất hiện nhân tử chung $x-2$.

Đáp số: $x = 2$.

Bài 6. Giải phương trình $x^2 + 9x + 20 = 2\sqrt{3x+10}$ Đáp số: $x = -3$.

Bài 7. Giải phương trình $9\left(\sqrt{4x+1} - \sqrt{3x-2}\right) = x+3$. (HSG HN2010) Đáp số: $x = 6$.

Bài 8. Giải phương trình $\sqrt{3-x} + \sqrt{2+x} = x^3 + x^2 - 4x - 1$. Đáp số: $x = -1$; $x = 2$.

Bài 9. Giải phương trình $\sqrt{x^2+12} - \sqrt{x^2+5} = 3x - 5$. Đáp số: $x = 2$.

Bài 10. Giải phương trình $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{2x^2} + \sqrt[3]{2x^2+1}$. Đáp số: $x = -1$; $x = -\dfrac{1}{2}$.

Bài 11. Giải phương trình $\sqrt{x-1}-\sqrt{x+3}+2\sqrt{(x-1)(x^2-3x+5)}=-2x$. Đáp số: $x=1$.
Bài 12. Giải phương trình $x^2-3x-4=\sqrt{x-1}\,(x^2-4x-2)$ Đáp số: $x=1$.
Bài 13. Giải phương trình $\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt{x-3}+\sqrt{x+1}+x=\dfrac{x+3}{x^2-6}+5$. Đáp số: $x=3$.
Bài 14. Giải phương trình $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x+1}}+\sqrt{x}+x^2=x+\dfrac{1}{x}+1$. Đáp số: $x=1$.
Bài 15. Giải phương trình $\sqrt{\dfrac{x+9}{x^2+x+2}}+\dfrac{2}{\sqrt{x^2-3}}=\dfrac{x^2+1}{4}$. Đáp số: $x=\pm\sqrt{7}$.
Bài 16. Giải phương trình $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{2x}=\dfrac{7}{4}$. Đáp số: $x=2$.
Bài 17. Giải phương trình $\sqrt[3]{x^2-1}+x=\sqrt{x^3-1}$
Hướng dẫn: Chứng minh $1+\dfrac{x+3}{\left(\sqrt[3]{x^2-1}+1\right)^2+3}<2<\dfrac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5}$. Đáp số: $x=3$.
Bài 18. Giải phương trình $4\sqrt{8-\sqrt{64-x^2}}=x\left(1+\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}\right)$. Đáp số:$x=0$.
Bài 19. Giải phương trình $(27x^3-3x)\left(\sqrt{x^2+x+1}-1\right)=(4x^2+2x)(x+1)\left(2-\sqrt{9x^2+3}\right)$.
Đáp số: $x=-\dfrac{1}{5}$.
Bài 20. Giải phương trình $\sqrt{2x^2-3x+1}=\dfrac{x^2-1}{2x-3}$. Đáp số: $x=1$; $x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.
Bài 21. Giải phương trình $(x-1)\sqrt{2x^2-5x-15}+\sqrt{\dfrac{2x^3-7x^2+19}{2}}=2x^3-7x^2-12x+17+\sqrt{7x}$.
Đáp số: $x=1$; $x=\dfrac{5\pm\sqrt{177}}{4}$.

4 SỰ KẾT HỢP GIỮA PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ VÀ CÁC PHƯƠNG PHÁP KHÁC

Ví dụ 1. Giải phương trình $8x^3-36x^2+53x-25=\sqrt[3]{3x-5}$.

✍ **Lời giải.**
-Phân tích. Phương trình được biến đổi thành dạng:
$(2x-3)^3+2x-3=3x-5+\sqrt[3]{3x-5}$.
Sự phân tích này dẫn đến ý tưởng sử dụng tính đơn điệu của hàm số để giải quyết phương trình. Sau đó, ta cần tìm nghiệm của phương trình $2x-3=\sqrt[3]{3x-5}(*)$. Chắc chắn chúng ta chưa thể kết luận được nghiệm của phương trình ngay lúc này. Và có lẽ biện pháp nâng lũy thừa là giải pháp an toàn cho phương trình $(*)$. Từ đó, ta có lời giải: Ta có: $8x^3-36x^2+53x-25=\sqrt[3]{3x-5}\Leftrightarrow(2x-3)^3+2x-3=3x-5+\sqrt[3]{3x-5}(1)$
Xét hàm $f(t)=t^3+t$ đồng biến với mọi
Do đó, $(1)\Leftrightarrow f(2x-3)=f\left(\sqrt[3]{3x-5}\right)\Leftrightarrow 2x-3=\sqrt[3]{3x-5}$

$$\Leftrightarrow(2x-3)^3=3x-5\Leftrightarrow(x-2)(8x^2-20x+11)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=\dfrac{5\pm\sqrt{3}}{4}\end{array}\right.$$

Vậy, phương trình đã cho có 3 nghiệm: $x=2$; $x=\dfrac{5\pm\sqrt{3}}{4}$. ■

-Bình luận. Trong lời giải trên ta cần chú ý đến kĩ năng tìm ra hàm số đặc trưng và hàm số kết hợp cùng với phương pháp nâng lũy thừa để có thể tìm được các nghiệm của phương trình.
Bài tập tương tự:
1. Giải phương trình $x^2-4x-3=\sqrt{x+5}$.
2. Giải phương trình $\sqrt{(x+6)^3}+\sqrt{x+6}-x^6-12x^5-48x^4-64x^3-x^2-4x=0$
(Đề thi Olympic 30/04/2011).

Ví dụ 2. Giải phương trình $\sqrt[3]{6x+1} = 8x^3 - 4x - 1$.

Lời giải.

-Phân tích.

Phương trình được biến đổi thành dạng: $6x+1+\sqrt[3]{6x+1} = (2x)^3 + 2x$

Ý tưởng tương tự bài trước, bằng sự kết hợp hai phương pháp hàm số và phương pháp nâng lũy thừa chúng ta quy việc giải phương trình trên về giải phương trình $8x^3 - 6x - 1 = 0$. Tuy nhiên , phương trình bậc 3 này lại có 3 nghiệm phân biệt là 3 số vô tỷ đều thuộc $(-1;1)$, để ý đến đẳng thức $4x^3 - 3x = 4\cos^3 t - 3\cos t$ sẽ giúp chúng ta định hướng được cách giải phương trình bậc 3 này. Cụ thể lời giải như sau: Ta có: $\sqrt[3]{6x+1} = 8x^3 - 4x - 1 \Leftrightarrow 6x+1+\sqrt[3]{6x+1} = (2x)^3 + 2x \Leftrightarrow f\left(\sqrt[3]{6x+1}\right) = f(2x)$

Trong đó $f(t) = t^3 + t$. Dễ thấy $f(t)$ là một hàm đồng biến trên nên

$f\left(\sqrt[3]{6x+1}\right) = f(2x) \Leftrightarrow \sqrt[3]{6x+1} = 2x \Leftrightarrow 8x^3 = 6x+1 \Leftrightarrow 4x^3 - 3x = \frac{1}{2}(1)$

-Nếu $|x| > 1$ thì $|VT(1)| = |x(4\cos^2 - 3)| > 1 > \frac{1}{2}$.

-Nếu $|x| \le 1$ thì đặt $x = \cos\varphi,\ \varphi \in [0;\pi]$.

Phương trình trở thành: $4\cos^4\varphi - 3\cos\varphi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 3\varphi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{3k\pi}{3}$.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm $x = \cos\frac{\pi}{9}$; $x = \cos\frac{5\pi}{9}$; $x = \cos\frac{7\pi}{9}$. ■

-Bình luận. Với phương trình trên, bằng phương pháp hàm số ta mới chỉ thực hiện được một công đoạn của công việc giải phương trình. Do đó, để hoàn thành công việc giải phương trình thì ta cần có sự kết hợp giữa phương pháp nâng lũy thừa, phương pháp đánh giá và phương pháp đặt ẩn phụ. Nếu thiếu đi một công đoạn ta sẽ không hoàn thành công việc cũng như không giải quyết được trọn vẹn phương trình.

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$4 + 2\sqrt{4x-4x^2+3} + \sqrt{2x+1} + \sqrt{3-2x} = \frac{1}{4}(2x-1)^2(4x^2-4x+3).$$

Lời giải.

-Phân tích. Quan sát kĩ phương trình trên ta nhận thấy một số điều sau đây:

$4 = (2x+1) + (3-2x)$;

$2\sqrt{4x-4x^2+3} = 2\sqrt{(2x+1)(3-2x)}$;

$(2x-1)^2(4x^2-4x+3) = (2x-1)^2\left[(2x-1)^2+2\right]$.

Dựa trên những điều này, phương trình được biến đổi tương đương thành:

$$\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-2x}\right)^2 + \left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-2x}\right) = \left[\frac{(2x-1)^2}{2}\right]^2 + \frac{(2x-1)^2}{2}$$

Từ đây, ý tưởng sử dụng phương pháp hàm số đã rõ ràng. Ta quy bài toán về giải phương trình: $\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-2x} = \frac{(2x-1)^2}{2}(*)$

Đến đây phương trình vẫn chưa được giải quyết hoàn toàn. Vấn đề nảy sinh bây giờ là giải phương trình $(*)$. Để ý $2x-1 = \frac{(2x+1)-(3-2x)}{2}$ gợi cho ta nghĩ đến phương pháp đặt ẩn phụ để giải quyết phương trình $(*)$. Cụ thể lời gải bài toán như sau: Điều kiện $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2}$. Khi đó, phương trình được viết lại dưới dạng sau:

$$\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-2x}\right)^2 + \left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-2x}\right) = \left[\frac{(2x-1)^2}{2}\right]^2 + \frac{(2x-1)^2}{2}$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t, \forall t \in [0;+\infty)$ có $f'(t) = 2t+1 > 0, \forall t \in [0;+\infty)$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$.

Do đó, phương trình tương đương với $\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-2x}=\dfrac{(2x-1)^2}{2}(*)$

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{2x+1}\geq 0 \\ b=\sqrt{3-2x}\geq 0 \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2=4.$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} 8(a+b)=(a^2-b^2)^2 \\ a^2+b^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8=(a-b)^2(a+b) \\ a^2+b^2=4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (4-2ab)(a+b)=8 \\ a^2+b^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-ab)(a+b)=4 \\ (a+b)^2-2ab=4 \end{cases}$. Tiếp tục đặt $\begin{cases} S=a+b\geq 0 \\ P=ab\geq 0 \end{cases}$

Ta cần giải hệ phương trình $\begin{cases} (2-P)S=4 \\ S^2-2P=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=\dfrac{4}{2-P} \\ P(P^2-4P-4)=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P=0\Rightarrow S=2 \\ P=1+\sqrt{5}\Rightarrow S=\dfrac{4}{1-\sqrt{5}}\text{ (loại)} \\ P=1-\sqrt{5} \end{array}\right.$

Với $\begin{cases} S=2 \\ P=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=2 \\ b=0 \end{cases} \\ \begin{cases} a=0 \\ b=2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{2x+1}=2 \\ \sqrt{3-2x}=0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{2x+1}=0 \\ \sqrt{3-2x}=2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{2} \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện và phương trình ban đầu)

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=-\dfrac{1}{2}$; $x=\dfrac{3}{2}$. ■

-Bình luận. Một phương trình tuy có hình thức khá cồng kềnh nhưng bằng sự kết hợp giữa hai phương pháp hàm số và phương pháp đặt ẩn phụ đã giúp ta giải quyết phương trình một cách tự nhiên và trọn vẹn. Bằng sự kết hợp giữa phương pháp hàm số và một số phương pháp khác, các bạn độc giả có thể thực hiện giải quyết một số bài toán sau đây:

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải phương trình $x^3+3x^2+4x+2=(3x+2)\sqrt{3x+1}$. Đáp số: $x=0$; $x=1$.
Bài 2. Giải phương trình $x^3-6x^2+12x-7=\sqrt[3]{-x^3+9x^2-19x+11}$. Đáp số: $x=1$; $x=2$; $x=3$.
Bài 3. Giải phương trình $2\sqrt[3]{2x-1}=27x^3-27x^2+13x-2$.
(Trích đề thi HSG Hải Phòng) Đáp số: $x=0$.
Bài 4. Giải phương trình $\sqrt[3]{\dfrac{x^9-9x^2+1}{3}}=2x+1$.
(Trích đề thi chọn đội tuyển Phú Yên) Đáp số: $x\approx -0,3$; $x\approx -0,2$; $x\approx 1,9$.
Bài 5. Giải phương trình $4x^3+18x^2+27x+14=\sqrt[3]{4x+5}$.
Hướng dẫn: Chú ý $4x^3=4(x)^3=\dfrac{1}{2}(2x)^3$. Đáp số: $x=2$; $x=5$.

5 MỘT SỐ KIỂU KẾT HỢP KHÁC ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

Ví dụ 1. Giải phương trình $x^3 - 3x = \sqrt{x+2}$.

Lời giải.

-Phân tích. Kiểm ta nghiệm phương trình bằng máy tính CaSiO ta thấy rằng phương trình trên có 3 nghiệm phân biệt đều thuộc $(-2;2)$. Do đó, bằng sự kết hợp giữa phương pháp đánh giá và phương pháp đặt ẩn phụ ta có lời giải: Nếu $x < -2$; phương trình không xác định.

Nếu $x > 2$, ta có: $x^3 - 3x = x + x\left(x^2 - 4\right) > x > \sqrt{x+2}$. Suy ra phương trình vô nghiệm. Do đó, ta chỉ cần giải phương trình đã cho với $-2 \le x \le 2$.

Đặt $x = 2\cos t$, $t \in (0;\pi)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$2\left(4\cos^3 t - 3\cos t\right) = \sqrt{2\left(1+\cos t\right)} \Leftrightarrow \cos 3t = \cos\left(\frac{t}{2}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = \dfrac{4\pi}{5} \\ t = \dfrac{4\pi}{7} \end{array}\right. \quad (\text{vì } t \in (0;\pi)\,.)$$

Tóm lại, phương trình đã cho có 3 nghiệm: 2; $x = 2\cos\dfrac{4\pi}{5}$; $x = 2\cos\dfrac{4\pi}{7}$. ■

-Bình luận. Bởi vì phương trình xuất hiện 2 nghiệm rất lẻ nên ta không nên sử dụng phương pháp nâng lũy thừa ngay từ đầu. Phép đặt ẩn phụ bằng cách lượng giác hóa phương trình như trên ta cũng có thể nhận ra nếu liên tưởng đến công thức quen thuộc trong lượng giác:

$(2\cos t)^3 - 3(2\cos t) = 2\cos 3t$.

Bài tập tương tự: Giải phương trình $x^3 - 3x^2 + 2 = \sqrt{x+1}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $9x^2 - 28x + 21 = \sqrt{x-1}$.

Lời giải.

-Phân tích. Phương trình dạng này rất quen thuộc, ta có thể giải quyết bằng phương pháp nâng lũy thừa hoặc phương pháp đặt ẩn phụ $\left(\sqrt{x-1} = 3y - 5\right)$ để đưa về hệ đối xứng loại 2. Nhưng với ý tưởng táo bạo hơn đó là sử dụng phương pháp hàm số, ta sẽ xử lý phương trình trên như thế nào. sau đây sẽ chứng minh cho ý tưởng này: Điều kiện xác định: $x \ge 1$.

-Nếu $x \ge \dfrac{3}{2}$. $\Rightarrow 3x - 5 \ge -\dfrac{1}{2}$

Phương trình được viết lại dưới dạng: $(3x-5)^2 + (3x-5) = (x-1) + \sqrt{x-1}(1)$

Ta có hàm số $f(t) = t^2 + t$ có $f'(t) = 2t + 1 \ge 0$, $\forall t \ge -\dfrac{1}{2}$.

$$\text{Do đó } (1) \Leftrightarrow f(3x-5) = f\left(\sqrt{x-1}\right) \Leftrightarrow 3x - 5 - \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x-5)^2 = x - 1 \\ x \ge \dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

-Nếu $1 \le x < \dfrac{3}{2} \Rightarrow 4x - 3 > -\dfrac{1}{2}$. Phương trình được viết lại dưới dạng:

$(4x-3)^2 + (4x-3) = (x-1) + \sqrt{x-1} \Leftrightarrow f(4x-3) = f\left(\sqrt{x-1}\right)$

$$\Leftrightarrow 4 - 3x = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} (4-3x)^2 = x - 1 \\ x \le \dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{25 - \sqrt{13}}{18}.$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{2; \dfrac{25-\sqrt{13}}{18}\right\}$. ■

-Bình luận. Qua lời giải trên chúng ta thấy rằng, việc xây dựng hàm số cũng cần phải có sự linh hoạt. Như vậy, sự kết hợp phương pháp đánh giá và phương pháp nâng lũy thừa đúng thời điểm mà ý tưởng sử dụng phương pháp hàm số đã thành công.

Ví dụ 3. Giải phương trình $\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}=4-\left(x+\frac{1}{x}\right)$.

Lời giải.

-Phân tích. Phương trình được viết lại dưới dạng: $\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}+\left(x+\frac{1}{x}\right)=4$.

Ta để ý rằng $2-x^2+2-\frac{1}{x^2}+x^2+\frac{1}{x^2}=4$. Để có được điều này ta có thể sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki để đánh giá. Nhưng điều quan trọng hơn đó là việc tìm nghiệm phương trình cũng như tìm điều kiện để đẳng thức xảy ra. Khi đó ta có lời giải như sau: Điều kiện: $\begin{cases} 2-x^2\geq 0\\ 2-\frac{1}{x^2}\geq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\sqrt{2}\leq x\leq -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\leq x\leq\sqrt{2}\end{array}\right.$. Với điều kiện này phương trình đã cho được biến đổi thành: $\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}+\left(x+\frac{1}{x}\right)=4$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:

$$\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}+\left(x+\frac{1}{x}\right)\leq\sqrt{(1+1+1+1)\left(2-x^2+2-\frac{1}{x^2}+x^2+\frac{1}{x^2}\right)}=4$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{2-x^2}=\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}=x=\frac{1}{x}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{2-x^2}=x\\ \sqrt{2-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2-x^2=x^2\\ 2-\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=1$.

-Bình luận. Sự tinh tế trong lời giải trênđó là sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki một cách hiệu quả. Tuy nhiên ta không thể dừng tại đây, việc tìm dấu đẳng thức xảy ra của bất đẳng thức dẫn đế việc giải một hệ các phương trình chứa căn thức và phương pháp nâng lũy thừa sẽ giúp ta vấn đề này.

Ví dụ 4. Giải phương trình $\frac{2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}+\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=3$.

Lời giải.

-Phân tích. Đối với phương trình này ta cần trục căn thức bằng cách nhân lượng liên hợp.
Khi đó, phương trình tương đương với $2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)+\sqrt{x^2+1}-x=3(*)$
Quan sát kĩ phương trình $(*)$ ta nhận thấy các biểu thức trong phương trình có thể dễ dàng lấy đạo hàm.
Nếu xét hàm số $f(x)=2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)+\sqrt{x^2+1}-x$, $x\geq 0$.
Khi đó $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1$. Vấn đề đặt ra bây giờ đó là liệu hàm $f(x)$ có đơn điệu hay không? Hay nó có thể đơn điệ trên khoảng nào? Vấn đề sẽ được giải quyết trong lời giải sau: Điều kiện $x\geq 0$. Phương trình tương đương với $2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)+\sqrt{x^2+1}-x=3(*)$
-Nếu $x>1$ thì $VT_{(*)}>2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)>3=VP_{(*)}$

-Nếu $0 \leq x \leq 1$: Dễ thấy $x = 0$ là một nghiệm của phương trình $(*)$. Xét hàm số $f(x) = 2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)+\sqrt{x^2+1}-x,\, x \geq 0$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) + \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} > 0,\, \forall x \in (0;1]$

Do đó, hàm $f(x)$ đồng biến trên $(0;1]$. Suy ra $f(x) > f(0) = 2+1 = 3$, hay phương trình $(*)$ vô nghiệm.

Tóm lại, $x = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình ban đầu. ■

-Bình luận. Sự khéo léo khi ta kết hợp phương pháp hàm số với phương pháp trong lời giải trên đó là nhờ kĩ năng đánh giá để chia trường hợp. Sự vắng mặt của phương pháp đánh giá trong lời giải trên thì chỉ hai phương pháp nhân liên hợp và phương pháp hàm số ta không thể giải quyết trọn vẹn phương trình được.

Bước vào thế giới phương trình vô tỷ ta mới biết được phương trình vô tỷ đa dạng như thế nào. Có những phương trình rất đơn thuần, chỉ cần chọn đúng 1 phương pháp nào đó là ta có thể giải quyết ngay phương trình đó. Nhưng hầu hết các bài toán mà chúng ta thường gặp trong các đề thi Đại học, đề thi HSG đều không phải tầm thường như vậy. Chính vì thế, chúng ta cần phải biết phối hợp một cách nhuần nhuyễn, linh hoạt giữa các phương pháp giải một cách hiệu quả thì mới có thể giiar quyết triệt để phương trình. Khi ta sử dụng một công cụ nào đó mà không thể giải quyết triệt để phương trình, ta hãy nghĩ đến việc sử dụng thêm một công cụ khác nữa và thậm chs có nhiều công cụ khác nữa.